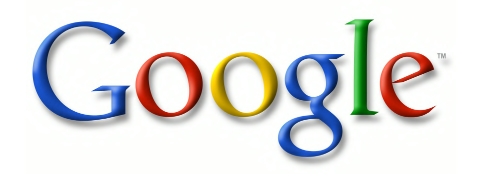
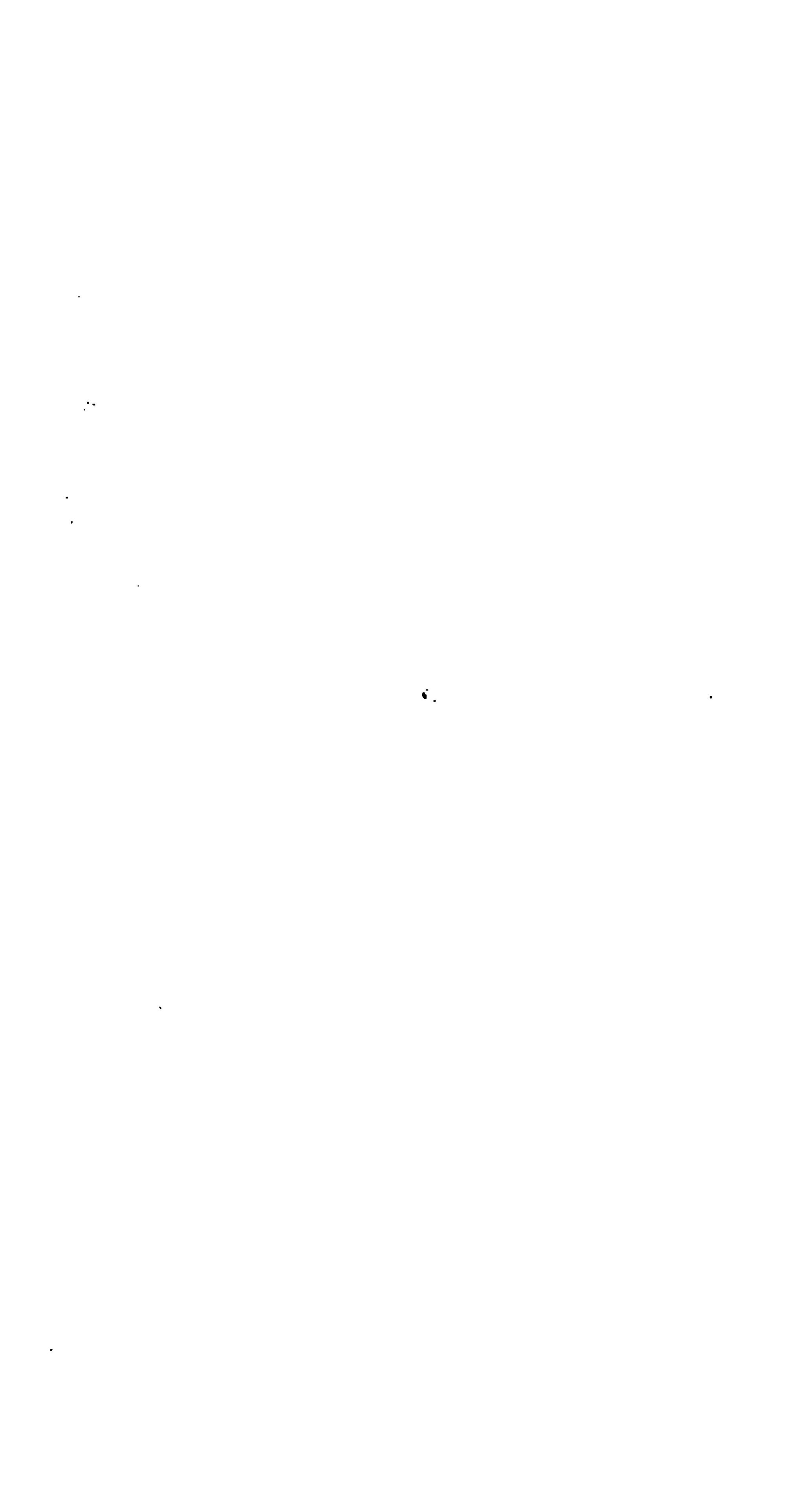














LEHRBUCH DER PHYSIK

ZUM GEBRAUCHE
BEI AKADEMISCHEN VORLESUNGEN

VON

H. A. LORENTZ,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LEIDEN

NACH DER VIERTEN,
VON H. A. LORENTZ UND L. H. SIERTSEMA BEARBEITETEN
AUFLAGE UND UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS
AUS DEM HOLLÄNDISCHEN ÜBERSETZT

VON

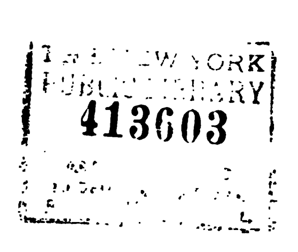
G. SIEBERT

ERSTER BAND

MIT 236 ABBILDUNGEN



LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH
1906


NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
413603

Vorwort.

Dieses Buch ist aus meinen Vorlesungen über Elementarphysik an der hiesigen Universität entstanden und, was Inhalt und Umfang betrifft, insbesondere den Bedürfnissen der Studierenden der Medizin, die die Mehrzahl meiner Zuhörer bildeten, angepaßt; was darüber hinausgeht, ist durch kleineren Druck von dem übrigen unterschieden.

Ich habe angenommen, daß der Leser experimentelle Vorlesungen hört und, wenn möglich, sich an praktischen Übungen beteiligt. Daher rührt es, daß ich der Beschreibung von Instrumenten und Beobachtungsmethoden nur wenig Platz eingeräumt habe. Auch habe ich die historische Entwicklung der Physik und die praktischen Anwendungen fast nicht berücksichtigt; ich unterließ das in der Voraussetzung, daß man Gelegenheit habe, sich hierüber in irgend einem größeren Werke, das als Nachschlagebuch benutzt wird, Auskunft zu verschaffen.

Neues bietet das Buch wohl kaum. Indes dürfte in einigen Kapiteln die Darstellung von der in anderen Lehrbüchern ähnlicher Art befolgten hinreichend abweichen, um, obgleich es deren in Deutschland viele vortreffliche gibt, das Erscheinen einer Übersetzung zu rechtfertigen.

Für die große auf diese verwendete Sorgfalt spreche ich Herrn Prof. Siebert meinen herzlichsten Dank aus.

Leiden, Dezember 1905.

H. A. Lorentz.



Inhalt.



Mathematische Einleitung.

§ 1. **Zusammenfassung der Ergebnisse von Messungen in eine Tabelle.** Bevor wir mit dem Gegenstande dieses Lehrbuches beginnen, wollen wir einige häufig vorkommende mathematische Betrachtungen und Methoden besprechen. Wir gehen dabei von einem einfachen Beispiel aus.

Wenn der Wärmegrad oder die Temperatur eines Körpers erhöht oder erniedrigt wird, so erleidet auch der Raum, den er einnimmt, eine Änderung. Wenn man diese Erscheinung untersuchen will, so muß man zunächst ermitteln, ob bei zwei Versuchen, bei denen die Temperatur dieselbe ist, auch für das Volum gleichgroße Werte gefunden werden. Dies ist wirklich der Fall und die Ergebnisse der bei verschiedenen Temperaturen ausgeführten Messungen können nun zu einer aus zwei Kolumnen bestehenden Tabelle zusammengestellt werden. In die erste Kolumne werden die Temperaturen, bei denen man beobachtet hat, eingetragen, und hinter jeder Temperatur steht das zugehörige Volum.

Auf diese Weise hat man für das Wasser die folgende Tabelle bekommen:

Temperatur	Volum	Temperatur	Volum
0	1	11,2	1,000251
0,9	0,999978	12,7	1,000352
2,1	0,999923	15,0	1,000706
5,2	0,999885	17,4	1,001057
7,2	0,999953	19,2	1,001419
9,1	1,000081		

Die Temperaturen sind hier in Graden nach der Skala von Celsius angegeben und als Volumeinheit ist der Raum gewählt, den die untersuchte Menge Wasser bei 0^0 einnimmt.

§ 2. Konstante und veränderliche Größen. Funktionen. Größen, die, wie hier die Temperatur und das Volum, verschiedene Werte annehmen können, werden veränderliche Größen genannt. Im Gegensatz hierzu bilden die unveränderlichen oder konstanten Größen, wie z. B. das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser oder das Gewicht, welches ein Körper an einer bestimmten Stelle der Erdoberfläche besitzt.

Im Hinblick darauf, daß jeder Temperatur ein bestimmtes Volum entspricht und daß sich dieses mit der Temperatur ändert, sagt man, daß das Volum von der Temperatur abhängig oder daß es eine Funktion derselben ist. Die Temperatur wird die *unabhängig veränderliche*, das Volum die *abhängig veränderliche Größe* genannt.

Dieselben Bezeichnungen werden in allen ähnlichen Fällen gebraucht.

So ist die Zeit, in welcher ein Pendel eine Schwingung macht, eine Funktion der Länge des Pendels. Das Gewicht eines Liters wasserhaltigen Alkohols ist eine Funktion des Verhältnisses der in ihm enthaltenen Mengen Alkohol und Wasser. Ebenso kann man den Logarithmus einer Zahl eine Funktion dieser Zahl selbst und den Sinus eines Winkel seine Funktion des Winkels nennen.

Eine Funktion ist *bekannt*, wenn man weiß, welchen Wert sie für jeden beliebigen Wert der unabhängigen Veränderlichen annimmt.

Jede bekannte Funktion kann durch eine Tabelle dargestellt werden. Die Tabelle des vorigen Paragraphen, ebenso die Logarithmen- und die Sinustafeln können als Beispiele dienen.

§ 3. Algebraische Darstellung einer Funktion. Wenn x eine veränderliche Größe ist, so ist jeder algebraische oder goniometrische Ausdruck, in welchem x vorkommt, z. B. $3x+5$, $x^2 - 4x + 6$, $\sqrt{x^3}$, e^x, $\sin x$, $\operatorname{tg}(ax+b)$, eine Funktion von x.

Hat man die Werte einer Funktion durch Messungen ermittelt und zu einer Tabelle zusammengestellt, so liegt es nahe zu versuchen, ob sich die Funktion durch einen Ausdruck wie die angeführten darstellen läßt.

Dies wollen wir für die in § 1 gegebenen Werte des Volums einer Menge Wasser zu tun versuchen. Dabei wollen

wir uns auf das Temperaturintervall von 7,2° bis 19,2° beschränken.

Der gesuchte Ausdruck würde am einfachsten werden, wenn die Ausdehnung des Wassers für aufeinander folgende gleiche Temperaturintervalle gleich groß wäre. Da die gesamte Volumvermehrung durch Erwärmung von 7,2° bis 19,2° gleich 0,001466 ist, so müßte dann die Ausdehnung für jeden Grad

$$\frac{0{,}001466}{12} = 0{,}0001222$$

sein. Bezeichnet man nun eine beliebige Temperatur zwischen 7,2° und 19,2° mit t und das zugehörige Volum mit v, so würde

$$v = 0{,}999953 + 0{,}0001222\,(t - 7{,}2)$$

sein. Das erste Glied dieses Ausdruckes stellt nämlich das Volum bei 7,2° und das letzte Glied die Ausdehnung durch Erwärmung von 7,2° auf t^0 dar.

Durch Entwickelung erhält man

$$v = 0{,}9990732 + 0{,}0001222\,t \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Da diese Formel aus einer *Annahme* abgeleitet ist, muß man noch untersuchen, ob sie wirklich die Ergebnisse der Beobachtung darstellt. Zu diesem Zwecke setzt man in der Gleichung nacheinander $t = 9{,}1$; 11,2; 12,7; 15,0; 17,4 und vergleicht die Werte, die man für v erhält, mit den experimentell bestimmten. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle in einer Weise zusammengestellt, die keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Temperatur	Volum		Unterschied
	beobachtet	berechnet	beob. — ber.
7,2	0,999953	0,999953	0
9,1	1,000081	1,000185	−104
11,2	1,000251	1,000442	−191
12,7	1,000352	1,000625	−273
15,0	1,000706	1,000906	−200
17,4	1,001057	1,001199	−142
19,2	1,001419	1,001419	0

Die einfache Formel (1) stellt also offenbar die Beobachtungen sehr mangelhaft dar. Man hätte sich übrigens auch auf andere Weise davon überzeugen können, daß die Annahme, auf welcher sie beruht, nicht richtig ist. Wenn man von dieser

Annahme ausgeht, kann man nämlich aus je zwei aufeinander folgenden Beobachtungen die Volumvermehrung pro Grad Temperaturerhöhung ableiten. Die auf diese Weise gefundenen Zahlen müßten einander gleich sein, wenn die Annahme richtig wäre. In Wirklichkeit findet man jedoch, daß die Zahlen immer größer werden. Für das Temperaturintervall von 7,2° bis 9,1° findet man die Zahl 0,00009, für das Temperaturintervall von 17,4° bis 19,2° dagegen die Zahl 0,00020.

Hiermit steht im Zusammenhang, daß die vermittelst der Formel (1) berechneten Werte sämtlich zu groß sind. Wendet man z. B. die Gleichung auf die Temperatur 13,2°, das Mittel der beiden äußersten Temperaturen 7,2° und 19,2° an, so findet man für das Volum einen Wert, der ebenfalls das Mittel der Werte ist, die es bei 7,2° und 19,2° hat. In Wirklichkeit nimmt aber das Volum von 7,2° bis 13,2° weniger zu als von 13,2° bis 19,2°. Es liegt daher bei 13,2° noch unter dem Mittel zwischen 0,999953 und 1,001419.

§ 4. Wir wollen nun untersuchen, ob eine Gleichung von komplizierterer Form ein besseres Resultat liefert als die Formel (1). Setzt man

$$v = a + bt + ct^2,$$

so kann man die Koeffizienten a, b und c so bestimmen, daß das Volum für *drei* Temperaturen die durch Messung gefundenen Werte annimmt. Soll dies z. B. für 7,2°, 12,7° und 19,2° der Fall sein, so muß den Gleichungen

$$a + 7{,}2\,b + (7{,}2)^2 c = 0{,}999953,$$

$$a + 12{,}7\,b + (12{,}7)^2 c = 1{,}000352,$$

$$a + 19{,}2\,b + (19{,}2)^2 c = 1{,}001419$$

genügt werden, d. h. es muß sein

$$a = 1{,}0001286; \quad b = -0{,}00007935; \quad c = 0{,}000007633.$$

Vergleichen wir nun wieder die vermittelst der Formel, d. h. die vermittelst der Gleichung

$$v = 1{,}0001286 - 0{,}00007935\,t + 0{,}000007633\,t^2 \quad . \quad (2)$$

berechneten Werte mit den beobachteten, so finden wir das Folgende:

Temperatur	Volum		Unterschied
	beobachtet	berechnet	beob. — ber.
7,2	0,999953	0,999953	0
9,1	1,000081	1,000039	+42
11,2	1,000251	1,000197	+54
12,7	1,000352	1,000352	0
15,0	1,000706	1,000656	+50
17,4	1,001057	1,001059	− 2
19,2	1,001419	1,001419	0

Die Übereinstimmung mit den Beobachtungen ist, wie man sieht, bei der Formel (2) erheblich besser als bei (1), und sie würde noch besser sein, wenn man eine Gleichung von der Form

$$v = a + bt + ct^2 + dt^3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

also eine Gleichung mit vier konstanten Größen benutzt hätte. Dies liegt in der Natur der Sache. Denn mit der Formel (1) konnten wir von *zwei*, mit der Formel (2) von *drei* Beobachtungen das Ergebnis genau wiedergeben, und dies können wir immer mit ebensoviel Beobachtungen als in der Formel konstante Größen vorkommen, so daß man durch hinreichende Vermehrung der Anzahl der letzteren das Ergebnis von beliebig vielen Messungen genau darstellen kann. Es ist daher nicht zu verwundern, daß nun auch für zwischenliegende Messungen die Ergebnisse, welche die Formel gibt, von den Ergebnissen der Beobachtung um so weniger abweichen, je größer die Anzahl der Konstanten wird.

Wir haben oben für die Bestimmung der Konstanten in der Formel (2) drei Beobachtungen willkürlich gewählt, nämlich die bei den Temperaturen 7,2°, 12,7° und 19,2°, und haben dafür gesorgt, daß die Formel mit den Ergebnissen *dieser* Beobachtungen genau übereinstimmt. Es gibt jedoch mathematische Hilfsmittel, durch welche man die Koeffizienten so bestimmen kann, daß die Übereinstimmung für sämtliche Beobachtungen so gut als möglich wird, wenn auch vielleicht der algebraische Ausdruck für keinen einzigen Wert der unabhängigen Veränderlichen mit den Ergebnissen der Messung vollkommen übereinstimmt. Durch diese Hilfsmittel, die wir hier nicht näher besprechen können, hat man eine Formel von der Form (3) aufgestellt, die das Volum einer Menge Wasser für alle Temperaturen, die in der Tabelle von § 1 vorkommen, mit hinreichender Genauigkeit darstellt. Da das Volum bei

0^0 als Einheit gewählt wurde, hat man $a = 1$ gesetzt; ferner hat man b, c und d so bestimmt, daß für die anderen Temperaturen die Unterschiede zwischen den beobachteten und den berechneten Werten, im ganzen genommen, so klein wie möglich werden. Die betreffende Formel ist

$$v = 1 - 0{,}00006105\,t + 0{,}000007718\,t^2 - 0{,}0000000373\,t^3 \quad \ldots \quad (4)$$

Inwieweit sie die Beobachtungen darstellt, ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

Temperatur	Volum		Unterschied
	beobachtet	berechnet	beob. — ber.
0,9	0,999978	0,999951	+27
2,1	0,999923	0,999905	+18
5,2	0,999885	0,999886	− 1
7,2	0,999953	0,999947	+ 6
9,1	1,000081	1,000055	+26
11,2	1,000251	1,000232	−17
12,7	1,000352	1,000393	−41
15,0	1,000706	1,000695	+11
17,4	1,001057	1,001078	−21
19,2	1,001419	1,001409	+10

§ 5. **Empirische und theoretische Formeln.** Formeln, wie die Gleichungen (2) und (4), die keinen anderen Zweck haben, als die Ergebnisse der Beobachtungen so gut wie möglich wiederzugeben, werden *empirische* Formeln genannt. Sie sind für verschiedene Erscheinungen in sehr voneinander abweichenden Formen aufgestellt worden. Formeln dagegen, die auf einer Einsicht in das Wesen der Erscheinungen und die Gesetze, welche sie beherrschen, also auf einer *Theorie* beruhen, heißen *theoretische* Formeln. Die Gleichung (4) würde eine solche Formel sein, wenn man wüßte, was im Wasser durch eine Temperaturerhöhung verändert wird, und wenn man daraus ableiten könnte, daß in dem Ausdruck für das Volum außer einem konstanten Teil Glieder mit der ersten, der zweiten und der dritten Potenz von t vorkommen müssen.

Es kann vorkommen, daß eine Formel, die man zunächst als eine empirische aufgestellt hat, später aus einer Theorie abgeleitet wird. Die Möglichkeit liegt namentlich dann vor, wenn die Formel eine einfache Form hat und wenn sie die Beobachtungen sehr gut wiedergibt. Von Gleichungen dagegen,

die ihre Übereinstimmung mit den Beobachtungen nur der großen Anzahl der konstanten Größen, die sie enthalten, zu verdanken haben, ist es nicht wahrscheinlich, daß sie einmal in theoretische Formeln übergehen. Sie können vielleicht, sobald wir die Erscheinung besser verstehen, durch eine viel einfachere theoretische Formel von ganz anderer Form ersetzt werden. Sehr komplizierte Gleichungen besitzen übrigens auch als empirische Formeln nur wenig oder gar keinen Wert, denn man kann die Größe der abhängigen Veränderlichen ebensogut aus einer Tabelle als aus einer derartigen Gleichung entnehmen.

Sowohl eine empirische als auch eine theoretische Beziehung kann übrigens ihren Nutzen haben, obgleich sie mit den Beobachtungen nicht ganz übereinstimmt. Für einige Zwecke kann bereits eine rohe Darstellung der Ergebnisse der Messungen genügen. Und wenn eine theoretische Formel kleine Abweichungen von der Wirklichkeit zeigt, so folgt daraus noch nicht, daß die Theorie, aus welcher sie abgeleitet ist, ganz verworfen werden muß. Es kann sein, daß die Theorie in der Hauptsache richtig ist und daß man nur Einzelheiten von untergeordneter Bedeutung unberücksichtigt gelassen hat.

§ 6. **Interpolieren.** Zuweilen wünscht man eine unveränderliche Größe für einen Wert der unabhängigen Veränderlichen zu kennen, der bei den Messungen nicht vorgekommen ist, aber zwischen den Werten liegt, die durch Beobachtungen ermittelt worden sind. Dies ist leicht, sobald eine geeignete empirische Formel aufgestellt ist; man hat dann nur in diese zu substituieren. So gibt z. B. die Formel (4) die folgenden Zahlen:

Temperatur	Volum	Unterschied
0	1	
1	0,999947	−53
2	0,999908	−39
3	0,999885	−23
4	0,999877	− 8
5	0,999883	+ 6
6	0,999903	+20
7	0,999938	+35
8	0,999986	+48
9	1,000040	+54
10	1,000124	+84

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß eine empirische Funktion, die die Beobachtungen für die innerhalb eines gewissen Intervalles liegenden Werte der unabhängigen Veränderlichen gut wiedergibt, keineswegs die Funktion auch für Werte gut darzustellen braucht, die außerhalb dieses Intervalles liegen. Wir haben uns z. B. bei der Ableitung der Gleichung (2) auf Temperaturen zwischen 7,2° und 19,2° beschränkt, und es ist durchaus nicht sicher, daß die Gleichung auch für $t = 0^0$ oder $t = 30^0$ das richtige Volum liefert. So ergibt sich für $t = 0$ aus der Formel $v = 1{,}000129$, während doch $v = 1$ sein muß.

Man kann auch interpolieren, ohne von einer empirischen Formel Gebrauch zu machen, nämlich dadurch, daß man direkt von einer Tabelle ausgeht. Beim Arbeiten mit einer Logarithmentafel z. B. befolgt man eine bekannte Regel, die darauf beruht, daß man bei *kleinen* Änderungen der miteinander zusammenhängenden Größen die Zunahme der einen als der Zunahme der anderen proportional ansehen kann.

Will man auf diese Weise aus der Tabelle in § 1 das Volum des Wassers bei 10° ableiten, so kann man in folgender Weise schließen. Steigt die Temperatur von 9,1° bis 11,2°, also um 2,1°, so nimmt das Volum um 0,000170 zu; wenn daher die Temperatur die kleinere Änderung von 9,1° bis 10°, also eine Zunahme von 0,9° erleidet, so nimmt das Volum zu um

$$\frac{0{,}000170 \times 0{,}9}{2{,}1} = 0{,}000073.$$

Folglich ist das gesuchte Volum

$$1{,}000081 + 0{,}000073 = 1{,}000154.$$

Dies Resultat ist verschieden von demjenigen, welches wir oben aus der Formel (4) abgeleitet haben, und von den beiden Werten ist der letztere, d. h. 1,000124 vorzuziehen. Die Berechnung, welche wir jetzt ausgeführt haben, beruht nämlich auf der Annahme, daß sich das Wasser bei gleichen Temperaturerhöhungen jedesmal um gleichviel ausdehnt, eine Annahme, von der wir bereits wissen, daß sie nicht richtig ist. Der Leser wird übrigens bemerken, daß das Interpolieren, so wie wir es soeben taten, darauf hinauskommt, daß man die

Ergebnisse der beiden Beobachtungen, zwischen denen interpoliert werden muß, durch eine Gleichung von der Form (1) darstellt und in diese die Werte der unabhängigen Veränderlichen einsetzt, für welche man die Funktion zu kennen wünscht. Man kann auch sagen, daß man in § 3 in derselben Weise zwischen $t = 7{,}2^0$ und $t = 19{,}2^0$ interpoliert hat wie soeben zwischen $t = 9{,}1^0$ und $t = 11{,}2^0$.

Daß wir auch jetzt ein zu großes Resultat bekamen, kann uns nach dem in § 3 Gesagten nicht wundern. Ferner sieht man an den gefundenen Zahlen, daß die angegebene Art des Interpolierens um so besser zum Ziel führt, je näher die Werte der unabhängigen Veränderlichen, mit denen man zu tun hat, beieinanderliegen.

Um das Interpolieren zu erleichtern und um eine bessere Übersicht über die Änderungen einer Funktion zu geben, werden oft in den Tabellen, in denen die unabhängige Veränderliche um gleiche Differenzen zunimmt, die Unterschiede der aufeinander folgenden Werte der Funktion aufgenommen. Man findet diese Unterschiede gewöhnlich in Logarithmentafeln und auch in der Tabelle dieses Paragraphen.

§ 7. Will man genauer interpolieren als nach der hier besprochenen einfachen Regel, so kann man statt *zwei*, *drei* in der Tabelle aufeinander folgende Werte der Funktion benutzen und diese durch eine Formel von der Form (2) darstellen. Um z. B. das Volum des Wassers bei 10^0 zu finden, kann man in der Gleichung

$$v = a + bt + ct^2$$

die Koeffizienten so bestimmen, daß für $t = 9{,}1$, $11{,}2$ und $12{,}7$ das Volum die in § 1 angegebenen Werte annimmt. Nachher muß man dann $t = 10$ einsetzen.

Am einfachsten wird diese Arbeit, wenn die Werte der unabhängigen Veränderlichen in der Tabelle um gleiche Differenzen zunehmen.

Drei aufeinander folgende Werte dieser Veränderlichen seien x, $x + p$ und $x + 2p$, und die zugehörigen Werte der Funktion seien y_1, y_2 und y_3. Wir wollen annehmen, man wünsche den Wert der Funktion zu kennen für den Wert $x + q$ der unabhängigen Veränderlichen, wobei $q < 2p$ ist.

Man kann zunächst die Differenzen $y_2 - y_1$ und $y_3 - y_2$ bilden, die wir $(\Delta y)_1$ und $(\Delta y)_2$ nennen wollen.

Ferner bilde man die Differenz $(\Delta y)_2 - (\Delta y)_1$, die wir mit $\Delta^2 y$ bezeichnen wollen und die man die *zweite* Differenz nennt. Natürlich kann man eine ganze Kolumne solcher Differenzen hinter der Kolumne der *ersten* Differenzen aufstellen.

Der gesuchte Wert der Funktion ist dann

$$y_1 + \frac{q}{p}(\Delta y)_1 + \frac{1}{2}\frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right)\Delta^2 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Will man z. B. aus der Tabelle des vorhergehenden Paragraphen den Wert des Volums für 8,5° entnehmen, so ist

$$\frac{q}{p} = 0{,}5\,, \quad y_1 = 0{,}999986\,, \quad (\Delta y)_1 = 0{,}000054\,, \quad \Delta^2 y = 0{,}000030$$

und der Ausdruck (5) gibt für das Volum

$$1{,}000017.$$

Natürlich können in (5) die Größen y_1, $(\Delta y)_1$ und $\Delta^2 y$ zuweilen negativ sein.

§ 8. Bei Berechnungen wie die in diesem und den vorhergehenden Paragraphen besprochenen darf man nicht vergessen, daß die Ergebnisse von Beobachtungen niemals vollkommen genau sind. In den Zahlen des § 1 sind Fehler in der einen oder anderen Richtung enthalten, d. h. die Zahlen sind etwas zu groß oder zu klein. Dadurch, daß man die Umstände, unter denen die Beobachtungen gemacht worden sind, in Erwägung zieht, und dadurch, daß man verschiedene Messungen miteinander vergleicht, kann man sich insofern ein Urteil über diese Fehler bilden, als man sagen kann, welchen Betrag sie höchstens haben können.

Die Übereinstimmung einer Formel mit den Beobachtungen ist nun als genügend anzusehen, wenn die Unterschiede zwischen den beobachteten und den mit der Formel berechneten Werten nicht größer sind als der Betrag, den die Fehler haben können.

Von diesem Betrage hängt es ab, wieviel Dezimalen man in der Zahl, die das Ergebnis einer Messung darstellt, niederschreiben soll; man muß vermeiden, viele Dezimalen anzugeben, die doch nicht zuverlässig sind. Kennt man z. B. die Länge einer Linie genau bis auf Zentimeter, so würde man durch Niederschreiben einer Ziffer, welche Hundertstel von Millimetern angibt, sich nicht nur nutzlose Mühe machen, sondern auch einen falschen Schein von Genauigkeit erwecken.

Es empfiehlt sich, höchstens *eine* Dezimale mehr anzugeben als diejenigen, welche man für ganz zuverlässig hält.

Werden aus Zahlen, die selbst nicht genau bekannt sind, durch Rechnung andere abgeleitet, so ist auch in diesen keine vollkommene Richtigkeit zu erwarten. So können aus den in § 1 für das Volum gegebenen Werten niemals durch Interpolieren die Werte für eine zwischenliegende Temperatur bis auf 7 Dezimalen genau gefunden werden. Daher haben wir in § 6 die Division von $0{,}000170 \times 0{,}9$ durch 2,1 nicht weiter als bis zur sechsten Dezimale ausgeführt.

Werden in einer Zahl Dezimalen weggelassen, so muß man die letzte Ziffer, welche man beibehält, um eine Einheit erhöhen, wenn die folgende Ziffer größer als 5 ist. So ist z. B. 0,19 eine genauere Abkürzung von 0,186 als 0,18 sein würde.

§ 9. **Graphische Darstellung des Verlaufes einer Funktion. Koordinaten.** Den Verlauf einer Funktion, d. h. die Art und Weise, wie sie sich ändert, kann man nicht nur durch eine Tabelle, sondern auch durch eine *Figur* ausdrücken. Diese vielfach benutzte *graphische Darstellung* beruht darauf, daß man die Werte von Größen aller Art durch die Längen von geraden Linien angeben kann. Ist eine Größe selbst eine Linie, dann kann sie in natürlicher Größe oder in verkleinertem oder vergrößertem Maßstab in eine Figur eingetragen werden. Will man eine Größe anderer Art darstellen, so kann man, nachdem sie in einer bestimmten Einheit ausgedrückt ist, eine Linie a von willkürlicher Länge wählen, um diese Einheit anzugeben; enthält die Größe p Einheiten, so ist die gesuchte Darstellung eine Linie, die p mal die Linie a enthält.

Um nun ein geometrisches Bild von dem Verlaufe einer Funktion zu bekommen, stellt man verschiedene Werte der unabhängigen Veränderlichen und die zugehörigen Werte der Funktion durch Linien dar und trägt alle diese Linien so in eine Figur ein, daß man gut unterscheiden kann, welche Linien sich auf die eine und welche sich auf die andere Veränderliche beziehen, und so, daß man außerdem deutlich sieht, welche zwei Linien jedesmal zusammen gehören.

Gewöhnlich verfährt man folgendermaßen. Auf einer

geraden Linie OX (Fig. 1) wird ein fester Punkt O angenommen und die Linie OA, welche einen Wert der unabhängigen Veränderlichen darstellt, wird von O aus auf OX abgetragen; dann wird die Linie AP, welche den Wert der Funktion angibt, in A senkrecht auf OX gestellt. Der Punkt P gibt dann durch seine Lage zwei zusammengehörige Werte der veränderlichen Größen an; jedes neue Paar von Werten liefert einen neuen, aber jedesmal einen ganz bestimmten Punkt.

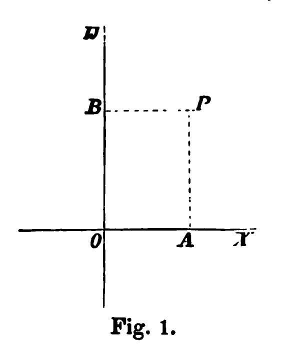


Fig. 1.

Den Punkt P bekommt man natürlich auch dadurch, daß man noch eine zweite, feste, gerade Linie OY, senkrecht zu OX, annimmt, auf dieser ein Stück OB abträgt, welches den Wert der Funktion darstellt, und durch den Punkt B eine Linie parallel zu OX zieht, bis sie AP schneidet.

Die beiden Linien, durch welche die Lage von P gefunden wird, nämlich OA und AP, oder OA und OB, nennt man die *Koordinaten* des Punktes, die festen Linien OX und OY die *Koordinatenachsen* und den Punkt O den *Ursprung* der Koordinaten. Entsprechend der Vorstellung, daß man zuerst von OX ein Stück abschneidet, welches den Wert der einen veränderlichen Größe angibt, nennt man OA die *Abszisse*, und dann AP, die zugehörige Senkrechte, die *Ordinate*. Man kann die Linien OX und OY als Abszissenachse und Ordinatenachse unterscheiden, oder auch jeder von ihnen einen Namen geben, der daran erinnert, welche Bedeutung die auf der Achse abgetragenen Strecken haben.

Die verschiedenen Punkte, deren jeder durch die Abszisse und die Ordinate ein Paar zusammengehörender Werte der Veränderlichen angeben, liegen auf einer gewissen Linie, die durch ihren Verlauf den Zusammenhang ausdrückt, der zwischen den veränderlichen Größen besteht.

Bevor wir das Gesagte durch ein Beispiel erläutern, bemerken wir noch, daß der Punkt P nur dann vollkommen bestimmt ist, wenn man weiß, nach welcher Seite von O hin man die Strecken OA und OB abtragen muß. Wenn dies nicht festgestellt ist, so kann man bei gegebenen Längen der

Strecken nicht *einen* Punkt, sondern vier Punkte, P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 2) erhalten.

Dieser Umstand macht jedoch keine Schwierigkeit, er bietet im Gegenteil den Vorteil, daß man nicht allein die Werte, sondern auch das Vorzeichen der Veränderlichen in der Figur angeben kann.

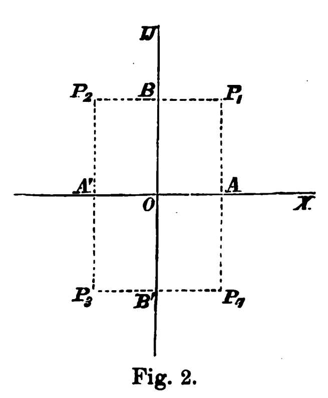


Fig. 2.

Wie Größen verschiedener Art je nach der Richtung oder dem Sinne, in welchem sie genommen werden, als positiv oder negativ betrachtet werden können, ist bekannt. Wird der Abstand eines Punktes von einer horizontalen Ebene positiv genannt, wenn der Punkt über der Ebene liegt, so ist er negativ, wenn er unter der Ebene liegt. Unter einer negativen Volumvermehrung ist eine Volumverminderung zu verstehen. Temperaturen über und unter dem Nullpunkt, Gewinn und Verlust von Wärme, drehende Bewegungen in entgegengesetzten Richtungen können durch die Zeichen + und — voneinander unterschieden werden.

Bei der graphischen Darstellung kann man nun auf jeder Achse eine Richtung als die positive wählen und dann eine Strecke, die den Wert einer Veränderlichen darstellt, von O aus in dieser oder in der entgegengesetzten Richtung abtragen, je nachdem die Veränderliche das eine oder das andere Vorzeichen hat. Wir wollen in den folgenden Figuren die Richtungen nach rechts und nach oben als die positiven wählen.

§ 10. **Beispiele.** Zur Erklärung mag zunächst die graphische Darstellung der Funktion

$$y = 2 + x - x^2 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

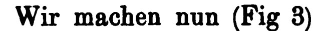
dienen.

Setzt man für die unabhängige Veränderliche x die Werte

$$-1;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 3$$

ein, so wird

$$y = 0;\ 2;\ 2{,}25;\ 2;\ 1{,}25;\ 0;\ -4.$$



Wir machen nun (Fig 3)

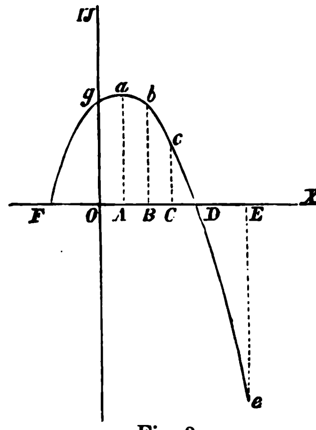


Fig. 3.

$$
\begin{aligned}
OF &= 1 \\
Og &= 2 \\
OA &= 0{,}5; & Aa &= 2{,}25 \\
OB &= 1; & Bb &= 2 \\
OC &= 1{,}5; & Cc &= 1{,}25 \\
OD &= 2 \\
OE &= 3; & Ee &= 4.
\end{aligned}
$$

Dann ist die durch die Punkte *F, g, a, b, c, D, e* gezogene krumme Linie die verlangte geometrische Darstellung.

Umgekehrt kann die Beziehung (6) dazu dienen, um durch algebraische Betrachtungen die Eigenschaften der Kurve zu ermitteln. Sie wird die *Gleichung* der Linie genannt.

Wenn wir die in § 1 für die Volumveränderung des Wassers mitgeteilten Ergebnisse graphisch darstellen wollen, müssen wir zunächst eine Linie wählen, durch die wir einen Temperaturunterschied von 1° angeben wollen, und die Temperaturen als Abszissen darstellen. Den Ordinaten könnte man dann Längen geben, die den in § 1 für das Volum gegebenen Werten proportional sind. Da es aber wünschenswert ist, daß die Unterschiede zwischen den Ordinaten deutlich hervortreten, müßten hierbei die Werte des Volums in so großem Maßstabe dargestellt werden, daß die Figur unzweckmäßige Dimensionen bekommen würde. Man umgeht diese Schwierigkeit, wenn man nicht das Volum selbst, sondern den Überschuß desselben über 1 durch die Ordinaten darstellt, so daß diese den Zahlen -22, -77, -115, -47, $+81$, $+251$ usw. entsprechen. Durch die erhaltenen Punkte kann die krumme Linie OB (Fig. 4) gezogen werden.

Diese Konstruktion ist am leichtesten auszuführen, wenn man dazu Papier benutzt, welches in kleine Quadrate geteilt ist. Derartiges Papier ist im Handel zu haben.

Nachdem die krumme Linie durch die Punkte, welche die einzelnen Beobachtungen darstellen, gezogen ist, kann man

aus der Figur die Werte entnehmen, die die Funktion für Werte der unabhängigen Veränderlichen hat, die bei den Beobachtungen nicht vorkamen; dazu mißt man in der Figur die Länge der Ordinate, die zu einer gegebenen Abszisse gehört. Man kann also mit Hilfe der Figur *graphisch interpolieren.*

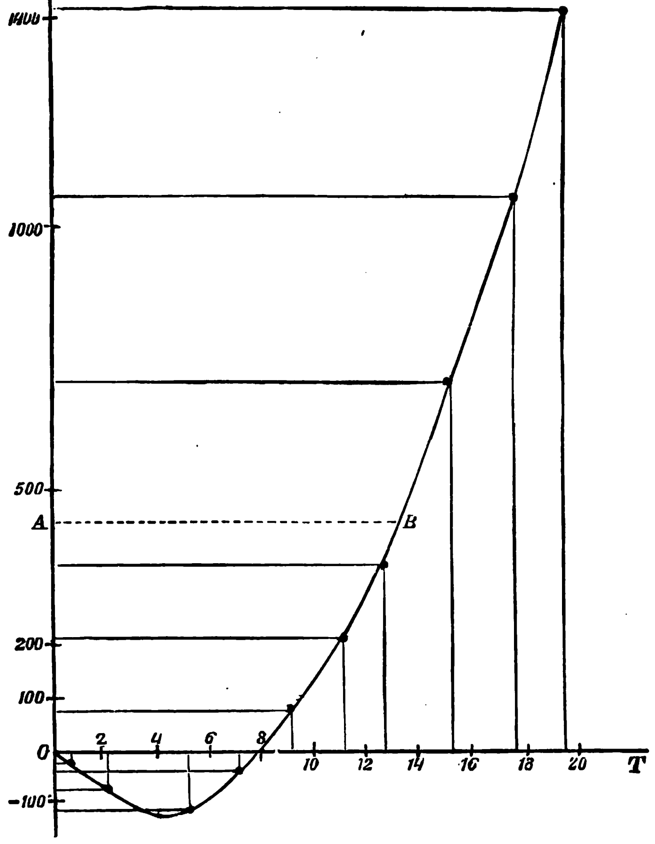


Fig. 4.

Ebenso leicht ist die Lösung der Aufgabe, die Temperatur zu finden, bei welcher das Volum eine gegebene Größe hat. Entspricht dieser letzteren der Punkt A in der Figur, so gibt AB die Temperatur an. Wie aus der Figur zu ersehen ist, gibt es für einige Werte des Volums zwei Antworten auf die Frage.

Die bei den Messungen begangenen Fehler machen sich in der Figur durch kleine Abweichungen von einem gleichmäßigen Verlauf bemerkbar, welche die krumme Linie zeigt, wenn sie durch alle Punkte gezogen wird, die die Beobachtungen darstellen, Abweichungen, von denen man annehmen zu dürfen glaubt, daß sie der Wirklichkeit nicht entsprechen. Man zieht in diesem Falle die krumme Linie so, daß sie möglichst gleichmäßig verläuft und sich zugleich so gut wie möglich an alle gefundenen Punkte anschließt, ohne durch alle hindurchzugehen. Dabei müssen natürlich die Punkte teils auf der einen und teils auf der anderen Seite der Linie liegen. Man kann auf diese Weise durch eine graphische Darstellung auf Fehler aufmerksam gemacht werden, aber man hat natürlich dafür Sorge zu tragen, daß sich die krumme Linie von keinem der Punkte weiter entfernt, als mit dem Grade von Genauigkeit vereinbar ist, den man jeder Messung zuschreiben zu müssen glaubt.

Die Gestalt der Linie in Fig. 4 macht es wahrscheinlich, daß das bei 12,7^0 gemessene Volum etwas zu klein ist (vgl. die Tabelle auf S. 6).

§ 11. **Steigende und fallende Linien. Maxima und Minima.** Wenn mit dem Zunehmen der unabhängigen Veränderlichen die Funktion ebenfalls zunimmt, so bekommt man bei der graphischen Darstellung eine nach der rechten Seite *steigende* Linie. Dagegen *fällt* die Linie, wenn die Funktion abnimmt, während die unabhängige Veränderliche zunimmt. Beispiele des ersteren Falles sieht man in Fig. 5, 6 und 7, Beispiele des letzteren in Fig. 8, 9 und 10. In den Figuren ist, wie gewöhnlich, die unabhängige Veränderliche durch Strecken auf der Achse OX dargestellt.

Nimmt man auf dieser Achse eine Anzahl von Punkten A, B, C, D an, die in gleichen Abständen voneinander liegen, zieht die Ordinaten Aa, Bb, Cc, Dd und dann die Linien ae, bf, cg (Fig. 5 und 6) oder be, cf, dg (Fig. 8) parallel zur x-Achse, so stellen die Strecken be, cf, dg (Fig. 5 und 6) oder ae, bf, cg (Fig. 8) die Änderungen dar, welche die Funktion durch die gleichen Zunahmen AB, BC, CD der unabhängigen Veränderlichen erleidet.

Wenn diese Strecken einander gleich sind, so ist die Linie *gerade* (Fig. 5 und 8). Eine solche Linie ist die Darstellung

einer Funktion, deren Änderungen stets den Änderungen der unabhängigen Veränderlichen proportional sind, oder, wie man auch sagen kann, die sich fortwährend gleichschnell ändert. Eine derartige Funktion wird eine *lineare* genannt.

Die Annahme, welche wir in § 3 machten, kommt, wie man jetzt sieht, darauf hinaus, daß ein Teil der Linie in Fig. 4 als gerade angesehen wird. Auch ergibt sich aus der

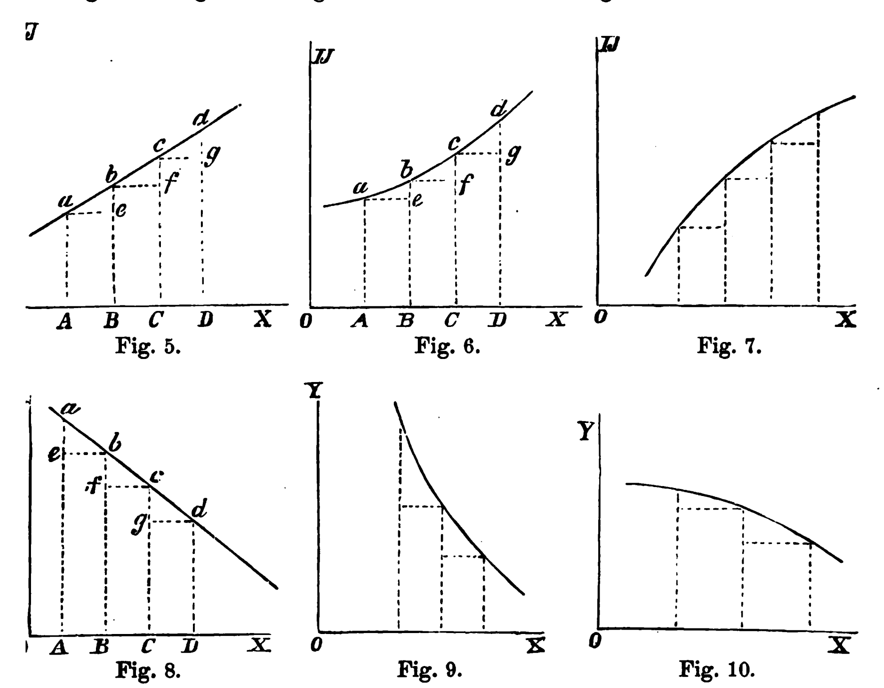


Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.
Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10.

Figur unmittelbar, daß die in jenem Paragraphen berechneten Werte des Volums zwischen den Temperaturen 7,2° und 19,2° zu groß ausfallen mußten.

Bei der steigenden krummen Linie in Fig. 6, die ihre *konvexe* Seite der Abszissenachse zukehrt, nehmen die Strecken be, cf, dg nach rechts zu; hier geht das Steigen, kann man sagen, je länger je schneller. Das Entgegengesetzte ist der Fall bei der Linie in Fig. 7, die ihre *konkave* Seite der Achse OX zukehrt, und ein derartiger Unterschied ist auch zwischen den Linien in Fig. 9 und 10 zu bemerken.

Eine krumme Linie kann auch abwechselnd steigen und fallen. In Fig. 3 (S. 14) geht beim Zunehmen der unabhängigen Veränderlichen im Punkt a das Steigen in Fallen über. Einen Punkt, in welchem dies stattfindet, nennt man einen *Kulminationspunkt* der Linie. Für den Wert von x, der durch die Abszisse OA dargestellt wird, hat die Funktion einen Wert, welcher größer ist als die unmittelbar vorhergehenden und die unmittelbar folgenden Werte. Man drückt dies dadurch aus, daß man sagt, die Funktion werde ein *Maximum*. Dagegen spricht man von einem *Minimum*, wenn die Funktion einen Wert hat, der kleiner ist als die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Werte. So wird z. B. das Volum des Wassers bei ungefähr 4° C. ein Minimum (vgl. Fig. 4).

In Fig. 11 kommt sowohl ein Maximum als ein Minimum vor. Aus dieser Figur ist auch zu ersehen, daß eine Funktion, nachdem sie ein Maximum erreicht hat, später sehr gut durch eine neue Steigung Werte bekommen kann, die über diesem Maximum liegen. Ein Maximum ist also nicht notwendigerweise der größte von *allen* Werten der Funktion. Daher war es nötig, oben von den *unmittelbar* vorhergehenden und nachfolgenden Werten zu reden.

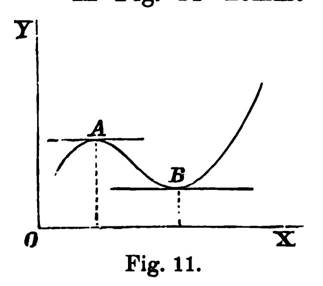


Fig. 11.

Zuweilen kann man durch eine einfache Berechnung die Werte der unabhängigen Veränderlichen finden, für die die Funktion ein Maximum oder Minimum wird. Für den Ausdruck

$$a x^2 + b x + c,$$

in welchem wir a als positiv annehmen wollen, kann z. B. geschrieben werden

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Er wird daher ein Minimum, wenn die veränderliche Größe x den Wert

$$-\frac{b}{2a}$$

hat. In diesem Falle ist nämlich das erste Glied gleich Null,

während es für alle anderen Werte von x positiv ist und das zweite Glied stets denselben Wert hat.

Mit einer kleinen Abänderung ist dieselbe Schlußfolgerung auch anwendbar, wenn der Koeffizient von x^2 negativ ist. Dann besteht ein Maximum (vgl. das Beispiel in § 10).

Wir können es dem Leser überlassen, für einige Fälle, in denen a, b und c bestimmte Werte haben, die Berechnung auszuführen.

§ 12. **Tangente. Normale.** Die *Richtung* einer krummen Linie in einem bestimmten Punkt wird durch die *Tangente* in diesem Punkt angegeben. Es sei P (Fig. 12) der betreffende Punkt, Q ein zweiter Punkt der Linie, PQ die Verbindungslinie. Hält man den Punkt P fest, ersetzt aber den Punkt Q durch einen anderen Punkt Q', der näher bei P liegt, dann bekommt auch die Sekante eine neue Richtung PQ'. Während sich Q auf der krummen Linie nach P hinbewegt, dreht sich die Sekante um P und nähert sich dabei immer mehr einer Linie $R'R$ von bestimmter Richtung. Diese wird die Berührungslinie oder Tangente genannt. Sie kann in derselben Weise erhalten werden, indem man einen Punkt Q'' von der anderen Seite sich an P annähern läßt.

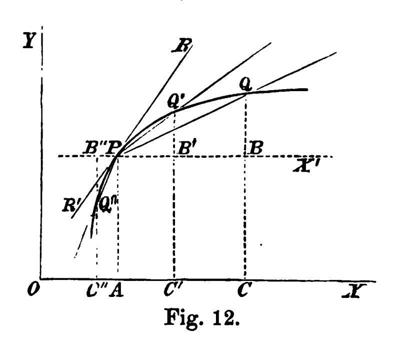


Fig. 12.

In denjenigen Punkten einer krummen Linie, in denen die Ordinate ein Maximum oder ein Minimum wird, läuft, wie man in Fig. 11 sieht, die Tangente der Abszissenachse parallel.

Eine Tangente kann mit der krummen Linie sehr gut mehr als *einen* Punkt gemein haben. Beispiele hiervon bilden die Linien in Fig. 18 und Fig. 24.

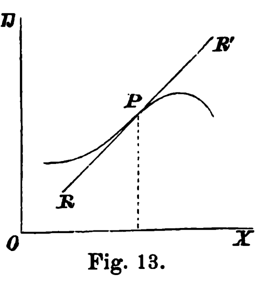


Fig. 13.

Auch im Berührungspunkt selbst kann die Tangente durch die krumme Linie hindurchgehen. Ein Beispiel hiervon sieht man in Fig. 13, wo RR' die krumme Linie berührt, obwohl

sich diese beiderseits von P auf verschiedenen Seiten von RR' befindet. Dies hängt damit zusammen, daß die krumme Linie auf der einen Seite von P die *konvexe* und auf der anderen Seite die *konkave* Seite der Achse OX zukehrt. Ein Punkt wie P wird *Wendepunkt* genannt.

Eine Linie, die im Berührungspunkt senkrecht auf die Tangente oder, wie man auch sagt, senkrecht auf die krumme Linie gezogen wird, nennt man *Normale.*

§ 13. **Maß für die Krümmung.** Man nehme an, ein Punkt bewege sich auf einer krummen Linie und in diesem Punkt werde fortwährend eine Tangente gezogen, und zwar immer nach derjenigen Seite, nach welcher die Bewegung gerichtet ist. Der Winkel, um den sich dann die Tangente dreht, bildet das Maß für die *Richtungsänderung* für den von dem beweglichen Punkt durchlaufenen Teil der krummen Linie, oder, wie man auch sagt, für die *Krümmung* dieses Teiles.

So werden in Fig. 14 die Krümmungen der Kreisbogen PP' und PP'' dargestellt durch die Winkel $QP'R'$ und $QP''R''$. PR, $P'R'$ und $P''R''$ sind nämlich Tangenten und $P'Q$ und $P''Q'$ sind parallel zu PR gezogen. Gleiche Bogen eines und desselben Kreises haben offenbar dieselbe Krümmung, aber nimmt man zwei gleich lange Bogen auf verschiedenen Kreisen, so sieht man leicht, daß die Richtungsänderung am größten auf demjenigen Bogen ist, welcher dem kleineren Kreis angehört. Man sagt daher, daß ein kleiner Kreis stärker gekrümmt ist als ein großer.

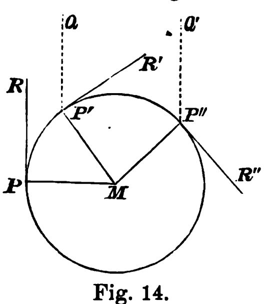


Fig. 14.

Von der Krümmung, die eine beliebige krumme Linie an einer bestimmten Stelle hat, bekommt man eine Vorstellung, wenn man ein Stück der Linie, welches an dieser Stelle liegt und im Vergleich mit den Dimensionen der Figur sehr klein ist, wählt und auf die Richtungsänderung dieses Teilchens achtet. Diese kann man mit der Richtungsänderung eines zweiten kleinen Bogens von gleicher Länge vergleichen, der sich an einer anderen Stelle befindet. Betragen z. B. die Richtungsänderungen auf zwei Bogen von je 1 mm Länge an

den Stellen P und Q bezw. 2^0 und 1^0, so sagt man, daß die Linie in P stärker gekrümmt ist als in Q. In Fig. 3 z. B. ist die Krümmung in a größer als in D.

Man kann fragen, wie groß der Radius eines Kreises sein muß, wenn ein auf demselben genommener Bogen von 1 mm Länge dieselbe Krümmung von 2^0 haben soll wie der soeben angenommene Bogen von derselben Länge im Punkt P. Durch eine einfache Berechnung findet man als Antwort $180/2\pi$ mm. Ein Kreis mit diesem Radius, der so an die konkave Seite der Linie angelegt wird, daß er diese im Punkt P berührt, schließt sich genauer an die krumme Linie an als jeder beliebige andere Kreis, der durch den Punkt P geht. Man nennt einen solchen Kreis den *Krümmungskreis* und seinen Radius den *Krümmungsradius* der betreffenden Linie im Punkt P.

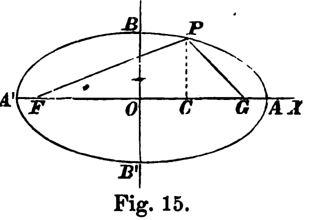


Fig. 15.

§ 14. **Besondere krumme Linien.** Eine *Ellipse* (Fig. 15) ist eine Linie, welche die Eigenschaft hat, daß für jeden ihrer Punkte die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten F und G gleich groß ist. Es muß also, wenn P ein beliebiger Punkt ist,

$$PF + PG = AF + AG = A'F + A'G$$

sein.

Man kann die Ellipse dadurch konstruieren, daß man einen Faden mit den Enden in F und G befestigt und einen Bleistift so bewegt, daß er den Faden immer gespannt hält, daß also, wenn sich die Spitze des Bleistiftes in P befindet, der Faden die gebrochene Linie FPG entlang läuft. Wenn der Faden in F und G an Stiften befestigt ist, so kann man jedoch auf diese Weise die Ellipse nicht in einem einzigen Zuge beschreiben. Hat man nämlich den Bleistift von P nach A bewegt, so stößt derjenige Teil des Fadens, welcher nach F läuft, an den Stift in G an. Man umgeht diese Schwierigkeit dadurch, daß man den Faden gleich dem Umfang des Dreiecks FPG macht, die Enden zusammenknüpft und den Faden lose um die Stifte herumlegt. Man spannt dann den Faden mit dem Bleistift, so daß er den Umfang des genannten Dreiecks entlang läuft.

Die Punkte F und G heißen die *Brennpunkte*, die Linien, welche von ihnen nach einem beliebigen Punkt der Ellipse gezogen werden, *Brennstrahlen.*

Die gerade Linie AA', welche durch die Brennpunkte gezogen wird, teilt die Ellipse in zwei kongruente Teile, von denen der eine mit dem anderen zusammenfällt, wenn man ihn um diese Linie umklappt. Jedem Punkt P der Ellipse entspricht ein zweiter Punkt, der auf der Verlängerung der von P auf AA' gefällten Senkrechten von AA' ebensoweit entfernt wie P liegt. Man drückt dies dadurch aus, daß man sagt, die Ellipse sei *symmetrisch* in bezug auf AA'.

Ebenso ist sie symmetrisch in bezug auf die Linie BB', die in der Mitte von FG senkrecht steht.

AA' und BB' werden die Achsen genannt; zur Unterscheidung heißt AA' die große, BB' die kleine Achse. Der Unterschied zwischen beiden ist um so größer, je näher die Brennpunkte F und G bei A' und A liegen.

Der Punkt O, in welchem sich die Achsen schneiden, ist der *Mittelpunkt*; er teilt jede Sehne, die durch ihn gezogen wird, in zwei gleiche Teile.

A, A', B und B' sind die *Scheitel.*

Aus der Gleichung

$$PF + PG = AF + AG$$

folgt, da $AG = A'F$ ist,

$$PF + PG = AF + A'F = AA';$$

die Summe der Brennstrahlen ist also für jeden Punkt gleich der großen Achse.

Verbindet man einen der Endpunkte der kleinen Achse, z. B. B mit F und G, so ist

$$BF = BG.$$

Da nun wieder

$$BF + BG = AA'$$

sein muß, hat man

$$BF = BG = OA.$$

Hiervon kann man Gebrauch machen, um die Lage der Brennpunkte zu bestimmen, wenn die Achsen, also die Punkte A, A' B und B' gegeben sind.

§ 15. **Zusammenhang zwischen der Ellipse und dem Kreis. Tangente an die Ellipse.** Wählt man, wie in Fig. 15 angedeutet ist, die Linien OA und OB als Koordinatenachsen, so kann man aus der Definition der Ellipse ableiten, wie groß die Ordinate CP ist, die zu einer gegebenen Abszisse OC gehört. Dieselbe Berechnung kann man für einen Kreis ausführen (Fig. 16), der über der großen Achse der Ellipse als Durchmesser beschrieben ist. Es zeigt sich dann, daß das Verhältnis der Ordinaten CQ und CP immer dasselbe ist, wo man auch den Punkt C auf AA' annimmt. Ein ähnlicher Zusammenhang besteht auch zwischen der Ellipse und dem Kreis, der über der kleinen Achse als Durchmesser beschrieben ist; wird nämlich in einem beliebigen Punkt dieser Achse eine Senkrechte errichtet, so ist das Verhältnis zwischen den Entfernungen dieses Punktes vom Durchschnittspunkt mit der Ellipse und vom Durchschnittspunkt mit dem Kreise konstant.

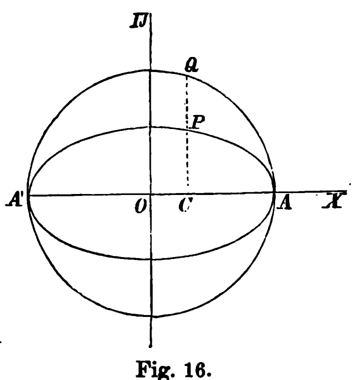


Fig. 16.

Man erhält daher eine Ellipse, wenn man in einem Kreise einen Durchmesser zieht und alle Entfernungen der Kreispunkte von dem Durchmesser in demselben Verhältnis verkleinert oder vergrößert.

Aus der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Definition der Ellipse oder aus dem soeben besprochenen Zusammenhang mit dem Kreis können alle Eigenschaften der Kurve abgeleitet werden. Eine der wichtigsten derselben ist die folgende:

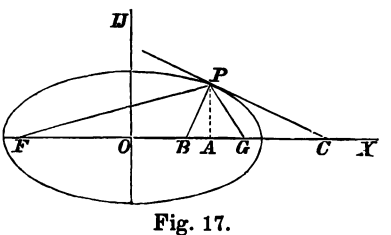


Fig. 17.

Eine Tangente PC (Fig. 17) bildet gleiche Winkel mit den Brennstrahlen FP und GP, die nach dem Berührungspunkt gezogen werden. Die Normale PB halbiert den Winkel zwischen den Brennstrahlen.

Die Ellipse ist am stärksten gekrümmt an den Endpunkten der großen, am schwächsten gekrümmt an den Endpunkten der kleinen Achse.

§ 16. **Einseitige Dehnung und Zusammendrückung von Figuren.** Man kann mit jeder ebenen Figur eine Formveränderung vornehmen wie diejenige, durch welche wir aus einem Kreis eine Ellipse erhielten.

Zu diesem Zwecke ziehen wir in der Ebene der Figur eine gerade Linie OX (Fig. 18), fällen von den verschiedenen Punkten P, Q usw. der Figur Senkrechte PA, QB usw. auf OX und nehmen auf diesen Senkrechten neue Punkte p, q so an, daß

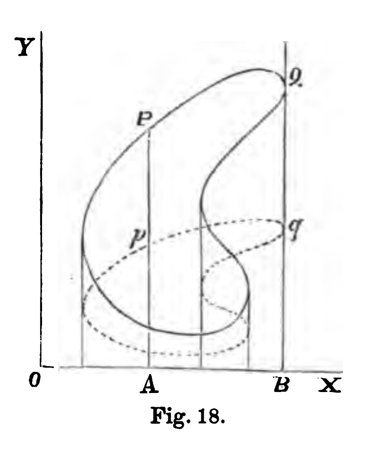


Fig. 18.

$$\frac{Ap}{AP} = \frac{Bq}{BQ} = \text{usw.}$$

Die Punkte p, q usw. bestimmen die neue Figur.

Man kann sagen, daß man diese Figur aus der ursprünglichen dadurch bekommen hat, daß man alle Dimensionen senkrecht zu OX in demselben Verhältnis verkleinert hat. Die Länge von Linien parallel zu OX bleibt unverändert.

Eine solche Formveränderung kann eine *einseitige Zusammendrückung* genannt werden. Umgekehrt erhält man PQ ... aus pq ... durch eine *einseitige Dehnung.*

Ein Beispiel dieser Formveränderungen kommt bei der graphischen Darstellung einer Funktion vor. Man kann dabei, wie wir sahen, die Linien, welche die Einheiten für die veränderlichen Größen darstellen sollen, willkürlich wählen. Hat man nun mit einer bestimmten Wahl für diese Linien die Figur gezeichnet und gibt man bei einer Wiederholung der Konstruktion der Linie, die eine der Einheiten vorstellt, eine andere Länge, so entsteht eine neue Linie, die man aus der zuerst konstruierten durch einseitige Dehnung oder Zusammendrückung bekommen kann.

Zieht man in einer Figur zwei aufeinander senkrecht

stehende Linien OX und OY, so kann man die Figur erst in der Richtung von OX und dann in der Richtung von OY einseitig dehnen. Tut man dies jedesmal in demselben Maße, d. h. werden erst die Dimensionen in der einen und dann in der anderen Richtung in demselben Verhältnis verändert, so ist schließlich eine Figur entstanden, die der ursprünglichen ähnlich ist.

Wenn eine Figur, die in einer Ebene liegt, auf eine Ebene projiziert wird, die mit der ersten einen bestimmten Winkel bildet, so behalten alle Linien in der Figur, die der Durchschnittslinie der Ebenen parallel laufen, in der Projektion dieselbe Größe, und alle Linien, die auf der Durchschnittslinie senkrecht stehen, werden in demselben Verhältnis verkleinert. Daher ist die Projektion eine Figur, die aus der ursprünglichen durch einseitige Zusammendrückung entstehen kann. Ein Kreis z. B. hat als Projektion eine Ellipse.

Durch eine derartige Schlußfolgerung kann man beweisen, daß der Durchschnitt eines Rotationszylinders mit einer beliebigen Ebene eine Ellipse ist.

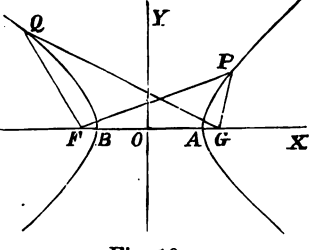


Fig. 19.

§ 17. **Hyperbel.** Eine *Hyperbel* (Fig. 19) hat die Eigenschaft, daß für jeden Punkt P derselben der Unterschied der Entfernungen von zwei festen Punkten F und G gleich groß ist. Diese Punkte heißen *Brennpunkte*, die Linien FP und GP *Brennstrahlen*.

Diese krumme Linie besteht aus zwei ganz voneinander getrennten Teilen, die sich jeder nach beiden Seiten hin ins Unendliche erstrecken. Die Linie FX, welche die Brennpunkte verbindet, ist eine Symmetrieachse, ebenso die Linie OY, welche in der Mitte von FG senkrecht steht.

Man kann beweisen, daß die gegenseitige Entfernung der Punkte A und B, in denen die Linie FG die Hyperbel schneidet, gleich der konstanten Differenz der Brennstrahlen ist.

Zwischen den beiden Zweigen der krummen Linie besteht der Unterschied, daß die Punkte des einen näher bei G als bei

F, die des anderen umgekehrt näher bei F als bei G liegen. Für die Punkte P und Q z. B. hat man

$$PF - PG = AB \quad \text{und} \quad QG - QF = AB.$$

Durch die Hyperbel allein wird kein Teil der Ebene nach allen Seiten begrenzt. Linien, die wie der Kreis und die Ellipse in sich selbst zurücklaufen, tun dies; sie werden *geschlossene* Linien genannt.

Auch bei gebrochenen Linien kann man geschlossene und nicht geschlossene unterscheiden. Der Umfang eines Vielecks ist eine geschlossene gebrochene Linie.

Noch eine bemerkenswerte Eigenschaft der Hyperbel verdient erwähnt zu werden. Man kann (Fig. 20) durch den

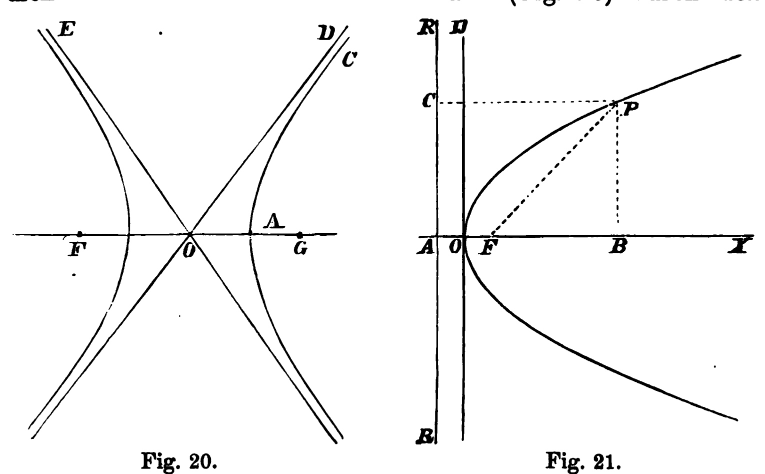


Fig. 20. Fig. 21.

Punkt O, der mitten zwischen den Brennpunkten liegt, eine gerade Linie OD so ziehen, daß der Zweig AC der Hyperbel die gerade Linie niemals erreicht, sich derselben aber doch fortwährend nähert und, wenn sie hinreichend verlängert wird, in eine so geringe Entfernung von OD kommt als man will. Diese Linie OD wird *Asymptote* genannt. Es gibt noch eine zweite Asymptote OE.

Auch bei einigen anderen krummen Linien kommen Asymptoten vor. Der Leser wird jetzt verstehen, was der Ausdruck *asymptotische Annäherung* bedeutet.

§ 18. **Parabel.** Die *Parabel* (Fig. 21) ist der geometrische Ort aller Punkte, die gleichweit entfernt von einer geraden

Linie RR und einem Punkt F sind. RR heißt die *Direktrix* oder *Leitlinie*, F der *Brennpunkt*, FP ein *Brennstrahl.*

Die Linie besteht aus einem Zweig, der sich beiderseits ins Unendliche erstreckt. Die Linie AX, durch F senkrecht zur Direktrix gezogen, ist eine Symmetrieachse; der Punkt O, in welchem diese Achse die Parabel schneidet, heißt der *Scheitel.* Die Tangente in diesem Punkt steht auf OX senkrecht.

Nimmt man OX und OY als Koordinatenachsen, so kann man aus der gegebenen Definition einen einfachen Zusammenhang zwischen den Koordinaten OB und BP eines beliebigen Punktes der krummen Linie ableiten. Es stellt sich nämlich heraus, daß die Ordinate der Quadratwurzel der die Abszisse vorstellenden Zahl proportional ist. Wird also die Entfernung von B nach O vervierfacht, so wird die Senkrechte BP verdoppelt.

Hieraus kann man ableiten, daß auch eine krumme Linie, deren Ordinaten den zweiten Potenzen der Abszissen propor-

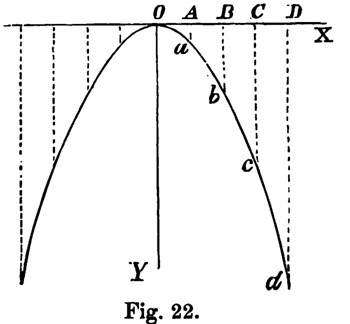



Fig. 22.

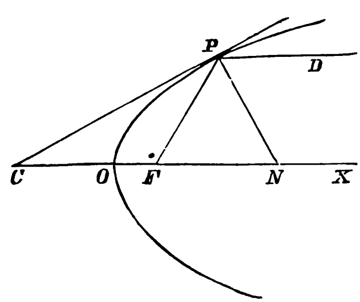


Fig. 23.

tional sind, eine Parabel ist. Zur Erläuterung kann Fig. 22 dienen. In derselben ist OX als Abszissenachse genommen und die Strecken OA, AB, BC, CD sind einander gleich gemacht; die erste Ordinate Aa ist willkürlich gewählt und die folgenden sind so bestimmt, daß

$$Bb = 4Aa,\ Cc = 9Aa,\ Dd = 16Aa \text{ usw.}$$

Wie die Linie $dcbaO$ auf der anderen Seite von O fortgesetzt ist, ist leicht aus der Figur zu ersehen.

Eine Tangente PC an die Parabel (Fig. 23) bildet gleiche Winkel mit der Achse CF und dem Brennstrahl FP nach

dem Berührungspunkt. Daraus folgt, daß der Winkel zwischen dem Brennstrahl und einer Linie PD, die durch den Berührungspunkt parallel zu der Achse gezogen ist, durch die Normale PN halbiert wird.

Die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel können dadurch entstehen, daß eine Kegelfläche von einer Ebene geschnitten wird; daher werden diese drei krummen Linien als *Kegelschnitte* bezeichnet.

§ 19. **Periodische Funktionen. Wellenlinien.** Wir wollen jetzt die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \sin x$$

besprechen. Zunächst bemerken wir, daß man einen Winkel nicht immer in Graden und Bruchteilen eines solchen, sondern oft in sogenanntem „Bogenmaß" ausdrückt. Man bezeichnet dann den Winkel durch die Zahl, welche die Länge des Kreisbogens angibt, der in dem Winkel vom Scheitel als Mittelpunkt aus mit der Längeneinheit als Radius beschrieben wird. In Bogenmaß wird ein Winkel von 360^0 durch 2π, ein rechter Winkel durch $\frac{1}{2}\pi$ und ein Winkel von $360^0/2\pi = 57^0 17'$ durch die Zahl 1 dargestellt.

Die Änderungen, welche der Sinus erleidet, wenn der Winkel von 0^0 bis 360^0 oder von 0 bis 2π zunimmt, sind bekannt. Man kann auch Winkel, die größer als 360^0 sind, ebenso auch negative Winkel betrachten, wie dies in der Goniometrie gelehrt wird. Wenn der Winkel um 360^0 oder 2π zunimmt, nimmt der Sinus wieder denselben Wert an.

Eine Funktion, welche immer wieder denselben Wert annimmt, wenn die unabhängige Veränderliche um einen bestimmten Betrag zunimmt, heißt *periodisch*. Der betreffende Betrag wird die *Periode* genannt. Die Periode von $\sin x$ ist also 2π.

§ 20. Wenn der Winkel in Graden ausgedrückt ist, so muß man, um die Änderungen des Sinus graphisch darzustellen, zunächst eine gerade Linie wählen, welche einen Winkel von 1^0 angibt. Wird, wie wir voraussetzen, Bogenmaß benutzt, so wird ein rechter Winkel durch eine gerade Linie dargestellt, die $\frac{1}{2}\pi$ mal so groß ist wie die gewählte Längeneinheit.

Fig. 24, die die gesuchte graphische Darstellung zeigt, bedarf keiner ausführlichen Erläuterung. Da für $x = 0$ auch

der Sinus Null wird, geht die krumme Linie durch den Ursprung. Sie schneidet ferner die Abszissenachse in den Punkten C, D, E usw., B, A usw., die so liegen, daß

$$AB = BO = OC = CD = DE = \text{usw.} = \pi$$

ist. Zwischen den genannten Punkten liegt die Linie abwechselnd über und unter der Abszissenachse, da der Sinus jedesmal, wenn er gleich Null geworden ist, das Zeichen wechselt. Die größten positiven und negativen Werte hat die Ordinate in den Punkten, die in der Mitte zwischen O und C, C und D usw. liegen; diese Punkte entsprechen nämlich

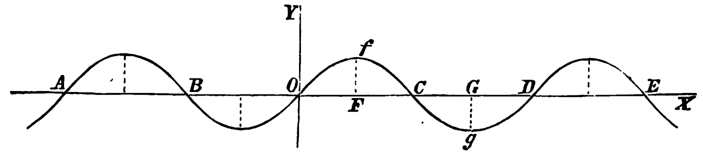


Fig. 24.

$x = \frac{1}{2}\pi$ (90°), $\frac{3}{2}\pi$ (270°) usw. Bei der Konstruktion ist es nötig, noch eine Anzahl anderer Punkte außer O, f, C, g, D ... zu bestimmen. Man kann z. B. einen Punkt nehmen, dessen Abszisse $\frac{1}{3}OF$ ist; die Ordinate ist hier $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$. Zur Abszisse $\frac{1}{2}OF$ gehört eine Ordinate $= \sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$.

Aus den Eigenschaften des Sinus folgt, daß Ff eine Symmetrieachse für das Stück OfC der Linie ist, ferner daß das Stück CgD mit OfC kongruent ist. Wenn das Stück $OfCgD$ konstruiert ist, so ist die ganze Linie bekannt, denn dies Stück wiederholt sich immer wieder nach rechts und links, wie man zum Teil in der Figur sieht. Das Stück von A bis O stimmt vollkommen überein mit dem Stück von O bis D.

Eben weil der Sinus eine periodische Funktion ist, muß die Linie, welche die Änderungen desselben darstellt, aus einer ununterbrochenen Aufeinanderfolge von gleichen Teilen bestehen.

§ 21. Die graphische Darstellung der Funktion

$$y = a \sin x,$$

in welcher a als positiv angenommen werden soll, bekommt man dadurch, daß man in Fig. 24 alle Ordinaten a mal größer macht. Die Figur wird dadurch in der Richtung OY einseitig gedehnt oder zusammengedrückt.

Will man die Funktion

$$y = \sin 2x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

darstellen, so muß man beachten, daß diese verschwindet für die folgenden Werte von x:

$$0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi \text{ usw.},$$

denn für diese Werte hat der doppelte Winkel diejenigen Werte, für welche der Sinus gleich Null ist.

Die Linie, deren Gleichung (7) ist, schneidet also die x-Achse in einer Anzahl von Punkten, deren gegenseitige Entfernungen halb so groß sind als die Entfernungen OC usw. in Fig. 24. Die Linie entsteht aus der durch Fig. 24 dargestellten Linie durch einseitige Zusammendrückung in der Richtung von OX.

Dasselbe gilt von der Linie, welche die Funktion

$$y = \sin kx$$

darstellt, wenn die Konstante k größer als 1 ist. Ist diese kleiner als 1, so muß eine einseitige Dehnung der Fig. 24 vorgenommen werden. Die Funktion $\sin \frac{1}{3}x$ z. B. verschwindet für $x = 0,\ 3\pi,\ 6\pi$ usw.

Es ist nun leicht einzusehen, wie die Funktion

$$y = a \sin kx$$

dargestellt wird.

Hat man es endlich mit der Funktion

$$y = a \sin (kx + p) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

zu tun, in der p eine konstante Größe ist, so muß man beachten, daß y verschwindet für

$$kx + p = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \text{ usw.},$$

also für

$$x = -\frac{p}{k},\ -\frac{p}{k} + \frac{\pi}{k},\ -\frac{p}{k} + 2\frac{\pi}{k},\ -\frac{p}{k} + 3\frac{\pi}{k} \text{ usw.} \quad (9)$$

Die Durchschnittspunkte mit der x-Achse liegen also in Abständen $= \pi/k$ voneinander, und einer der Punkte, in denen y, wenn x größer wird, von negativen zu positiven Werten übergeht, hat die Abszisse $-p/k$. Die größten Abweichungen von der x-Achse sind $+a$ und $-a$. Um die graphische Darstellung von (8) zu bekommen, muß man also die Linie

von Fig. 24 zuerst in der Richtung von OY einseitig dehnen oder zusammendrücken, um den Strecken Ff, Gg usw. den Wert a zu geben, und dann durch eine ähnliche Operation in der Richtung der x-Achse die Durchschnittspunkte mit dieser Achse auf die gegenseitige Entfernung π/k bringen. Endlich muß durch eine Verschiebung längs der x-Achse einer der

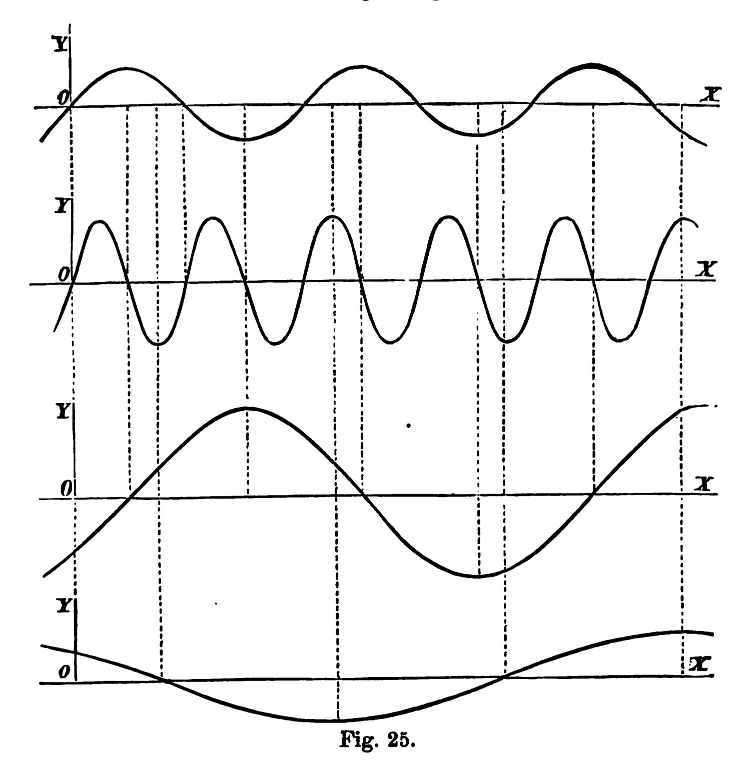


Fig. 25.

Durchschnittspunkte, in denen die Linie nach rechts steigt, in die Entfernung $-p/k$ vom Ursprung gebracht werden.

Der Cosinus wird durch eine ebensolche Linie dargestellt wie der Sinus. Man hat nämlich $\cos\varphi = \sin(\varphi + \pi/2)$ und man kann für die Funktion

$$y = a\cos(kx + q),$$

wobei q konstant ist, schreiben

$$y = a\sin(kx + q + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Bezeichnet man nun $q + \frac{1}{2}\pi$ durch p, so kommt man auf den Fall der Funktion (8) zurück.

Zur Erläuterung des Gesagten mag Fig. 25 dienen. Die darin vorkommenden krummen Linien haben als Gleichungen

$$y = \sin x,$$
$$y = 1{,}5 \sin 2x,$$
$$y = 2 \sin\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\pi\right),$$
$$y = \cos\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

Die Darstellung einer periodischen Funktion, die weniger einfach ist als die oben besprochenen, gibt die Linie L_3 in Fig. 26. Jedesmal wenn die Abszisse um einen gewissen Be-

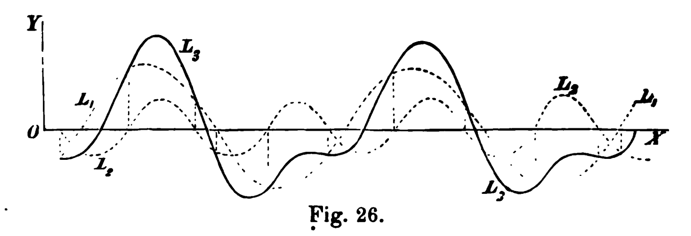


Fig. 26.

trag (die Periode) zunimmt, kehrt dieselbe Ordinate zurück; die krumme Linie besteht also wieder aus einer Anzahl aufeinander folgender gleicher Teile, aber diese haben eine weniger einfache Gestalt als in Fig. 24 und 25.

Die Linien, welche periodische Funktionen darstellen, heißen *Wellenlinien*. Die in Fig. 24 und 25 dargestellten werden ***einfache*** *Wellenlinien* oder *Sinusoiden* genannt.

§ 22. **Figuren im Raum. Projektionen. Koordinaten.** Körper oder Figuren im Raum können durch eine perspektivische Zeichnung abgebildet werden. In vielen Fällen verdient jedoch das Zeichnen einer *Projektion* den Vorzug.

Die Ebene, auf welche man projiziert, wird oft horizontal gewählt; man spricht dann von der *Horizontalprojektion*. Diese gibt die Figur im Raum so wieder, wie sie sich einem Beobachter darstellt, der sich in großer Entfernung über derselben befindet.

Für die Bestimmung der Lage der Figur ist natürlich die Projektion nicht hinreichend; man muß außerdem angeben, wie hoch jeder Punkt über der Projektionsebene liegt.

Dies kann dadurch geschehen, daß man neben die Projektion eines jeden Punktes eine Zahl schreibt, welche diese Höhe angibt. Ein anderes Mittel benutzt man in der darstellenden Geometrie; es besteht darin, daß man eine zweite Projektion zeichnet, und zwar auf eine Ebene, die auf der zuerst gewählten Projektionsebene senkrecht steht.

Man kann ferner die Lage von Punkten im Raum durch ihre *Koordinaten* bestimmen.

In Fig. 27 sind OX, OY, OZ drei feste aufeinander senkrecht stehende Linien; aus einem beliebigen Punkt P sind die Senkrechten PA, PB, PC auf die Ebenen YOZ, ZOX, XOY gefällt. Durch die Länge dieser Senkrechten ist die Lage von P bestimmt, wenigstens wenn man außerdem weiß, auf welcher Seite der genannten Ebenen sich der Punkt befindet, also in welcher der acht von den Ebenen gebildeten dreiflächigen Ecken er liegt.

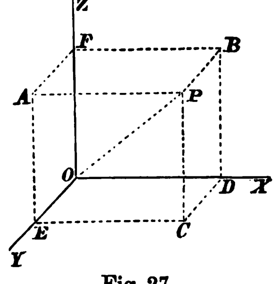


Fig. 27.

Die festen Linien heißen die *Koordinatenachsen*, die Ebenen YOZ, ZOX, XOY die *Koordinatenebenen*, die Abstände PA, PB, PC die *Koordinaten* des Punktes.

Wenn man ein rechtwinkliges Parallelepiped konstruiert, von dem O und P zwei gegenüberliegende Ecken sind und von dem drei Kanten den Koordinatenachsen entlang fallen, so kann man als Koordinaten von P anstatt der Senkrechten PA, PB, PC auch die Kanten des Parallelepipeds nehmen, die in O zusammenkommen. Bei jeder Kante kann durch das Vorzeichen angegeben werden, in welcher Richtung, von O aus, sie läuft.

Zwischen den Koordinaten eines Punktes und der Entfernung desselben vom Ursprung besteht die folgende einfache Beziehung:

$$OP^2 = OD^2 + OE^2 + OF^2.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Bestimmung des Ortes eines Punktes durch seine Koordinaten im Grunde genommen auf dasselbe hinauskommt wie die Methode der Projektionen.

Die beiden Koordinaten OD und OE bestimmen nämlich in der gewöhnlichen Weise die Lage von C in der Ebene XOY, d. h. sie bestimmen die Projektion von P auf diese Ebene. Die dritte Koordinate gibt dann weiter die Entfernung des Punktes P von der Ebene an.

§ 23. **Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen. Graphische Darstellung durch eine Fläche.** In einer festen Ebene, die wir uns in horizontaler Lage denken, nehmen wir die Koordinatenachsen OX und OY (Fig. 28); über dieser Ebene denken wir uns eine beliebige gekrümmte Fläche. Die Länge der Senkrechten, die man in dem einen oder anderen Punkt P errichten kann, bis an den Durchschnittspunkt mit der Fläche gerechnet, ist dann eine Größe, die von zwei unabhängigen Veränderlichen abhängt. Die Länge der Senkrechten ist nämlich bestimmt, sobald man die beiden Koordinaten von P in der Ebene XOY kennt, aber diese Koordinaten können unabhängig voneinander verschiedene Werte annehmen. Hat man z. B. die Abszisse gewählt, so sind noch verschiedene Werte für die Ordinate und also verschiedene Punkte, wie P, P', P'', möglich und in jedem dieser Punkte hat die genannte Senkrechte eine andere Länge. Ebenso ändert sich die Länge der Senkrechten beim Übergang von P zu P_1 und P_2, d. h. wenn sich die Abszisse ändert, während die Ordinate dieselbe bleibt.

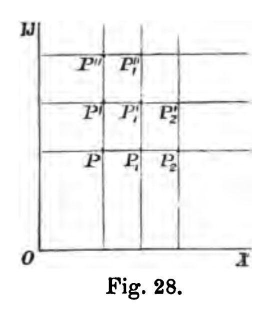


Fig. 28.

Jeder algebraische oder goniometrische Ausdruck, in welchem zwei Veränderliche vorkommen, z. B. $2x^2 + 3xy + 4y^2$, $\sin(x + y)$, hängt sowohl vom Werte der einen als auch vom Werte der anderen Veränderlichen ab.

Auch in physikalischen Problemen kommen derartige Fälle vor. Das Volum einer Gasmenge hängt von der Temperatur des Gases und vom Druck ab, unter dem es sich befindet. Hat man das Volum bei einer Anzahl von Temperaturen und Drucken gemessen, so kann man die Ergebnisse in einer *Tabelle mit doppeltem Eingang* vereinigen, in der z. B. nebeneinander die Werte des Volums stehen, die zu demselben Druck aber

zu verschiedenen Temperaturen gehören, dagegen untereinander die Werte, welche das Volum unter verschiedenen Drucken bei derselben Temperatur hat.

Das Ergebnis jeder Messung kann durch die Lage eines Punktes im Raume angegeben werden. Man stellt zu diesem Zwecke in der in § 9 angegebenen Weise die Temperatur, den Druck und das Volum durch Linien dar und wählt einen Punkt so, daß seine drei Koordinaten die Temperatur, den Druck und das Volum angeben, die bei einer Beobachtung vorgekommen sind. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, man sucht in einer Ebene (Fig. 28) einen Punkt P, dessen Abszisse und Ordinate der Temperatur und dem Druck proportional sind, die bei einer Messung bestanden, und errichtet dann in P eine Senkrechte auf die Ebene; durch die Länge dieser Linie stellt man das beobachtete Volum dar. Der Endpunkt der Senkrechten ist dann der gesuchte Punkt.

Ebenso wie wir nun in § 9 durch die Punkte, die die Ergebnisse der einzelnen Beobachtungen darstellten, eine krumme Linie zogen, können wir jetzt durch die gefundenen Punkte eine Fläche legen. Diese Fläche, welche in der Regel gekrümmt sein wird, läßt uns sofort erkennen, welchen Wert die eine veränderliche Größe hat, wenn die Werte der beiden anderen gegeben sind.

Da man jedoch eine Fläche in Wirklichkeit schwer konstruieren kann, so ist dies Verfahren nur von beschränktem Nutzen. Oft befolgt man eine andere Methode, die in dem oben angeführten Beispiel darin besteht, daß man eine Anzahl krummer Linien konstruiert deren jede für eine bestimmte Temperatur den Zusammenhang zwischen dem Druck und dem Volum angibt.

§ 24. **Besondere Flächen.** Es ist wünschenswert, mit noch einigen anderen Flächen als den in der niederen Mathematik behandelten bekannt zu sein.

Eine *Zylinderfläche* wird durch die Bewegung einer geraden Linie beschrieben, die immer dieselbe Richtung behält und einer gegebenen krummen Linie entlang gleitet. Diese letztere heißt die *Direktrix*, die gerade Linie die *erzeugende Linie*. Wenn die Leitlinie geschlossen ist, so wird die Zylinderfläche röhrenförmig.

Der Körper, welcher durch eine solche Zylinderfläche und zwei einander parallele Ebenen begrenzt wird, ist ein *Zylinder*. Der Rotationszylinder ist davon ein besonderer Fall.

Der Inhalt eines Zylinders wird gefunden, indem man die Größe des Teiles, welcher durch die Zylinderfläche aus einer der erwähnten Ebenen ausgeschnitten wird (*Grundfläche*), mit dem Abstand der beiden Ebenen (*Höhe*) multipliziert.

Eine *Kegelfläche* wird durch eine gerade Linie beschrieben, die immer durch einen festen Punkt (*Spitze*) geht und dabei einer gegebenen krummen Linie (*Leitlinie*) entlang gleitet. Ist die letztere geschlossen, so kann die Kegelfläche zusammen mit einer Ebene einen Körper begrenzen, der als *Kegel* bezeichnet wird. Der Rotationskegel ist davon ein besonderer Fall.

Der Inhalt eines Kegels wird gefunden, indem man die Größe des Teiles, welcher von der Kegelfläche aus der genannten Ebene ausgeschnitten wird (*Grundfläche*) mit dem dritten Teil der von der Spitze auf die Grundfläche gefällten Senkrechten (*Höhe*) multipliziert.

Wichtige Flächen entstehen durch die Rotation eines Kegelschnittes um eine Symmetrieachse. Läßt man eine Ellipse um die große oder die kleine Achse rotieren, so erhält man *Rotationsellipsoide* von verschiedener Gestalt.

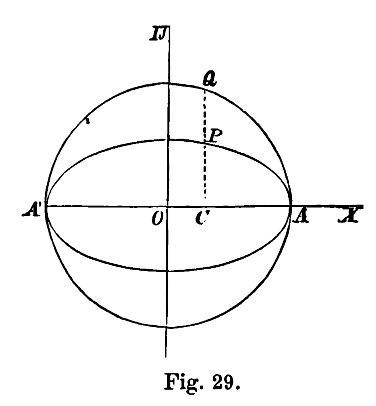


Fig. 29.

Wenn die krummen Linien von Fig. 29 (dieselbe Figur wie 16) um OY rotieren, so entstehen eine Kugel und ein Rotationsellipsoid, welche die durch OA beschriebene Ebene als gemeinschaftlichen *Äquator* haben. Die beiden Punkte, in denen diese Flächen durch eine Linie parallel zu OY geschnitten werden, liegen, wie leicht einzusehen ist, in Abständen von der Äquatorfläche, die in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen.

Eine Figur im Raum kann eine einseitige Dehnung oder Zusammendrückung erleiden, die der Formänderung von

ebenen Figuren entspricht, die wir in § 16 besprochen haben. Um eine solche Dehnung oder Zusammendrückung in einer vorgeschriebenen Richtung eintreten zu lassen, nimmt man eine Ebene senkrecht zu dieser Richtung an und läßt jeden Punkt der Figur sich auf einer Senkrechten auf die Ebene von dieser entfernen oder ihr nähern, und zwar so, daß zwischen der ursprünglichen und der neuen Entfernung des Punktes von der Ebene ein Verhältnis besteht, welches für alle Punkte der Figur dasselbe ist. Dabei bleiben alle Linien, die der Ebene parallel laufen, an Länge unverändert.

Nicht nur, wie sich durch Betrachtung von Fig. 29 ergab, durch eine einseitige Zusammendrückung, sondern auch durch eine einseitige Dehnung entsteht aus einer Kugel ein Rotationsellipsoid. Eine etwas weniger einfache Fläche bekommt man, wenn eine Kugel in drei aufeinander senkrechten Richtungen Dehnungen oder Zusammendrückungen der besprochenen Art erleidet, oder auch, wenn solche Formveränderungen in zwei von diesen Richtungen in ungleichem Grade vorgenommen werden. Die Flächen, welche auf diese Weise entstehen, haben, ebenso wie die oben betrachteten Rotationsflächen, die Eigenschaft, daß sie von einer Ebene nach einer Ellipse — die bei einigen Lagen der Ebene in einen Kreis übergeht — geschnitten werden. Sie werden deshalb *Ellipsoide* genannt. Der Mittelpunkt der Kugel hat, falls er bei der Veränderung der Figur an seiner Stelle geblieben ist, auch in bezug auf die neue Fläche die Eigenschaft, daß er alle Sehnen, die man durch ihn ziehen kann, halbiert. Er heißt daher der *Mittelpunkt* des Ellipsoids.

Unter allen durch diesen Punkt gehenden Linien (*Durchmesser*) spielen diejenigen, welche in den Richtungen laufen, in welchen die Dehnungen oder Zusammendrückungen stattfanden, eine besondere Rolle. Sie werden die *Achsen* des Ellipsoids genannt. Eine Ebene, welche durch zwei dieser Achsen gelegt wird, ist eine *Symmetrieebene*, d. h. sie teilt jede Sehne, die auf ihr senkrecht steht, in zwei gleiche Teile.

Sind zwei der erwähnten Dehnungen oder Zusammendrückungen einander gleich, dann sind auch zwei Achsen des Ellipsoids gleich lang; die Fläche wird dann ein Rotationsellipsoid. Im Gegensatz dazu kann man ein Ellipsoid, in

welchem alle drei Achsen voneinander verschieden sind, ein *dreiachsiges* nennen.

§ 25. **Linien auf gekrümmten Flächen. Schraubenlinie.** Die krummen Linien, welche entstehen, wenn eine gekrümmte Fläche von einer Ebene geschnitten wird, wurden bereits mehrmals erwähnt. Diese *Durchschnitte* werden oft gebraucht, um eine Vorstellung von der Gestalt der Fläche zu geben; besonders geeignet für diesen Zweck ist eine Reihe von Durchschnitten mit einer Anzahl einander paralleler Ebenen.

Auf einer gekrümmten Fläche können auch Linien gezogen werden, die nicht in einer Ebene liegen. Ein Beispiel davon ist die *Schraubenlinie,* die auf der gekrümmten Fläche eines Rotationszylinders konstruiert werden kann.

Auf der Zylinderfläche bewege sich eine erzeugende Linie so, daß sie (Fig. 30) nacheinander die Stellungen AP, BQ, CR einnimmt (die Figur stellt eine Projektion auf eine durch die Achse des Zylinders gehende Ebene dar) und jeder Punkt der Linie einen Kreis beschreibt. Zu gleicher Zeit verschiebe sich ein beweglicher Punkt so längs der erzeugenden Linie, daß seine Bewegung mit der der erzeugenden Linie gleichen Schritt hält, d. h. daß er in Zeiten, in denen die Linie gleiche Wege durchläuft, ebenfalls um gleiche Strecken fortschreitet. Der Punkt beschreibt dann eine Schraubenlinie. Sind in Fig. 30 AP, BQ, CR drei erzeugende Linien in gleichen Entfernungen voneinander und ist ABC eine Ebene senkrecht zur Achse und PQR die Schraubenlinie, dann muß $BQ - AP = CR - BQ$ sein.

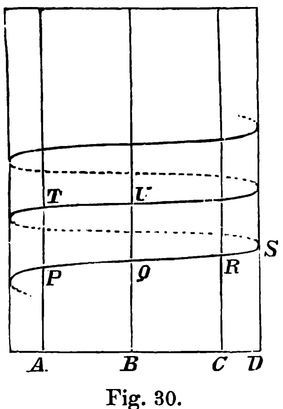


Fig. 30.

Da die Bewegung der erzeugenden Linie und die Bewegung des Punktes auf dieser Linie unbegrenzt fortgesetzt werden können, so besteht die Schraubenlinie aus einer Aufeinanderfolge von gleichen *Windungen* um den Zylinder. Zwei aufeinander folgende Windungen schneiden von verschiedenen erzeugenden Linien gleiche Stücke PT, QU usw. ab. Die Länge derselben heißt die *Ganghöhe* der Schraubenlinie.

Krumme Linien, die, wie die Schraubenlinie, nicht in einer Ebene liegen, werden *Linien von doppelter Krümmung* genannt.

§ 26. **Berührungsebene. Normale. Krümmung von gebogenen Flächen.** Man stelle sich vor, durch einen Punkt P einer gekrümmten Fläche sei eine Anzahl von krummen Linien gezogen, die alle auf der Fläche liegen; bei jeder Linie stellen wir uns die Tangente im Punkt P vor. Diese Tangenten liegen mit Ausnahme einzelner besonderer Fälle (Spitze eines Kegels) alle in einer Ebene, welche die *Berührungsebene* an die Fläche im Punkt P genannt wird. Die Linie, welche in P senkrecht auf die Berührungsebene gezogen wird, heißt die *Normale.*

Eine Zylinderfläche und eine Kegelfläche werden von einer Ebene nicht in einem einzelnen Punkt, sondern in allen Punkten einer erzeugenden Linie berührt. In allen diesen Punkten hat die Normale dieselbe Richtung.

Bei einer Rotationsfläche steht die Berührungsebene in einem Punkt P senkrecht auf der Ebene, die durch diesen Punkt und die Achse geht (*Meridianebene*). Die Normale in P liegt also in der zuletzt genannten Ebene und schneidet im allgemeinen die Achse. Der Punkt, in welchem sie dies tut, bleibt derselbe, wenn man P auf einem *Parallelkreis* verschiebt, d. h. auf einem Kreis, welcher entsteht, wenn die Fläche von einer auf der Achse senkrecht stehenden Ebene geschnitten wird.

Um die Krümmung einer gebogenen Fläche in einem bestimmten Punkt P zu beurteilen, ziehen wir durch diesen Punkt die Normale und legen durch diese Linie eine Anzahl von Ebenen. Sodann untersuchen wir, wie stark die Linien, in denen die Ebenen die Fläche schneiden, die sogenannten *Normalschnitte*, in P gekrümmt sind.

Nur bei der Kugel ist die Krümmung aller durch einen beliebigen Punkt gelegten Normalschnitte gleich groß, bei anderen Flächen ist in der Regel der eine Schnitt stärker gekrümmt als der andere. Man kann beweisen, dass die Ebenen der beiden Schnitte, die am stärksten und am schwächsten gekrümmt sind, aufeinander senkrecht stehen. Die Krümmungsradien dieser beiden Schnitte werden die *Hauptkrümmungsradien* der Fläche in dem betreffenden Punkt genannt.

Bei einer Zylinderfläche und einer Kegelfläche ist die

kleinste Krümmung gleich Null; einer der beiden Normalschnitte fällt nämlich mit einer erzeugenden Linie zusammen.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß man bei vielen Flächen, wenn man sie aus einer gewissen Entfernung, von einem Punkt einer Normalen aus betrachtet, von allen Normalschnitten im Fußpunkt der Normale die konvexe Seite oder von allen die konkave Seite sich zugekehrt erblickt. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Wenn man z. B. einen Sattel von oben betrachtet, so sieht man bei einigen Normalschnitten gegen die konvexe, bei anderen gegen die konkave Seite. Etwas Ähnliches kommt bei der Fläche vor, die durch die Rotation der Hyperbel von Fig. 19 um die Linie OY entsteht.

§ 27. **Zusammensetzung von Vektoren.** Während einige Größen, die in der Physik zur Sprache kommen, vollkommen bestimmt sind, sobald man ihre *Größe* kennt, muß bei anderen nicht nur die Größe, sondern auch die *Richtung* angegeben werden. Geschwindigkeiten und Kräfte sind Größen dieser Art; wir wollen sie im allgemeinen *Vektoren* nennen. Ein Vektor kann immer durch eine gerade Linie dargestellt werden, welcher die Richtung des Vektors hat und deren Länge in der in § 9 angegebenen Weise die Größe des Vektors angibt. Eine solche Linie kann auch selbst ein Vektor genannt werden, und man hat denn auch oft, wenn man von einem Vektor spricht, die Linie, welche ihn darstellt, im Auge.

Wenn man einen Vektor nennt, so nennt man zuerst denjenigen Punkt, von welchem aus er gezogen wird; es ist also nicht einerlei, ob man von dem Vektor AB oder von dem Vektor BA spricht.

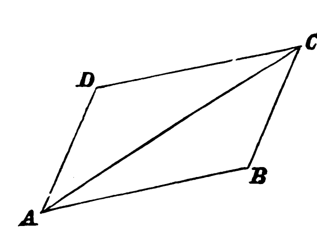


Fig. 31.

Solange die Richtung und die Größe eines Vektors unverändert bleiben, wenn er auch von einem anderen Anfangspunkt aus gezogen wird, wollen wir sagen, daß der Vektor sich selbst gleich bleibt. Wenn in Fig. 31 $ABCD$ ein Parallelogramm ist, so werden also die Vektoren AD und BC gleich genannt.

Unter dem *Zusammensetzen* zweier Vektoren versteht man, daß der zweite BC mit seinem Anfangspunkt in den Endpunkt

des ersten AB gesetzt wird und daß dann der Anfangspunkt A des ersten mit dem Endpunkt C des zweiten durch eine gerade Linie AC verbunden wird. Diese letztere ist der Vektor, den man „durch das Zusammensetzen der beiden gegebenen Vektoren" bekommt; sie heißt die *Resultante* von AB und BC. Dagegen heißen AB und BC die *Komponenten* von AC.

Zieht man von A die Linie AD parallel und gleich BC, so entsteht, wenn man D mit C verbindet, ein Parallelogramm. Man kann daher auch sagen: Um zwei Vektoren zusammenzusetzen, läßt man ihre Anfangspunkte zusammenfallen, beschreibt über den Vektoren als Seiten ein Parallelogramm und zieht in diesem die Diagonale vom Anfangspunkt der Vektoren aus.

Die Figur, welche man so erhält, heißt das *Parallelogramm der Vektoren.* Wenn die Größe der beiden Vektoren und der Winkel, den sie miteinander bilden, gegeben sind, so kann man den resultierenden Vektor und die Winkel, die er mit den Komponenten bildet, durch eine einfache trigonometrische Berechnung finden.

Aus der für das Zusammensetzen gegebenen Regel folgt noch, daß die Resultante zweier Vektoren von derselben Richtung ebenfalls diese Richtung hat und gleich der Summe der beiden Komponenten ist.

Dagegen ist die Resultante zweier Vektoren, die entgegengesetzte Richtung haben, gleich ihrer Differenz; die Richtung der Resultante stimmt in diesem Fall mit der Richtung der größeren der beiden Komponenten überein. Sind die entgegengesetzten Vektoren gleich, so ist die Resultante gleich Null.

Wenn man bei Vektoren, die derselben geraden Linie parallel sind, durch die Zeichen + und — unterscheidet, ob sie nach der einen oder der anderen Seite gerichtet sind, so kann man sagen, daß die Resultante zweier derartiger Vektoren gleich ihrer algebraischen Summe ist.

Das *Zerlegen* eines Vektors ist das Entgegengesetzte vom Zusammensetzen; man versteht darunter nämlich das Aufsuchen von zwei Vektoren, die miteinander zusammengesetzt den gegebenen Vektor liefern. Es ist leicht einzusehen, daß ein Vektor in der verschiedenartigsten Weise in zwei andere zerlegt werden kann. Man kann die Richtungen der beiden Komponenten willkürlich wählen oder auch für die eine Kom-

ponente sowohl die Richtung als auch die Größe angeben. Durch die Konstruktion des Parallelogramms wird im ersten Fall die Größe jeder Komponente, im zweiten Fall die Richtung und die Größe der zweiten Komponente bestimmt.

§ 28. Nimmt man auf den Seiten des Parallelogramms $ABCD$ (Fig. 32) die Stücke Ab und Ad so an, daß

$$\frac{Ab}{AB} = \frac{Ad}{AD}$$

ist, und beschreibt man über diesen Stücken als Seiten ein Parallelogramm $Abcd$, so fällt der Eckpunkt c desselben auf die Diagonale AC, und dabei ist

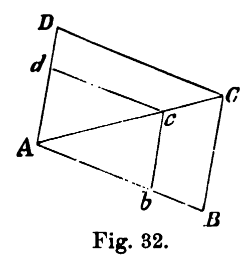


Fig. 32.

$$\frac{Ac}{AC} = \frac{Ab}{AB}.$$

Wird daher von zwei Vektoren, die man zusammensetzt, die Größe in demselben Verhältnis verändert, während die Richtung unverändert bleibt, so behält auch der resultierende Vektor dieselbe Richtung und seine Größe ändert sich in demselben Verhältnis wie die der Komponenten.

§ 29. **Zusammensetzung von mehr als zwei Vektoren.** Unter dem Zusammensetzen einer beliebigen Anzahl von Vektoren versteht man die folgende Operation. Der zweite Vektor wird mit seinem Anfangspunkt in den Endpunkt des ersten gesetzt, der dritte sodann mit seinem Anfangspunkt in den Endpunkt des zweiten, usw. Endlich wird der Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkt des letzten verbunden.

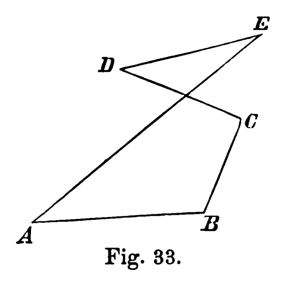


Fig. 33.

In Fig. 33 ist AE die Resultante der Vektoren AB, BC, CD, DE. Diese Figur braucht nicht in einer Ebene zu liegen.

Man kann die Regel für das Zusammensetzen auch so ausdrücken: Nachdem der zweite Vektor mit dem ersten zusammengesetzt ist, wird die Resultante AC (in der Figur nicht gezogen) mit dem dritten Vektor CD zusammengesetzt; die

Resultante AD, welche man dann bekommt, wird mit dem vierten Vektor zusammengesetzt, usw.

Wenn alle Vektoren, die man zusammensetzen muß, mit ihren Anfangspunkten in demselben Punkt lägen, so würde für jeden Schritt in dieser Konstruktion ein neues Vektorenparallelogramm dienen.

Wenn eine beliebige Anzahl von Vektoren derselben geraden Linie parallel sind, so ist die Resultante gleich der algebraischen Summe der Komponenten.

Bei dem Zusammensetzen mehrerer Vektoren ist das Resultat unabhängig von der Reihenfolge, in welcher sie miteinander vereinigt werden. In Fig. 34 z. B., die ebenfalls nicht in einer Ebene zu liegen braucht, bekommt man AD, wenn man zuerst AB mit dem zweiten Vektor BE und dann die Resultante mit dem dritten Vektor ED zusammensetzt. Beschreibt man nun über BE und ED als Seiten ein Parallelogramm, so ist BC gleich dem dritten Vektor ED, und CD gleich dem zweiten BE. Hieraus ergibt sich, daß man AD auch bekommt, wenn man AB zuerst mit dem dritten Vektor zusammensetzt und dann die Resultante AC mit dem zweiten.

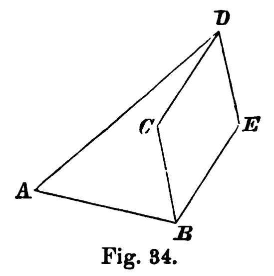


Fig. 34.

Haben drei Vektoren OD, OE und OF (Fig. 27), die nicht in einer Ebene liegen, denselben Anfangspunkt, so ist ihre Resultante die Diagonale OP des Parallelepipeds, das auf OD, OE und OF als Kanten beschrieben werden kann. Umgekehrt muß man, um einen gegebenen Vektor in drei andere von gegebenen Richtungen zu zerlegen, ein Parallepiped konstruieren, in welchem er die Diagonale ist und dessen Kanten die gegebenen Richtungen haben.

In dieser Weise führt man oft die Betrachtung von Vektoren im Raum auf die ihrer Komponenten in drei bestimmten Richtungen zurück, wobei man die letzteren in der Regel senkrecht zueinander wählt.

§ 30. **Zusammenhang zwischen den Projektionen von Vektoren und der Projektion ihrer Resultante.** Die Projektion eines Vektors auf eine gerade Linie kann auch selbst als ein Vektor aufgefaßt werden, und zwar als ein Vektor, dessen An-

fangspunkt die Projektion des Anfangspunktes des gegebenen Vektors ist. In Fig. 35 z. B. ist Ad die Projektion von AD auf AX, aber die Projektion von DA würde dA sein.

In Fig. 35 und 36 ist AC die Resultante der Vektoren AB und AD, und AX eine gerade Linie, auf welche die Punkte B, C und D projiziert werden. Diese gerade Linie

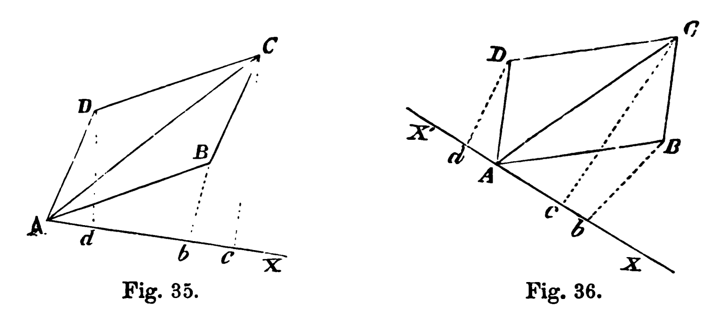


Fig. 35. Fig. 36.

braucht nicht in der Ebene $ABCD$ zu liegen und die Senkrechten Bb, Cc und Dd brauchen also nicht einander parallel zu sein.

Man sieht ohne weiteres ein, das Ac die Resultante, also die algebraische Summe von Ab und bc ist, ebenso daß bc durch Ad ersetzt werden kann. Also ist Ac die algebraische Summe von Ab und Ad, mit anderen Worten, die Projektion der Diagonale AC des Parallelogramms ist die algebraische Summe der Projektionen der Seiten AB und AD.

§ 31. **Berechnungen mit kleinen Größen.** In physikalischen Problemen kommen oft Größen vor, die so klein sind, daß man die Potenzen derselben bei hinreichend großen Exponenten vernachlässigen kann. Welche Potenzen hierfür klein genug sind, hängt natürlich von dem Grade der Genauigkeit ab, den man zu erreichen wünscht; so kann vorkommen, daß man bereits die zweite Potenz einer kleinen Größe vernachlässigen kann, aber auch, daß man diese noch bei den Berechnungen beibehalten muß und erst Glieder mit der dritten Potenz weglassen kann.

Verschiedene Ausdrücke, in denen eine kleine Größe δ vorkommt, können in Reihen entwickelt werden, die nach steigenden Potenzen von δ fortschreiten. Formen wie $(1+\delta)^2$, $(1+\delta)^3$ geben dabei Reihen mit einer endlichen Anzahl von

Gliedern; in anderen Fällen bekommt man unendliche Reihen von der Form

$$a + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3 + \text{usw.}, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

wobei die Werte der Koeffizienten $a, b, c, d, \ldots$ nach dieser oder jener Regel bestimmt werden.

Bei jeder unendlichen Reihe kann man die Summe einer gewissen Anzahl von Gliedern nehmen und untersuchen, wie sich diese Summe ändert, wenn jene Anzahl immer größer gewählt wird. Dabei können zwei Fälle eintreten. Entweder existiert eine bestimmte Zahl, welcher man, wenn man nur Glieder genug nimmt, die Summe so nahe bringen kann wie man will; oder eine solche Zahl existiert nicht. Im ersteren Fall sagt man, die Reihe *konvergiere* und habe die betreffende Zahl zur *Summe*; im zweiten Fall *divergiert* die Reihe und kann nicht dazu dienen, eine bestimmte endliche Größe darzustellen.

Die Reihe

$$1 + 2 + 3 + 4 + \text{usw.}$$

ist ein Beispiel einer divergierenden Reihe; die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \text{usw.}$$

dagegen konvergiert und hat als Summe 2.

Eine Reihe kann nur dann konvergieren, wenn die Glieder, sei es vom ersten oder von einem späteren Glied an immer kleiner werden. Allein nicht jede Reihe, deren Glieder abnehmen, ist konvergierend; damit dies der Fall ist, muß das Abnehmen *schnell genug* gehen. Bei einer Reihe von der Form (10) ist dies der Fall, sobald δ klein genug ist; ist diese Größe sehr klein, so kann die ganze Reihe durch die Summe der drei ersten, ja selbst durch die Summe der zwei ersten Glieder ersetzt werden.

Hier folgen einige Beispiele für die Entwickelung eines Ausdruckes, in welchem eine kleine Größe δ vorkommt.

$$\frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \text{usw.}$$

$$\frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \text{usw.}$$

$$\sqrt{1+\delta} = 1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{8}\delta^2 + \tfrac{1}{16}\delta^3 - \text{usw.}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-\delta)^2}} = 1 + \tfrac{2}{3}\delta + \tfrac{5}{9}\delta^2 + \tfrac{40}{81}\delta^3 + \text{usw.}$$

Diese Reihen, welche alle konvergieren, wenn $\delta < 1$ ist, kann man dadurch erhalten, daß man für die Ausdrücke, welche man entwickeln will, der Reihe nach $(1+\delta)^{-1}$, $(1-\delta)^{-1}$, $(1+\delta)^{1/2}$, $(1-\delta)^{-2/3}$ schreibt und dann den binomischen Lehrsatz von Newton anwendet. Die beiden ersten Formeln findet man auch durch Division.

Wenn δ sehr klein ist, so kann man die vier Ausdrücke schreiben $1-\delta$, $1+\delta$, $1+\frac{1}{2}\delta$, $1+\frac{2}{3}\delta$ und hat man allgemein

$$(1 \pm \delta)^n = 1 \pm n\,\delta.$$

Zuweilen kommen in einem Ausdruck zwei oder mehr Größen vor, die so klein sind, daß man die zweite und höhere Potenzen derselben und auch die Produkte aus je zweien vernachlässigen kann. Sind δ und δ' solche Größen, so findet man z. B.

$$(1+\delta)(1+\delta') = 1 + \delta + \delta'$$

und

$$\frac{1+\delta}{1+\delta'} = 1 + \delta - \delta'.$$

§ 32. Für den Sinus eines sehr kleinen Winkels kann, wie aus einer Figur leicht zu ersehen ist, die Zahl genommen werden, welche die Länge des in diesem Winkel vom Scheitelpunkt aus mit dem Radius 1 beschriebenen Bogens, also die Zahl, welche den Winkel selbst im Bogenmaß (§ 19) vorstellt. Die Tangente eines sehr kleinen Winkels kann gleich dem Sinus, der Cosinus gleich 1 gesetzt werden.

Auch hier kann durch den Gebrauch unendlicher Reihen eine größere Genauigkeit erreicht werden. Man hat bewiesen, daß für jeden Wert des Winkels δ, wenn dieser in Bogenmaß ausgedrückt ist,

$$\sin\delta = \delta - \frac{\delta^3}{1.\,2.\,3} + \frac{\delta^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \frac{\delta^7}{1.\,2.\ldots 7} + \text{usw.}$$

und

$$\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{1.\,2} + \frac{\delta^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{\delta^6}{1.\,2.\ldots 6} + \text{usw.}$$

ist.

§ 33. **Absoluter und relativer Fehler.** Die Fehler, welche bei Messungen begangen werden, sind in der Regel so klein,

daß ihre zweiten Potenzen sowie die Produkte aus zweien derselben vernachlässigt werden können; hierdurch werden Berechnungen, welche sich auf diese Fehler beziehen, vereinfacht.

Den Wert einer Größe, den man aus direkter Messung oder aus einer Berechnung abgeleitet hat, für welche die Daten durch Messungen geliefert wurden, wollen wir den *gefundenen* Wert nennen. Der Unterschied zwischen diesem und dem *wirklichen* Wert der Größe ist der *absolute Fehler.* Unter dem *relativen* Fehler verstehen wir den Quotienten, welchen man erhält, wenn man den absoluten Fehler durch den gefundenen Wert dividiert; man kann diesen relativen Fehler auch dadurch angeben, daß man sagt, wieviel Prozent des gefundenen Wertes der absolute Fehler beträgt.

Der absolute Fehler wird auch kurzweg der Fehler genannt.

Wir wollen annehmen, daß die Größen selbst, um die es sich handelt, positiv sind. Dagegen können die Fehler positiv oder negativ sein. Wir wollen den Fehler positiv nennen, wenn der gefundene Wert größer ist als der wirkliche Wert; man erhält also den absoluten Fehler, wenn man den wirklichen Wert von dem gefundenen Wert abzieht. Der relative Fehler hat dasselbe Vorzeichen wie der absolute Fehler.

§ 34. **Fehler einer Größe, die von einer anderen abhängt.** Werden auf eine aus Messungen abgeleitete Größe a Rechenoperationen angewandt werden, so ist das Resultat derselben in einem Grade ungenau, der von dem Fehler in a selbst abhängt und, wenn dieser klein ist, in der Regel ihm proportional gesetzt werden kann. Der Fehler im Resultat wechselt dann zugleich mit dem Fehler in a das Vorzeichen. Die Rechenoperationen können von solcher Art sein, daß, wenn a zu groß ist, dasselbe von dem Resultat gilt, und dann wird dieses zu klein werden, wenn a zu klein ist. Es kann aber auch vorkommen, daß das Resultat in entgegengesetzter Richtung vom wirklichen Wert abweicht als die Größe a.

Wir wollen nun einige Regeln mitteilen, die in einfachen Fällen zur Bestimmung der Fehler dienen können. Dabei wollen wir mit a eine aus Messungen abgeleitete Größe und mit p eine genau bekannte Zahl bezeichnen. Die Regeln sind am einfachsten, wenn man bei Summen und Differenzen

nach dem absoluten, und bei Produkten und Quotienten nach dem relativen Fehler fragt.

Der absolute Fehler in $a + p$ oder $a - p$ ist ebenso groß wie der in a, während der Fehler in $p - a$ ebenfalls denselben Wert, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

In dem Produkt pa ist der relative Fehler ebenso groß wie der in a, während der absolute Fehler p mal so groß ist als in a.

Auch in p/a ist der relative Fehler ebenso groß wie der in a, aber die Fehler in diesem Bruch und in a selbst haben entgegengesetzte Vorzeichen. Ist nämlich δ der relative Fehler in a, so ist der wirkliche Wert $a(1 - \delta)$. Während der für den Quotienten gefundene Wert p/a ist, ist der wirkliche Wert

$$\frac{p}{a(1-\delta)} = \frac{p}{a}(1 + \delta).$$

Der absolute Fehler in dem Quotienten ist als $-p\delta/a$ und der relative Fehler, den man erhält, wenn man diese Größe durch p/a dividiert, ist $-\delta$.

In der Potenz a^p ist der relative Fehler p mal so groß als in a. Der gefundene Wert der Potenz ist nämlich a^p, der wirkliche Wert $a^p(1 - \delta)^p = a^p(1 - p\delta)$, und also der relative Fehler $p\delta$. Man ersieht hieraus, daß, wenn p einen großen Wert hat, der relative Fehler in der Potenz bedeutend größer wird als der in der Zahl a selbst.

Durch eine ähnliche Schlußfolgerung kann man beweisen, daß der relative Fehler in $\sqrt[p]{a}$ der $p$te Teil von dem in a selbst ist.

Ist in einem Winkel a, der in Bogenmaß ausgedrückt ist, ein Fehler α enthalten, so kann auch der Fehler in den goniometrischen Funktionen ziemlich leicht angegeben werden. Der gefundene Wert des Sinus z. B. ist $\sin a$, der wirkliche Wert $\sin(a - \alpha) = \cos\alpha \sin a - \sin\alpha \cos a$, wofür man schreiben darf $a - \alpha\cos a$. Der Fehler im Sinus ist also $\alpha\cos a$. Bei einem bestimmten Fehler im Winkel ist dieser Fehler im Sinus klein, wenn der Winkel in der Nähe von $\frac{1}{2}\pi$, und größer, wenn er in der Nähe von 0 liegt.

Natürlich kann man bei jeder Funktion den Fehler ermitteln, wenn man die Funktion sowohl für den gefundenen als für den wirklichen Wert der unabhängigen Veränderlichen, vorausgesetzt, daß man den letzteren Wert kennt, berechnet. Ist die Funktion für Werte der unabhängigen Veränderlichen, die mit kleinen einander gleichen Differenzen ansteigen,

in einer Tabelle gegeben, so kann man die Kolumne der Differenzen (§ 6) zu Rate ziehen. So sieht man in einer Logarithmentafel leicht, welcher Fehler im Logarithmus einem bestimmten Fehler in der Zahl entspricht.

§ 35. Fehler einer Größe, die von zwei anderen nicht genau bekannten Größen abhängt. Werden zwei aus Messungen abgeleitete Größen zueinander addiert, so ist der absolute Fehler im Resultat gleich der algebraischen Summe der Fehler in den beiden Größen. Ebenso ist der absolute Fehler in der Differenz zweier Zahlen gleich der Differenz der beiden Fehler.

Bei einem Produkt gilt eine ebenso einfache Regel für den relativen Fehler. Sind nämlich a und b die gefundenen Werte von zwei Größen, δ und ε die relativen Fehler, so sind die wirklichen Werte

$$a(1-\delta) \quad \text{und} \quad b(1-\varepsilon).$$

Das wirkliche Produkt ist

$$ab(1-\delta)(1-\varepsilon) = ab(1-\delta-\varepsilon),$$

und da der gefundene Wert ab ist, hat man für den relativen Fehler

$$\delta+\varepsilon;$$

dieser ist also gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren.

Dagegen ist der relative Fehler im Quotienten von a und b gleich der Differenz der relativen Fehler der Größen selbst.

Diese Sätze sind besondere Fälle eines allgemeineren Satzes.

Man denke sich eine Größe c, die in irgend einer Weise von a und b abhängt, also durch Berechnung aus a und b erhalten wird. Wäre dann b genau, aber hätte man in a einen gewissen Fehler α gemacht, dann würde auch in c ein dem Fehler α proportionaler Fehler von bestimmter Größe enthalten sein. Ebenso würde, wenn a fehlerfrei wäre, ein Fehler β in b sich in c bemerkbar machen. Die Fehler, welche in den beiden angenommenen Fällen in c enthalten sein würden, kann man die *partiellen* Fehler nennen. Der betreffende Satz, den der Leser für den Fall, daß $c = ab$ oder $c = a/b$ ist, leicht auf die Probe stellen kann, kommt nun darauf hinaus, daß, wenn gleichzeitig in a und b die Fehler α und β enthalten sind, der Fehler in c die algebraische Summe der partiellen Fehler ist, die den Fehlern α und β entsprechen.

Dieser Satz gilt sowohl, wenn man unter den totalen und partiellen Fehlern in c die relativen als wenn man darunter die absoluten Fehler versteht.

§ 36. **Möglicher Fehler.** Durch Betrachtungen wie die vorhergehenden würde man den Fehler in dem Resultat einer Berechnung bestimmen können, wenn die Fehler in den Daten nach Größe und Richtung bekannt wären. Die Größe des Fehlers in dem Resultat einer Messung kennt man aber in der Regel nicht, ja man weiß nicht einmal, ob das Resultat zu groß oder zu klein ist.

Wir wollen annehmen, daß die Messungen solcher Art sind, daß das Resultat ebensogut zu groß als zu klein sein kann; außerdem wollen wir annehmen, daß bei jeder Messung eine Zahl angegeben werden kann, oberhalb deren der Betrag des Fehlers sicher nicht liegt. Diese Zahl nennen wir den *größtmöglichen* oder kürzer den *möglichen* Fehler. Wir wollen dafür immer eine positive Zahl angeben. Ist a der gefundene Wert einer Größe und ist der mögliche Fehler α, so bedeutet dies, daß der wirkliche Wert sicher zwischen $a - \alpha$ und $a + \alpha$ liegt.

Man sieht nun leicht ein, daß in der Summe zweier Größen a und b der mögliche Fehler gleich der Summe der möglichen Fehler von a und b ist. Aber auch, und dies verdient besonders beachtet zu werden, in der Differenz von a und b ist der mögliche Fehler gleich der *Summe* der möglichen Fehler der beiden Zahlen. Sind nämlich α und β diese letzteren Fehler, so kann die eine Größe um α zu groß und die andere um β zu klein, oder die erste um α zu klein und die zweite um β zu groß sein. In beiden Fällen wird der Fehler in der Differenz $\alpha + \beta$.

Sind a und b nur wenig voneinander verschieden, so kann dieser Fehler $\alpha + \beta$ im Vergleich mit dem Wert von $a - b$ erheblich werden. Daher ist es schwierig, eine Größe mit einiger Genauigkeit durch Messung von zwei viel größeren, deren Differenz sie ist, zu ermitteln.

Beim Quotienten a/b ist eine ähnliche Schlußfolgerung wie bei der Differenz anwendbar. Der mögliche relative Fehler ist dabei, ebenso wie bei dem Produkt ab, gleich der *Summe* der möglichen relativen Fehler von a und b. Kann z. B. in a

ein Fehler von 1 % und in b ein Fehler von 2 % enthalten sein, so kann a/b bis zu einem Betrage von 3 % unrichtig sein.

Im allgemeinen findet man den möglichen Fehler in einer Größe c, die von a und b abhängt, indem man die partiellen Fehler in c berechnet, die den möglichen Fehlern von a und b entsprechen, und dann die partiellen Fehler, mit demselben Vorzeichen genommen, zueinander addiert. Es ist nämlich im ungünstigsten Falle möglich, daß die in a und b gemachten Fehler den größten Wert haben, der vorkommen kann, und zugleich eine solche Richtung, daß sie beide c zu groß oder beide c zu klein machen.

Dies alles gilt jedoch nur, wenn a und b durch Messungen erhalten werden, die voneinander unabhängig sind. Werden beide Größen aus derselben Untersuchung abgeleitet, so ist es möglich, daß, wenn a zu groß gefunden wird, auch b zu groß ausfallen muß, und dann ist natürlich der in $a - b$ mögliche Fehler kleiner als $\alpha + \beta$.

Endlich verdient noch bemerkt zu werden, daß, wenn die Größen a und b unabhängig voneinander sind, es zwar denkbar aber nicht wahrscheinlich ist, daß in beiden gleichzeitig der größte Fehler gemacht ist, der vorkommen kann. Es ist also nicht zu erwarten, daß der wirklich in der Größe c gemachte Fehler so groß ist als wir ihn berechneten. Durch Betrachtungen, auf die wir nicht näher eingehen können, kann man diesen Umstand in Rechnung bringen. Bei Untersuchungen einfacher Art bekommt man jedoch in der angegebenen Weise eine genügende Vorstellung von dem Grade der Genauigkeit, die den Resultaten zugeschrieben werden darf.

§ 37. **Beispiel.** Es sei

$$c = \frac{a}{a - b},$$

wobei a und b positiv sind und $a > b$ ist, und es sei zunächst die Zahl b richtig, während in a der Fehler α begangen ist, den wir nach Größe und Richtung als bekannt annehmen. Dann ist der Fehler im Nenner ebenfalls α; die relativen Fehler im Zähler und Nenner sind α/a und $\alpha/(a - b)$, also der relative Fehler im Bruch:

$$\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{a - b} = -\alpha \frac{b}{a(a - b)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Ist dagegen die Größe a genau bekannt, und ist β der nach Richtung und Größe gegebene Fehler von b, so ist der Fehler im Nenner $-\beta$, der relative Fehler des Nenners $-\beta/(a-b)$ und der relative Fehler des Bruches

$$+\frac{\beta}{a-b}. \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad (12)$$

Sind gleichzeitig in a und b die Fehler α und β gemacht, so ist der relative Fehler von c die algebraische Summe von (11) und (12), also

$$-\alpha\frac{b}{a(a-b)}+\frac{\beta}{a-b}.$$

Dagegen ist, wenn α und β die positiv genommenen *möglichen* Fehler von a und b sind, der mögliche relative Fehler von c

$$\alpha\frac{b}{a(a-b)}+\frac{\beta}{a-b}.$$

§ 38. **Grenzwerte.** Während in §§ 31 und 32 von Berechnungen durch Näherung die Rede war, wird noch in einer anderen Weise mit sehr kleinen Größen operiert, und zwar so, daß die Resultate vollkommen genau sind.

Um eine Vorstellung von dieser Methode zu geben, erinnern wir zunächst an das, was man einen *Grenzwert* nennt.

Man stelle sich eine Größe vor, die sich aus irgend einer Ursache verändert. Nähert sie sich dabei immer mehr einer konstanten Größe, so daß man sie derselben so nahe bringen kann als man will, dann wird die konstante Größe der Grenzwert der veränderlichen genannt.

Die Summe einer konvergierenden unendlichen Reihe (§ 31) ist der Grenzwert, welchem sich die Summe einer gewissen Anzahl von Gliedern nähert, wenn diese Anzahl fortwährend zunimmt. Ein anderes Beispiel bietet ein Bruch, dessen Zähler und Nenner für einen gewissen Wert einer veränderlichen Größe gleichzeitig Null werden. Dies ist z. B. bei dem Bruch

$$y=\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$$

für $x=2$ der Fall. Obwohl nun der Ausdruck $0/0$ jede beliebige Zahl bedeuten kann, so existiert doch ein bestimmter Grenzwert für y, wenn sich x fortwährend dem Wert 2 nähert. Für $x=2{,}5$, $2{,}4$, $2{,}3$, $2{,}2$, $2{,}1$ wird $y=0{,}636$, $0{,}630$, $0{,}623$, $0{,}615$, $0{,}608$. Der Grenzwert von y ist $0{,}6$; man findet diesen,

indem man beachtet, daß Zähler und Nenner des Bruches durch $x - 2$ dividiert werden können, eine Division, die gestattet ist, so klein $x - 2$ auch wird. Daher hat der Bruch, so wenig auch x von 2 verschieden ist, denselben Wert wie $x + 1/x + 3$, und er muß sich also dem Werte nähern, den dieser letztere Bruch für $x = 2$ annimmt.

Es verdient auch erwähnt zu werden, daß das Verhältnis

$$\frac{\sin x}{x},$$

wenn x in Bogenmaß ausgedrückt ist, sich bei fortwährendem Abnehmen von x dem Wert 1 nähert. Für jeden positiven Wert von $x < \frac{1}{2}\pi$ hat man nämlich, wie aus einer Figur hervorgeht,

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

also, wenn man in $\sin x$ dividiert,

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Da nun für $x = 0$, $\cos x = 1$ wird, muß $\sin x/x$ die Einheit als Grenzwert haben.

§ 39. **Verhältnis zweier unendlich kleiner Größen.** Die letzten Beispiele zeigen uns, daß das Verhältnis zweier Größen, die sich beide der Null nähern, einen bestimmten Grenzwert haben kann. Dies kann noch in folgender Weise erläutert werden. Wenn man in Fig. 12 (§ 12) vom Punkt P der krummen Linie zum Punkt Q übergeht, so erleiden die Koordinaten Zunahmen, die, wenn man PX' parallel zu OX zieht, durch PB und BQ vorgestellt werden und die wir Δx und Δy nennen wollen.[1] Dabei ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} QPB.$$

Nähert sich der Punkt Q dem Punkt P, so nehmen Δx und Δy ab, wobei aber in jedem Augenblick ein bestimmtes Verhältnis zwischen beiden besteht; ist z. B. $\Delta x = PB'$ geworden, so ist $\Delta y = B'Q'$ und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} Q'PB'.$$

Schreitet die Bewegung von Q nach P immer weiter fort, wobei die Sekante sich der Tangente PR und also der Winkel QPB dem Winkel RPX' nähert, so muß sich das Verhältnis

[1] Der Buchstabe Δ stellt hier keinen Faktor vor, sondern ist ein Zeichen für die Worte „Zunahme von“.

von Δy und Δx, während beide Größen immer kleiner werden, der Tangente des zuletzt genannten Winkels nähern. Bezeichnet man den Grenzwert, wie es gebräuchlich ist, mit „Lim“ (Abkürzung von „Limes“, Grenzwert), so kann man schreiben:

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} R P X'.$$

Dieses Resultat ist von Wichtigkeit, weil es uns in den Stand setzt, die Richtung der Berührungslinie zu bestimmen, sobald für jeden Punkt der krummen Linie y als Funktion von x gegeben ist. Man kann dann nämlich, nachdem man den Punkt P gewählt hat, für jeden Wert von Δx angeben, wie groß Δy und wie groß das Verhältnis $\Delta y / \Delta x$ ist, und es ist eine Sache mathematischer Berechnung, auch den Grenzwert, dem sich dieses Verhältnis nähert, zu finden.

Größen, die wie in diesem Beispiel Δx und Δy sich dem Wert Null nähern, werden *unendlich klein* genannt, und unter dem Verhältnis zweier unendlich kleiner Größen versteht man immer den Grenzwert, welchem sich das Verhältnis nähert. Unendlich kleine Zunahmen von veränderlichen Größen heißen auch die *Differentiale* dieser Größen und ihr Verhältnis nennt man den *Differentialquotienten.*

Man hat für diese vielfach benutzten Differentiale und ihre Verhältnisse eine abgekürzte Schreibweise eingeführt. Man ersetzt nämlich, um eine Zunahme zu bezeichnen, die man in Gedanken sich der Null nähern läßt, das Zeichen Δ durch d und läßt vor dem Verhältnis das Zeichen „Lim“ weg, da schon in dem Umstand, daß man es mit unendlich kleinen Größen zu tun hat, eingeschlossen ist, daß es sich um einen Grenzwert handelt. Der umständliche Ausdruck

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ für } \operatorname{Lim} \Delta x = 0$$

wird dann durch den einfacheren

$$\frac{dy}{dx}$$

ersetzt.

§ 40. **Bestimmung des Differentialquotienten.** Wir wollen für einige einfache Fälle den Differentialquotienten einer Funktion berechnen oder, wie man sagt, die Funktion *differenzieren.*

a) Zunächst betrachten wir die Funktion

$$y = x^2.$$

Hat die unabhängige Veränderliche erst einen bestimmten Wert x_1 und erleidet sie dann eine Zunahme δ, so ist y erst x_1^2 und dann $(x_1 + \delta)^2$. Die Zunahme von y ist also

$$\Delta y = (x_1 + \delta)^2 - x_1^2 = 2 x_1 \delta + \delta^2,$$

und da

$$\Delta x = \delta$$

ist, wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 x_1 + \delta.$$

Läßt man nun δ immer kleiner werden, so nähert sich dieser Ausdruck dem Grenzwert $2 x_1$, was wir ausdrücken durch die Formel

$$\frac{d y}{d x} = 2 x_1,$$

oder, wenn wir x an Stelle von x_1 schreiben,

$$\frac{d y}{d x} = 2 x,$$

d. h.

$$\frac{d (x^2)}{d x} = 2 x.$$

b) Auch den Differentialquotienten von

$$y = x^m$$

kann man, wenn m eine beliebige ganze positive Zahl ist, in derselben Weise finden. Bei dieser Funktion ist

$$\Delta y = (x_1 + \delta)^m - x_1{}^m,$$

also, wenn man das erste Glied entwickelt,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x_1{}^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x_1{}^{m-2} \delta + \text{usw.}$$

Da alle Glieder mit Ausnahme des ersten die Größe δ oder eine Potenz derselben als Faktor enthalten, nähern sich alle diese Glieder der Null, so daß man findet

$$\frac{d y}{d x} = m x_1{}^{m-1},$$

oder

$$\frac{d (x^m)}{d x} = m x^{m-1}.$$

Um eine Potenz von x zu differenzieren, muß man also den Exponenten um 1 vermindern und zugleich mit dem ursprünglichen Exponenten multiplizieren.

Man kann beweisen, daß man diese Regel auch anwenden darf, wenn m eine negative oder eine gebrochene Zahl ist. Der Differentialquotient der Funktion

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

ist also

$$-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

c) Als letztes Beispiel wählen wir

$$y = a\cos(nx + p),$$

wobei wir annehmen, daß a, n und p konstante Größen sind und daß der Winkel $nx + p$ in Bogenmaß ausgedrückt ist. Haben x_1 und δ wieder dieselbe Bedeutung wie oben, so ist

$$\varDelta y = a\cos[n(x_1 + \delta) + p] - a\cos(nx_1 + p),$$

oder, nach einer bekannten goniometrischen Formel,

$$\varDelta y = -2a\sin[n(x_1 + \tfrac{1}{2}\delta) + p]\sin\tfrac{1}{2}n\delta.$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varDelta y}{\varDelta x} &= -\frac{2a\sin[n(x_1 + \frac{1}{2}\delta) + p]\,\mathrm{tin}\,\frac{1}{2}n\delta}{\delta}\\ &= -an\sin[n(x_1 + \tfrac{1}{2}\delta) + p].\frac{\sin\frac{1}{2}n\delta}{\frac{1}{2}n\delta}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

Läßt man nun δ fortwährend abnehmen, so nähert sich auch der Winkel $\frac{1}{2}n\delta$ der Null, so daß (§ 38)

$$\operatorname{Lim}\frac{\sin\frac{1}{2}n\delta}{\frac{1}{2}n\delta} = 1$$

ist. Da ferner beim Grenzwert die Größe δ im ersten Faktor des Ausdruckes (13) verschwindet, hat man schließlich

$$\frac{dy}{dx} = -an\sin(nx_1 + p),$$

d. h.

$$\frac{d[a\cos(nx + p)]}{dx} = -an\sin(nx + p).$$

In derselben Weise findet man

$$\frac{d[a \sin(n x + p)]}{d x} = a n \cos(n x + p).$$

d) Der Leser wird leicht einsehen, daß, wenn die Funktion einen konstanten Faktor enthält, man zuerst die Funktion mit Weglassung desselben differenzieren und dann schließlich das Resultat mit diesem Faktor multiplizieren kann, und daß der Differentialquotient eines vielgliedrigen Ausdruckes gefunden wird, indem man jedes Glied einzeln differenziert und dann die Resultate mit denselben Vorzeichen, welche die Glieder hatten, aufeinander folgen läßt. Ist ein Glied konstant, so verschwindet es im Differentialquotienten, da es nichts zur Veränderung der Funktion beiträgt.

Der Differentialquotient von $3x^2$ ist

$$3 \times 2x = 6x,$$

und der von $1 + 2x - 6x^2 + 5x^3$

$$2 - 6 \times 2x + 5 \times 3x^2 = 2 - 12x + 15x^2.$$

§ 41. **Maximum oder Minimum einer Funktion.** Die Betrachtung der Veränderungen einer Funktion bei Zunahme oder Abnahme der unabhängigen Veränderlichen ermöglicht es auch, die Werte dieser letzteren zu bestimmen, für welche die Funktion ein Maximum oder ein Minimum wird. Um dies zu erläutern, betrachten wir die Funktion

$$y = 2 + x - x^2,$$

die wir in § 10 durch die krumme Linie von Fig. 3 dargestellt haben.

Geben wir wieder der unabhängigen Veränderlichen erst einen bestimmten Wert x_1 und dann eine kleine Zunahme δ, so ist y erst

$$2 + x_1 - x_1^2$$

und dann

$$2 + (x_1 + \delta) - (x_1 + \delta)^2.$$

Durch Subtraktion folgt hieraus

$$\Delta y = (1 - 2x_1)\delta - \delta^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

und also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - 2x_1 - \delta.$$

Läßt man δ immer kleiner werden, so nähert sich dieser Ausdruck dem Wert $1 - 2x_1$; also ist

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Durch dieses Resultat, welches wir auch aus den Regeln des vorhergehenden Paragraphen hätten ableiten können, wird in jedem Punkt der krummen Linie von Fig. 3 die Richtung der Berührungslinie bestimmt, denn, wie wir in § 39 gesehen haben, gibt der Wert von dy/dx die Tangente des Winkels an, den die Berührungslinie mit der x-Achse bildet. Im Punkt g z. B., wo $x = 0$ ist, wird die Tangente 1, also der Winkel selbst 45^0.

Im höchsten Punkt a läuft die Tangente der x-Achse parallel. Sie bildet mit ihr einen Winkel 0, und also muß, wenn man für x_1 die Abszisse von a nimmt, auch $dy/dx = 0$ werden. Tatsächlich ist $OA = 0{,}5$ und wird für diesen Wert von x_1 der Ausdruck (15) gleich Null.

Gibt man, vom Punkt a ausgehend, der Abszisse die Zunahme δ, so wird nach (14) die Zunahme von y

$$\Delta y = -\delta^2,$$

und hätte man bei der Ableitung von (14) die zweite Potenz von δ vernachlässigt, so würde

$$\Delta y = 0$$

werden.

Man sieht auch in der Figur, daß ein kleiner Bogen, z. B. ein Bogen von 0,01 mm Länge, im Punkt a der krummen Linie genommen, sich von einer kleinen geraden Linie, parallel zu OX, nicht merklich unterscheidet.

Im Punkt a ist die Funktion ein Maximum. Aber auch wenn die Ordinate ein Minimum wird, läuft die Tangente der x-Achse parallel (Fig. 11, § 11) und gelten ähnliche Betrachtungen.

Man kann im allgemeinen sagen:

Wenn für einen gewissen Wert der unabhängigen Veränderlichen eine Funktion ein Maximum oder ein Minimum wird, so wird der Differentialquotient dieser Funktion 0, oder auch:

Berechnet man, mit Vernachlässigung der zweiten und höherer Potenzen von δ, die Veränderung einer Funktion, welche die Folge einer Zunahme δ der unabhängigen Veränderlichen ist, so erhält man 0, wenn der Wert, von dem man ausging, ein Maximum oder Minimum war.

Man drückt dies wohl auch so aus: Wenn eine Funktion ein Maximum oder ein Minimum ist, ändert sie sich *nicht* bei einer *unendlich kleinen* Änderung der unabhängigen Veränderlichen.

Wenn man nämlich diese letztere Veränderung unendlich klein nennt, so will man damit sagen, daß sie so klein gedacht werden muß, daß die zweite und höhere Potenzen derselben im Vergleich mit der ersten weggelassen werden können.

Die allgemeine Funktion

$$a x^2 + b x + c,$$

die wir in § 11 betrachteten, hat als Differentialquotient

$$2 a x + b.$$

Dieser wird Null für

$$x = - \frac{b}{2 a}$$

und wir fanden denn auch, daß für diesen Wert der unabhängigen Veränderlichen die Funktion ein Minimum ist.

§ 42. **Summe einer unendlich großen Anzahl unendlich kleiner Größen.** Nähern sich in einer Summe alle Glieder der Null, aber nimmt zugleich die Anzahl der Glieder fortwährend zu, so kann der Fall eintreten, daß die Summe einen bestimmten Grenzwert hat.

Man wird sich eines Beispiels aus der Geometrie erinnern.

Teilt man eine Pyramide durch Ebenen, die der Grundfläche parallel laufen und gleichen Abstand voneinander haben, in dünne Schichten und beschreibt in jeder ein Prisma, welches mit ihr die obere Grundfläche und die Höhe gemein hat, so ist die Summe aller dieser Prismen kleiner als der Inhalt der Pyramide, aber sie hat diesen Inhalt zum Grenzwert, wenn man die Anzahl der Ebenen unbegrenzt zunehmen läßt. Der

Kürze halber kann man mit Hinweglassung des Wortes „Grenzwert“ sagen, daß der Inhalt der Pyramide gleich der Summe einer unendlich großen Anzahl von Prismen von unendlich kleiner Höhe ist.

Dieselbe Methode wird in vielen anderen Fällen angewandt. Man teilt oft eine zu berechnende Größe in eine große Anzahl, z. B. n kleine Teile, und setzt an Stelle jedes Teils etwas, was ein wenig davon verschieden ist. Wenn sich nun die Summe der Fehler, die man so macht, bei Zunahme der Zahl n der Null nähert, so wird der Grenzwert der Summe der n Größen, durch welche man die n Teile ersetzt hat, den gesuchten Wert liefern.

Will man z. B. die Länge einer krummen Linie berechnen, so teilt man sie in eine große Anzahl kleiner Bogen und ersetzt jeden Bogen durch seine Sehne. Der Grenzwert der Summe aller dieser Sehnen bei fortwährendem Zunehmen der Anzahl der Teile ist die gesuchte Länge.

In dieser Weise wird in der niederen Geometrie der Umfang des Kreises ermittelt.

Hier noch einige andere Beispiele. Um den Inhalt der Figur zu berechnen, die (Fig. 37) durch eine gegebene krumme Linie PQ, die Abszissenachse OX und zwei Koordinaten AP und BQ begrenzt wird, teilt man das Stück von OX, welches zwischen A und B liegt, in eine große Anzahl von Teilen AC, CD usw. und errichtet in den Teilpunkten die Ordinaten. Der gesuchte Inhalt wird dann in die Streifen $APRC$, $CRSD$ usw. geteilt. Diese ersetzt man, wie aus der Figur zu ersehen ist, durch Rechtecke; man sieht ohne weiteres, daß der gesuchte Inhalt der Grenzwert der Summe dieser Rechtecke bei andauernder Vermehrung der Anzahl der Teile ist.

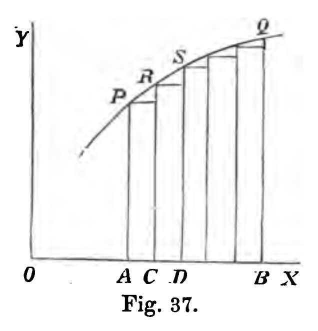


Fig. 37.

Der Sektor OAB (Fig. 38), welcher durch die beiden „Leitstrahlen“ OA und OB und eine gegebene krumme Linie begrenzt ist, kann durch eine Anzahl von Leitstrahlen zwischen OA und OB in kleinere Sektoren wie OCD

geteilt werden und jeder derselben kann durch einen Kreissektor wie OCE ersetzt werden. Der Grenzwert der Summe dieser Kreissektoren ist der Inhalt von AOB.

Man kann dies alles wieder kürzer ausdrücken, indem man sagt, daß die Länge einer krummen Linie die Summe einer unendlich großen Anzahl unendlich kleiner Sehnen ist, daß der Inhalt von $APQB$ in Fig. 37 durch Addition unendlich vieler unendlich kleiner Rechtecke gefunden wird, und daß man in Fig. 38 ebenso mit unendlich kleinen Kreissektoren verfahren muß.

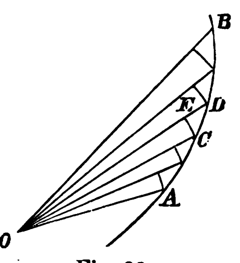


Fig. 38.

Die unendlich kleinen Teile, in welche eine Größe geteilt wird, nennt man die *Elemente* dieser Größe.

Der Vorteil, den die angegebene Berechnungsweise bietet, liegt darin, daß diese Elemente durch andere unendlich kleine Größen ersetzt werden, deren Wert leichter gefunden werden kann. Die Aufgabe wird hierdurch auf eine andere, welche *einfacher* ist, zurückgeführt, die Bestimmung des Inhaltes einer Pyramide z. B. auf die Bestimmung der Inhalte einer Anzahl von Prismen, die Berechnung des Flächeninhaltes einer von einer krummen Linie begrenzten Figur (Fig. 37) auf die Aufgabe, die Summe einer Anzahl von Rechtecken zu bestimmen.

Auch in physikalischen Problemen wendet man oft dieselbe Methode an, da die Teilung einer komplizierten Erscheinung zu einer Vereinfachung führen kann. Wenn z. B. die Konzentration einer Lösung von einem Punkt zum anderen sich ändert, so kann man den Raum, in welchem sich die Lösung befindet, in kleine Teile, z. B. in kleine rechtwinklige Parallelepipeda teilen und annehmen, daß die Konzentration innerhalb jedes dieser Teile überall dieselbe sei und sich nur beim Übergang von dem einen kleinen Raum zum anderen sich sprungweise ändere. Ebenso kann man, wenn man die Wärmeentwickelung besprechen will, die während einer gewissen Zeit durch einen elektrischen Strom von veränderlicher Stärke in einem Leitungsdraht hervorgebracht wird, den ganzen Zeitraum in kleine Teile teilen und die Wärmeentwickelung während

eines jeden dieser Teile so berechnen, als ob der Strom die Stärke beibehielte, die er am Anfang dieses Teils hat. Das Resultat, zu welchem man kommt, ist immer um so genauer, je weiter die Teilung getrieben wird, und der Grenzwert dieses Resultates für den Fall, daß die Anzahl der Teile fortwährend zunimmt, wird der Wirklichkeit entsprechen.

Mit den Hilfsmitteln, welche die höhere Mathematik bietet, um die Grenzwerte von Summen wie die oben besprochenen, sogenannte *Integrale*, zu bestimmen, wollen wir uns hier nicht beschäftigen; es genügt uns, die Möglichkeit solcher Berechnungen einzusehen, während wir die Ausführung den Mathematikern überlassen können.

Erstes Kapitel.

Bewegung und Kräfte.

§ 43. **Bewegung von Punkten und Körpern.** Die Ortsveränderung von Körpern und Teilen derselben ist die einfachste Erscheinung, welche in der Physik zur Sprache kommt, und die Gesetze, von denen diese Erscheinung beherrscht wird, sind von um so größerer Bedeutung, als viele Erscheinungen, die auf den ersten Blick von ganz anderer Art zu sein scheinen, auf Bewegungen zurückgeführt werden können. Wir wollen uns daher zunächst mit der Lehre von der Bewegung, der *Mechanik* beschäftigen.

Wenn sich ein Punkt bewegt, so beschreibt er eine gerade oder krumme Linie, welche die *Bahn* des Punktes genannt wird.

Bei der Bewegung eines Körpers muß man die Bahnen unterscheiden, die von den verschiedenen Punkten durchlaufen werden und die voneinander sehr verschieden sein können.

Bei der Wellenbewegung z. B. in einer Wassermasse muß man der Reihe nach auf die Ortsveränderung der verschiedenen Wasserteilchen achten, von denen sich in demselben Augenblick einige in einer hohen, andere in einer tiefen Lage befinden, und wenn eine Flüssigkeit durch eine Öffnung aus einem Gefäß ausströmt, muß man untersuchen, auf welchen krummen Linien die Teilchen der Flüssigkeit die Öffnung erreichen und das Gefäß verlassen.

Bei festen Körpern ist keine so große Verschiedenheit der Bewegungen möglich wie bei einer Flüssigkeit oder einem Gas, aber die verschiedenen Punkte eines sich drehenden Kreisels oder eines in die Höhe geschleuderten Stabes durchlaufen doch sehr voneinander abweichende Bahnen.

§ 44. **Materielle Punkte.** In vielen Fällen hat man jedoch eine genügende Vorstellung von der Bewegung eines Körpers, sobald man von *einem* Punkte desselben die Ortsveränderung kennt. Es kann sein, daß alle Punkte des Gegenstandes in derselben Weise fortschreiten (fortgeschobener Schlitten) oder auch, daß man sich mit der Kenntnis der Bahn *eines* Punktes begnügen und von den Einzelheiten in der Bewegung der anderen absehen kann. Um z. B. die Bewegung einer Gewehrkugel zu untersuchen, kann man damit beginnen, die Aufmerksamkeit nur auf *einen* Punkt derselben zu richten. Wird ein Körper in dieser Weise durch einen einzigen Punkt ersetzt, so wird er ein *materieller Punkt* genannt.

§ 45. **Zeit.** Nachdem man die Bahn eines Punktes kennen gelernt hat, kann man auf den Ort achten, wo er sich *in bestimmten Augenblicken* befindet, und auf die *Zeit*, welche er für die Bewegung von dem einen Ort nach dem anderen braucht. Einen bestimmten Zeitpunkt gibt man durch die Anzahl der Zeiteinheiten an, die seit irgend einem festen Augenblick, dem Anfangspunkt der Zeitrechnung, verlaufen sind, oder auch wenn der betrachtete Zeitpunkt diesem Anfangspunkt vorausgeht, durch die Anzahl Zeiteinheiten, die bis an den letzteren verlaufen werden. Die betreffende Anzahl Zeiteinheiten wird mit t bezeichnet; sie wird als eine positive Größe betrachtet, wenn man es mit einem Zeitpunkt *nach* dem Anfangspunkt der Zeitrechnung, und als eine negative Größe, wenn man es mit einem Augenblick *vor* demselben zu tun hat.

Als Zeiteinheit wollen wir, wenn nichts anderes gesagt wird, die *Sekunde* benutzen.

Als Augenblick, von dem aus man die Zeit rechnet, kann man häufig den Zeitpunkt wählen, in welchem die Bewegung anfängt.

Die Bestimmung des Ortes, in welchem sich ein Punkt in bestimmten aufeinander folgenden Augenblicken befindet, wird bei langsamen Bewegungen, wie die der meisten Himmelskörper, durch den Umstand erleichtert, daß sich während der Zeit, die zur Beobachtung des Ortes erforderlich ist, der Stand nicht merklich ändert. Bei schnelleren Bewegungen muß man den einen oder anderen Kunstgriff anwenden.

§ 46. Gleichförmige Bewegung. Geschwindigkeit. Die Ergebnisse derartiger Beobachtungen können in verschiedener Weise veranschaulicht werden. Man kann z. B. die Bahn in einer Figur abbilden, erforderlichenfalls in verkleinertem oder in vergrößertem Maßstab, und neben verschiedene Punkte der Figur Zahlen setzen, welche die Zeiten angeben, in denen der Körper diese Punkte erreicht hat.

Die Bewegung heißt gleichförmig, wenn in willkürlich gewählten gleichen Zeitteilen gleich große Wege zurückgelegt werden. Fig. 39 stellt eine solche Bewegung vor; die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 liegen in gleichen Abständen voneinander.

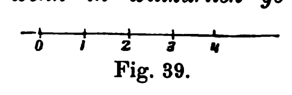


Fig. 39.

Die Geschwindigkeit bei einer gleichförmigen Bewegung wird gemessen durch den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg.

Mit einer Ausdrucksweise, deren wir uns in derartigen Fällen oft bedienen werden, sagen wir auch: die Geschwindigkeit *ist* der Weg, der in der Zeiteinheit durchlaufen wird.

Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung ist fortwährend gleich groß.

In der Definition der gleichförmigen Bewegung ist ausdrücklich die Rede von *willkürlich* gewählten gleichen Zeitteilen. Der Körper muß nicht nur in jeder Sekunde gleich weit fortschreiten, sondern auch in jeder halben Sekunde, in jeder zehntel Sekunde usw. Soll daher die in Fig. 39 dargestellte Bewegung wirklich gleichförmig sein, so müssen die Punkte, neben welche $^1/_2$, $1\,^1/_2$, $2\,^1/_2$ usw. geschrieben werden muß, genau in der Mitte zwischen denjenigen Punkten liegen, bei denen 0, 1, 2, 3 steht.

Die durch Fig. 40 dargestellte Bewegung ist nicht gleichförmig, obwohl man glauben könnte, daß sie es ist, solange man nur auf die Wege achtet, die in vollen Zeiteinheiten durchlaufen werden.

Fig. 40.

§ 47. Freier Fall. Beschleunigte und verzögerte Bewegung. Für die Entwickelung der physikalischen Begriffe ist von besonderer Wichtigkeit das Fallen der Körper, wenn sie störenden Einflüssen so gut wie möglich entzogen sind (freier Fall). Ein solcher Einfluß wird in mehr oder weniger hohem Grade von der Luft ausgeübt; wir wollen aber im folgenden

annehmen, daß diese, wenn nötig, hinweggenommen ist. *Die Beobachtung hat erstens gelehrt, daß dann alle Körper gleich schnell fallen, und zweitens, daß die in aufeinander folgenden gleichen Zeitteilen durchlaufenen Wege, von dem Augenblicke an, in welchem der Fall anfängt, gerechnet, sich zueinander verhalten wie die Zahlen 1, 3, 5, 7 usw.* Diesem Gesetze entsprechend wird die Bewegung eines fallenden Körpers durch Fig. 41 dargestellt, wenn man sich die Linie in vertikaler Stellung denkt.

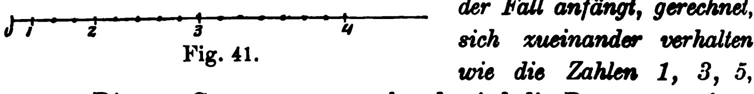


Fig. 41.

Da in aufeinander folgenden gleichen Zeiten immer größere Wege zurückgelegt werden, nennen wir die Bewegung *beschleunigt.* Werden die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege immer kleiner, dann ist die Bewegung *verzögert.*

§ 48. **Hin- und hergehende Bewegung.** Die Bewegungsrichtung eines Punktes kehrt sich zuweilen um, so daß er die Bahn entlang zurückgeht. Als Beispiel hiervon kann ein vertikal nach oben geworfener Körper dienen. Die Bewegung desselben wird durch Fig. 42 dargestellt, wenn man sich die Linie in vertikaler Stellung mit dem Punkt 0 unten denkt.

Fig. 42.

In der Figur ist noch der besondere Umstand ausgedrückt, daß nach der Umkehrung der Bewegungsrichtung, die im Zeitpunkt 4 stattfindet, der Punkt für jedes Stück des Weges, das er beim Aufsteigen in einer Sekunde durchlaufen hat, auch beim Fallen eine Zeiteinheit braucht.

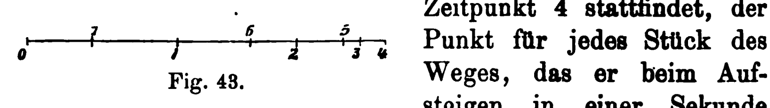


Fig. 43.

Bei der in Fig. 43 dargestellten Bewegung besteht diese Eigentümlichkeit nicht.

§ 49. **Bewegung auf einer geschlossenen Bahn.** Wenn ein Punkt auf einer geschlossenen krummen Linie immer in derselben Richtung fortschreitet, so führt er eine Anzahl von *Umläufen* aus. Die Zeit, welche er braucht, um von irgend einem Punkt der Bahn zu demselben Punkt zurückzukehren, heißt die *Umlaufszeit.*

In Fig. 44 ist der Fall dargestellt, daß der Punkt, nachdem er in 5 Zeiteinheiten zum Ausgangspunkt zurückgekehrt

ist, die folgenden Umläufe in derselben Weise ausführt wie den ersten. Man kann dann von *der* Umlaufszeit sprechen, d. h. von der Zeit, die für jeden Umlauf, einerlei welchen, erforderlich ist. Diese Zeit ist dieselbe, in welchem Punkt A oder B man auch den Umlauf anfangen läßt.

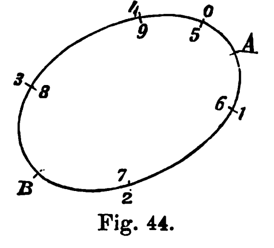


Fig. 44.

Das einfachste Beispiel einer Bewegung auf einer geschlossenen Linie mit konstanter Umlaufszeit ist die gleichförmige Bewegung.

Bewegungen, die sich wie die soeben betrachtete immer nach Verlauf einer bestimmten Zeit in derselben Weise wiederholen, heißen *periodisch*; die betreffende Zeit wird die *Periode* genannt. Bei einer Bewegung mit konstanter Umlaufszeit haben die Worte „Umlaufszeit“ und „Periode“ dieselbe Bedeutung.

§ 50. **Schwingungen.** Auch eine Bewegung auf einer nicht geschlossenen Linie kann periodisch sein; dies ist z. B. der Fall, wenn ein Punkt zwischen zwei äußersten Stellungen hin- und hergeht, so daß jeder Hin- und Hergang in derselben Weise stattfindet. Derartige Bewegungen werden als *Schwingungen* bezeichnet. In der Regel wollen wir unter einer Schwingung einen vollen Hin- und Hergang verstehen; die dazu erforderliche Zeit heißt die *Schwingungszeit.* Im besonderen betrachten wir Schwingungen auf einer geraden Linie.

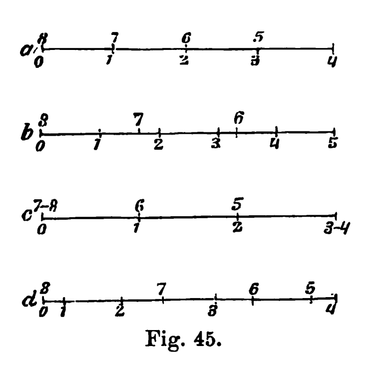


Fig. 45.

Zwischen denselben Umkehrpunkten und bei derselben Schwingungszeit kann die Bewegung noch in sehr verschiedener Weise stattfinden; es sind, wie wir sagen können, verschiedene *Schwingungsformen* möglich. Die Fig. 45, *a, b, c, d* können zur Erläuterung dienen. In der ersten sind der Hingang und die Rückkehr gleichförmige Bewegungen mit derselben Geschwindigkeit. In Fig. *b* sind sie auch noch gleichförmig, aber die Bewegung ist nach rechts langsamer als nach links. Die in

Fig. *c* dargestellte Bewegung unterscheidet sich von der in Fig. *a* abgebildeten dadurch, daß der Punkt an den Enden der Bahn jedesmal eine Zeiteinheit lang in Ruhe bleibt. In Fig. *d* endlich sind beide Bewegungen beschleunigt.

In allen diesen Fällen ist die Schwingungsdauer nicht nur die Zeit, in welcher der Punkt von dem einen Ende der Bahn aus hin- und hergeht, sondern auch die Zeit, welche er braucht, um von einem beliebigen Punkt C (Fig. 46) aus zuerst nach dem einen Ende A zu gehen, dann nach dem anderen Ende B zurückzukehren und schließlich wieder den Ausgangspunkt zu erreichen.

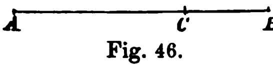


Fig. 46.

§ 51. **Einfache Schwingungen.** Wir wollen jetzt eine Schwingungsform besprechen, die von besonderer Wichtigkeit ist.

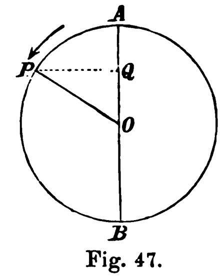


Fig. 47.

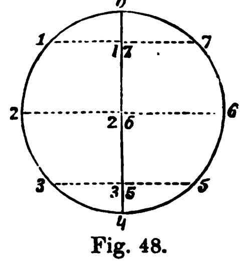


Fig. 48.

Wenn (Fig. 47) sich ein Punkt P auf einem Kreis bewegt, so geht die Projektion Q dieses Punktes auf einen festen Durchmesser AB zwischen den Endpunkten A und B des letzteren hin und her; die Projektion führt regelmäßige Schwingungen aus, wenn P die aufeinander folgenden Umläufe in gleicher Weise macht. Die Schwingungszeit von Q ist offenbar dasselbe wie die Umlaufszeit von P.

Die Schwingungen von Q in dem besonderen Fall, daß P eine gleichförmige Bewegung hat, werden *einfache* genannt. Man beachte, daß die Bewegung von Q eine solche einfache Schwingung sein kann, auch wenn der Kreis und der Punkt P nicht da sind; der Punkt Q kann sich auch dann so bewegen, daß er als die Projektion eines anderen Punktes *betrachtet werden kann*, der sich gleichförmig auf einem Kreisumfang bewegt.

Es ist leicht einzusehen, daß die Projektion von P auf eine beliebige Linie in der Ebene des Kreises sich in derselben

Weise bewegt wie der Punkt Q. In kurzen Worten können wir also sagen:

Eine einfache Schwingung ist die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine gerade Linie, die in der Ebene des Kreises liegt.

Fig. 48 dient zur näheren Erläuterung der einfachen Schwingung. Die Punkte 0, 1, 2, 3 usw. auf dem Kreise liegen in gleichen Entfernungen voneinander. Natürlich kann man die Bewegung eingehender betrachten und in derselben Weise den Ort des Punktes für Augenblicke angeben, die z. B. um ein Sechzehntel der Schwingungszeit auseinanderliegen.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit besonders auf die folgenden Eigenschaften der einfachen Schwingung.

a) Um eine der Hälften AO und BO (Fig. 47) der Bahn in der einen oder in der anderen Richtung zu durchlaufen, braucht der Punkt den vierten Teil der Schwingungszeit.

b) Ein beliebiges Stück der Bahn wird beim Hingang und beim Hergang in derselben Zeit zurückgelegt.

c) In zwei Augenblicken, die um die halbe Schwingungszeit voneinander entfernt sind, befindet sich der schwingende Punkt in gleicher Entfernung, aber auf verschiedenen Seiten von O und bewegt sich in entgegengesetzten Richtungen.

d) Die Bewegung ist beschleunigt, während sich der schwingende Punkt dem Punkt O nähert, und verzögert, wenn er sich von O entfernt.

Der Abstand OA, die halbe Länge der Bahn, wird die *Schwingungsweite* oder *Amplitude* genannt.

§ 52. **Anderes Beispiel von dem Zusammenhang zwischen der Bewegung zweier Punkte.** Im Falle des vorigen Paragraphen wurde die Bewegung von Q durch die Bewegung des Punktes P bestimmt. In ähnlicher Weise zwingt man bei vielen Maschinen einen Punkt, sich in der für irgend einen Zweck nötigen Weise zu bewegen, dadurch, daß man ihn mit einem anderen Punkt verbindet, der selbst eine bestimmte Bewegung hat. Ein Beispiel hiervon wird durch Fig. 49 veranschaulicht.

Der Punkt P hat eine gleichförmige Bewegung auf dem Kreis und Q muß sich auf der Verlängerung des Durchmessers BA so bewegen, daß der Abstand PQ eine konstante Länge l

hat. Man kann auch sagen, daß sich eine gerade Linie PQ von konstanter Länge mit dem einen Ende gleichförmig auf einem Kreis bewegt, während das andere Ende auf der geraden Linie BD gleitet.

Der Punkt Q geht hin und her zwischen den Punkten D und E, die man erhält, wenn man $AD = BE = l$ macht. Daß die Bewegung jetzt aber keine einfache Schwingung ist, zeigt sich, sobald man für einige Augenblicke den Ort von Q bestimmt. Es genügt schon, dies für einen Augenblick zu tun, der in der Mitte zwischen denjenigen liegt, in denen sich der Punkt P in A und in B befindet. Zu diesem Zwecke halbiert man den Halbkreis BA in C und bestimmt F so, daß $CF = l$ ist. Der Punkt F liegt nicht in der Mitte von ED, was der Fall sein würde, wenn die Bewegung von Q eine einfache Schwingung wäre.

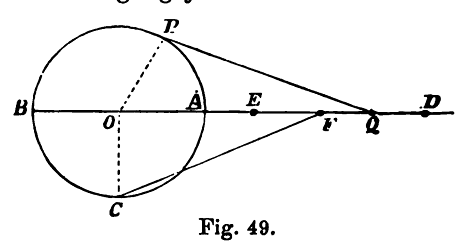


Fig. 49.

§ 53. **Darstellung der Bewegung eines Punktes durch eine Formel.** Wir nehmen auf der Bahn einen festen Punkt O an und bestimmen den Ort des beweglichen Punktes durch die längs der Bahn gemessene Entfernung s von O, in welcher er sich befindet. Diese Entfernung rechnen wir positiv oder negativ, je nachdem sie von O aus die eine oder die andere Richtung hat.

Im Laufe der Bewegung ist s offenbar eine Funktion der Zeit t, die seit dem Augenblick verlaufen ist, von dem aus man die Zeit rechnet, und die Bewegung ist bekannt, sobald man weiß, *welche* Funktion s von t ist, mit anderen Worten, nach welchem Gesetz die eine Veränderliche von der anderen abhängt. Dann kann für jeden Augenblick der Ort des Punktes angegeben werden.

Die Beziehung zwischen den Veränderlichen kann durch eine Tabelle angegeben werden (vgl. § 1). Man kann nämlich die Zeiten, in denen man die Lage des Punktes beobachtet hat, in die erste Kolumne eintragen, und die für s gefundenen Werte in die zweite.

Der Zusammenhang zwischen s und t kann aber auch durch eine Formel ausgedrückt werden, sei es durch eine empirische Formel, die sich so gut wie möglich den Beobachtungen anschließt, sei es durch eine Gleichung, die aus der Definition einer Bewegung besonderer Art abgeleitet wird.

Solche Gleichungen sind für die Bewegungen, von denen in den vorhergehenden Paragraphen die Rede war, leicht aufzustellen.

§ 54. a) *Gleichförmige Bewegung.* Wir wählen für O den Punkt, in welchem sich der Körper in dem Augenblicke befand, von dem aus man die Zeit t zu rechnen anfing, und wir nehmen an, daß die Bewegung nach derjenigen Seite gerichtet ist, nach welcher s positiv gerechnet wird. Die Geschwindigkeit sei v. Aus der Definition der Bewegung folgt unmittelbar, daß

$$s = vt$$

ist. Diese Formel gilt auch für eine Bewegung nach der negativen Seite hin, wenn man in diesem Fall die Geschwindigkeit mit dem negativen Vorzeichen versieht.

Es ist zuweilen wünschenswert, den Punkt O anders zu wählen als oben angegeben wurde; zur Zeit $t = 0$ befindet sich dann der Körper in einer gewissen Entfernung a von O. Für die Zeit t wird infolgedessen

$$s = a + vt.$$

In dieser Formel kann sowohl v als a positiv oder negativ sein.

b) *Freier Fall.* Wir rechnen die Zeit t von dem Augenblicke an, in welchem die Bewegung anfängt, und s nach unten von dem Punkte aus, in welchem der Körper losgelassen wird. Den Weg, welcher in der ersten Zeiteinheit zurückgelegt wird, bezeichnen wir mit a. Dann sind (§ 47) die Wege, die in der zweiten, dritten Zeiteinheit usw. durchlaufen werden, bezw. $3a$, $5a$, $7a$ usw. Hieraus folgt für die Wege, welche in den zwei ersten, den drei ersten, den vier ersten Zeiteinheiten zurückgelegt werden, $4a$, $9a$, $16a$. Allgemein ist also, wenn t eine ganze Zahl ist,

$$s = at^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Beobachtung hat gelehrt, daß, auch wenn t nicht durch eine ganze Zahl ausgedrückt wird, dieselbe Beziehung gilt.

Der in 2,5 Sekunden durchlaufene Weg ist z. B. $6{,}25\,a$.

c) *Einfache Schwingung.* In Fig. 47 verstehen wir unter s den Abstand OQ des beweglichen Punktes Q von der Mitte der Bahn und nehmen s positiv, wenn Q über O liegt. Die Zeit t rechnen wir von dem Augenblicke an, in welchem P in A war, die Umlaufszeit oder Schwingungszeit bezeichnen wir mit T, welche Größe also im Gegensatz zu der veränderlichen Zeit t eine Konstante ist, und die Amplitude mit a. Winkel endlich drücken wir in Bogenmaß aus.

Wenn der Punkt P in der Zeit t den Bogen AP durchlaufen hat, so ist

$$\angle AOP = 2\pi \frac{t}{T},$$

wie man findet, wenn man bedenkt, daß P eine gleichförmige Bewegung hat und daß die Verbindungslinie von P mit O in der Schwingungszeit T den Winkel 2π beschreibt.

Ferner ist

$$OQ = OP \cos AOP,$$

also

$$s = a \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Obschon bei dieser Ableitung angenommen wurde, daß $t < \frac{1}{4}T$ ist, gilt die Formel für alle Werte von t. Liegt z. B. t zwischen $\frac{1}{4}T$ und $\frac{1}{2}T$, so haben P und Q Lagen wie die in Fig. 50 angegebenen. Die Länge von OQ ist jetzt $a \cos BOP$; man hat also, da s negativ ist,

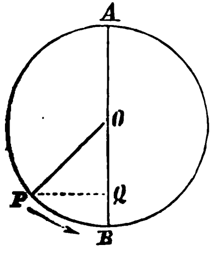


Fig. 50.

$$s = -a \cos BOP = a \cos AOP,$$

und für AOP kann wieder $2\pi t/T$ geschrieben werden.

Andere besondere Fälle können ebenso behandelt werden. Wir bemerken nur noch, daß die Formel (2) auch gilt, wenn $t > T$ ist, selbst wenn t vielmal die Schwingungszeit umfaßt. Die Formel drückt aus, daß jedesmal nach Verlauf dieser letzteren Zeit s wieder denselben Wert annimmt, denn wenn t um T zunimmt, so nimmt der Winkel $2\pi t/T$ bis 2π zu und kehrt der Cosinus wieder zu demselben Wert zurück.

Gerade weil der Cosinus eine periodische Funktion ist, kann die Formel eine periodische Bewegung darstellen.

d) Die Formel (2) muß durch eine andere ersetzt werden, wenn zur Zeit $t = 0$ der schwingende Punkt nicht in A (Fig. 47) ist. Man nehme z. B. an, er befinde sich um diese Zeit in O und bewege sich nach der positiven Seite hin; der Punkt P ist dann (Fig. 51) in P_0. Werden dann in der Zeit t die Wege $P_0 P$ und $O Q$ durchlaufen, so ist

$$O Q = O P \sin P_0 O P$$

und also

$$s = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

und diese Gleichung gilt wieder für alle Werte von t.

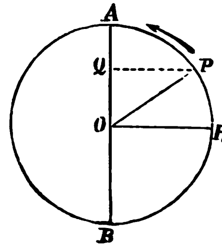


Fig. 51.

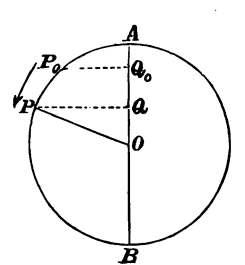


Fig. 52.

Ist (Fig. 52) der Punkt, der sich auf dem Kreise bewegt, im Augenblick $t = 0$ in P_0, wird der Bogen $A P_0$, durch den Radius als Einheit ausgedrückt, mit p bezeichnet und beziehen sich P und Q auf die Zeit t, so ist

$$\angle A O P = 2\pi \frac{t}{T} + p,$$

also

$$s = a \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + p\right).$$

§ 55. **Graphische Darstellung einer Bewegung.** Der Zusammenhang zwischen s und t kann in der in § 9 besprochenen Weise durch eine Figur ausgedrückt werden, wenn man t durch die Abszissen und s durch die Ordinaten darstellt. Jedem Paar zusammengehöriger Werte von t und s entspricht ein Punkt in der Figur, und die gerade oder krumme Linie, welche durch die so erhaltenen Punkte geht, veranschaulicht die Art der Bewegung. Wir können die Abszissenachse und die Ordinatenachse jetzt

die Achse der Zeiten und die Achse der Wege nennen und sie in der Figur durch die Buchstaben T und S unterscheiden.

a) *Gleichförmige Bewegung.* Da bei dieser Bewegung in aufeinander folgenden gleichen Zeiten die Entfernung s jedesmal um denselben Betrag zunimmt, müssen in der graphischen Darstellung die Änderungen der Ordinate denen der Abszisse proportional sein; *eine gleichförmige Bewegung wird also durch eine gerade Linie dargestellt.*

Fig. 53 stellt eine Bewegung dar, bei welcher s zur Zeit $= 0$ bereits den Wert OA hat. Die Verschiebung ist nach der positiven Seite gerichtet, so daß s zunimmt. Wenn pq die Zeiteinheit vorstellt, so ist die Differenz su der Ordinaten pr und qs die Zunahme von s für die Zeiteinheit, also das Maß der Geschwindigkeit. Je größer diese ist, einen desto größeren Winkel bildet die Linie mit der Achse der Zeiten.

Ist für $t = 0$ auch $s = 0$, so geht die Linie durch den Ursprung der Koordinaten.

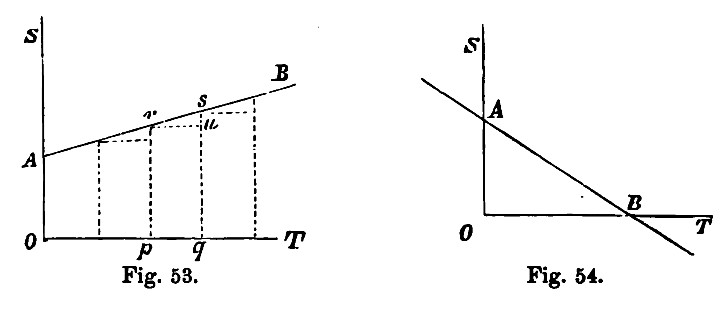


Fig. 53. Fig. 54.

Fig. 54 bezieht sich auf den Fall, daß der Abstand s, der zur Zeit $t = 0$ den Wert OA hat, abnimmt. Zu der durch OB dargestellten Zeit wird $s = 0$; der bewegliche Punkt erreicht dann denjenigen Punkt der Bahn, von welchem aus s gerechnet wird.

Man kann die graphische Methode benutzen, um eine Vorstellung von der Bewegung einer Anzahl Körper zu geben, die sich auf derselben Bahn bewegen. Betrachten wir z. B. eine Eisenbahnlinie mit vier Stationen und rechnen die Entfernung s von der einen Endstation ab in der Richtung nach der anderen. Auf der Achse der Wege (Fig. 55) sollen die Entfernungen der zweiten, dritten und vierten Station von der ersten z. B.

durch OA, OB und OC dargestellt werden; der Kürze halber bezeichnen wir auch die Stationen selbst durch die Buchstaben O, A, B, C.

Der Lauf eines jeden Zuges wird nun durch eine Linie angegeben. Die Linie $Opqrsu$ z. B. bezieht sich auf einen Zug, der zur Zeit $t = 0$ von O abgeht, mit gleichförmiger Bewegung nach A geht, diese Station zu der durch Ov dargestellten Zeit erreicht, hier so lange anhält, wie durch die Länge von pq angegeben wird, sodann seine Bewegung mit geringerer Geschwindigkeit fortsetzt (qr macht nämlich einen kleineren Winkel mit OT als Op), in B etwas länger anhält als in A und endlich von B nach C mit derselben Geschwindigkeit geht, mit der die Strecke OA durchlaufen wurde (su läuft parallel Op).

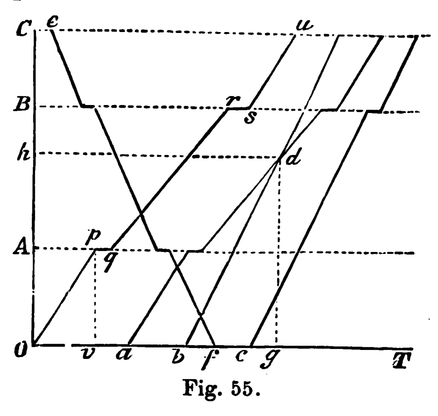


Fig. 55.

Die von a ausgehende Linie gilt für einen Zug, der sich geradeso bewegt wie der zuerst betrachtete, der aber so viel später abgeht wie durch Oa angegeben wird. Die bei b beginnende Linie veranschaulicht, daß ein Zug mit größerer Geschwindigkeit als die beiden vorhergehenden von O nach C geht, ohne an den Zwischenstationen anzuhalten. Endlich ist noch der Lauf eines Zuges dargestellt, der von O ausgeht und nur in B anhält. Die Linie ef bezieht sich auf eine Bewegung in der Richtung von C nach O.

Wenn die Figur einmal konstruiert ist, so kann man aus derselben verschiedene Einzelheiten entnehmen. Will man wissen, um welche Zeit die Züge einen bestimmten Punkt des Weges passieren, so muß man von dem entsprechenden Punkt der Achse der Wege eine Linie parallel zu OT ziehen. Dagegen sehen wir an den Durchschnittspunkten der Linien mit einer Senkrechten auf OT, wo sich die verschiedenen Züge in einem bestimmten Augenblick befinden.

Das Schneiden zweier Linien, welche man im Punkt d sieht,

bedeutet, daß ein Zug einen anderen einholt, und zwar zu einer Zeit, welche durch die Abszisse Og von d, und an einem Ort, der durch die Projektion h des Durchschnittspunktes auf OC bestimmt wird. Auch Kreuzungen von Zügen sind in der Figur angedeutet.

Fig. 56.

b) *Freier Fall.* Die krumme Linie in Fig. 56 stellt graphisch dar, was in § 54 durch die Formel (1) ausgedrückt wurde. Wenn OA, AB, BC, CD Zeiteinheiten bedeuten, dann ist $Aa = a$, $Bb = 4a$, $Cc = 9a$, $Dd = 16a$. Da die Ordinaten den zweiten Potenzen der Abszissen proportional sind, so ist die Linie eine *Parabel* (§ 18). *Überhaupt stellt jede krumme Linie eine nicht gleichförmige Bewegung dar.*

c) *Schwingungen.* Bei einer schwingenden Bewegung wird jedesmal nach Verlauf der Schwingungszeit wieder derselbe Punkt der Bahn erreicht. Diese Eigenschaft macht sich in der graphischen Darstellung dadurch bemerkbar, daß dieselbe Ordinate wiederkehrt, wenn die Abszisse um den der Schwingungszeit entsprechenden Wert anwächst.

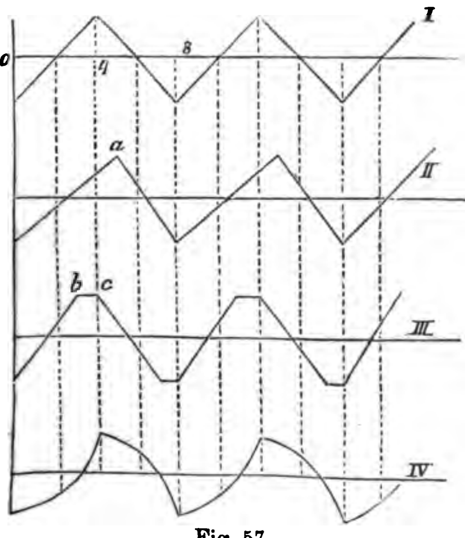


Fig. 57.

Die graphische Darstellung einer schwingenden Bewegung ist daher eine Wellenlinie. Verschiedenen Schwingungsformen entsprechen jedoch Wellenlinien von verschiedener Gestalt.

Dies wird durch Fig. 57 erläutert. Die Linien I, II, III

und IV beziehen sich auf die Bewegungen, die auch in Fig. 45 *a, b, c, d* dargestellt sind; dabei ist zu bemerken, daß die horizontalen Entfernungen von Fig. 45 in verkleinertem Maßstab durch die vertikalen Ordinaten von Fig. 57 wiedergegeben werden, so daß sich „rechts" in Fig. 45 und „oben" in Fig. 57 entsprechen. Bei jeder Linie der letzteren Figur ist eine horizontale gerade Linie als Achse der Zeiten gezogen, und zwar in einer solchen Höhe, daß die Wellenlinie nach oben und nach unten sich gleichweit von der geraden Linie entfernt; die Ordinaten stellen also die Entfernungen des schwingenden Punktes von der Mitte der Bahn dar. Die Figur bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

Die graphische Darstellung einer einfachen Schwingung wird leicht aus der in § 51 gegebenen Definition abgeleitet. Man kann z. B. für Augenblicke, die um $^1/_{16}$ Schwingungszeit voneinander entfernt sind, die Entfernung bestimmen, in welcher sich der schwingende Punkt auf der einen oder der anderen Seite von O (Fig. 47) befindet, und muß dann diese Entfernungen als gleichweit voneinander stehende positive oder negative Ordinaten in der Figur anbringen.

Wir überlassen es dem Leser, diese Konstruktion auszuführen.

Die Linien, welche einfache Schwingungen darstellen, sind einfache Wellenlinien oder Sinusoiden (Fig. 25).

Ersetzt man nämlich in den Formeln von § 54, *c* und *d* die Buchstaben t und s bzw. durch x und y, so nehmen sie dieselbe Gestalt an wie die Gleichungen in § 21.

Wir bemerken schließlich noch, daß, ebenso wie jede schwingende Bewegung durch eine Wellenlinie dargestellt wird, auch umgekehrt jede Wellenlinie als das Bild einer gewissen Schwingungsform betrachtet werden kann. Man kann z. B. bei der krummen Linie L_3 in Fig. 26 eine Anzahl von Ordinaten in gleichen Entfernungen voneinander ziehen. Ein Punkt kann sich nun so auf einer geraden Linie bewegen, daß die Entfernung von einem festen Punkt der Linie für eine Reihe von gleichweit auseinanderliegenden Augenblicken so groß ist wie durch die Ordinaten angegeben wird.

§ 56. **Aufzeichnung von Bewegungen.** Ein Körper, welcher sich genau oder nahezu auf einer geraden Linie bewegt und

an welchem ein Schreibstift befestigt ist, kann auf eine dem Stift gegenübergestellte Ebene die Linie aufzeichnen, die seine Bewegung graphisch darstellt.

Ist nämlich (Fig. 58) LL die Linie im Raum, auf welcher sich der Stift bewegt, und ist eine Ebene, z. B. ein Blatt Papier dem Stift gegenübergestellt, so würde auf dieser Fläche, wenn sie selbst stillstände, eine gerade Linie gezeichnet werden, welche mit LL zusammenfällt. Wird nun aber die Ebene in der Richtung Xa senkrecht zu LL von rechts nach links verschoben, und zwar mit gleichförmiger Bewegung, so bekommt man eine krumme Linie $pq'r's't'$, welche die verlangte graphische Darstellung ist.

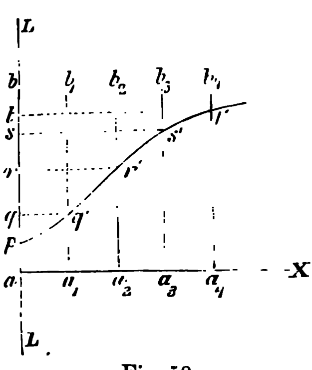


Fig. 58.

Um dies einzusehen, denken wir uns auf dem Papier einige gleich weit voneinander entfernte Linien ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ usw., senkrecht zu aX. Fällt anfangs ab mit der festen Linie LL zusammen, so wird dies nach Verlauf einiger Zeit $a_1 b_1$ und nach Verlauf der doppelten Zeit $a_2 b_2$ tun, usw. Dabei kommen a_1, a_2 usw. nacheinander in denjenigen Punkt von LL, in welchem sich zuerst a befand.

Schneiden nun die Linien ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ usw. die ent-ne Kurve in p, q', r', s', t', so findet man, indem man 'r, s's usw. parallel zu Xa zieht, diejenigen Punkte L, in denen sich der Stift in den betreffenden Augen-befand. Die Strecken ap, aq, ar usw., um die er in genblicken vom festen Punkt a der Linie LL ent-sind also wirklich gleich den Ordinaten der krummen man in der Figur sieht.

kleine Abänderung macht die Methode brauchbarer. -nn nämlich das Blatt Papier um einen Rotations-r wickeln (man legt ein rechtwinkliges Stück um den ler und befestigt die Ränder aneinander) und diesem ren eine gleichförmige Drehung um seine Achse geben, nd sich der Körper mit dem Schreibstift in der Richtung

einer erzeugenden Linie bewegt. Auf der Oberfläche wird dann eine Linie gezeichnet, die, nachdem das Papier in der Richtung einer erzeugenden Linie durchgeschnitten und wieder zu einer Ebene ausgebreitet ist, mit der Linie $p q' r'$ von Fig. 58 übereinstimmt, wenigstens wenn die Geschwindigkeit eines Punktes der Zylinderfläche ebenso groß ist wie diejenige, mit welcher im Fall von Fig. 58 die Ebene verschoben wurde.

Was man als Schreibstift benutzt, hängt von den Umständen ab. Oft nimmt man eine Borste, eine feine Metallspitze oder etwas Ähnliches; das Papier, welches eine glatte weiße Oberfläche haben muß, wird dann vermittelst einer Flamme mit Ruß überzogen. Da dieser durch den Stift leicht weggenommen wird, bekommt man eine feine weiße Linie, die man aufheben kann, wenn man den Ruß durch ein Fixiermittel auf dem Papier befestigt. Man kann sich auch der Photographie bedienen. Benutzt man nämlich ein lichtempfindliches Papierblatt, so kann ein Lichtbündel, welches auf einen Punkt des Blattes gerichtet ist, als „Schreibstift“ dienen.

§ 57. **Anwendungen der graphischen Methode.** Man hat in der angegebenen Weise u. a. die Gesetze des freien Falles untersucht. Der rotierende Zylinder stand dabei vertikal und ein mit einem Zeichenstift versehener Körper fiel an ihm herab. Durch geeignete Hilfsmittel war dafür gesorgt, daß der Zeichenstift sich nur in vertikaler Richtung bewegen konnte und stets sanft gegen den Zylinder gedrückt wurde. Dadurch, daß man zuerst entweder nur den Zylinder in Drehung versetzte oder nur den Körper fallen ließ, konnte man eine horizontale und eine vertikale Linie erhalten, von deren Durchschnittspunkt dann die krumme Linie ausging, die bei dem eigentlichen Versuch beschrieben wurde. Man konnte schließlich, nachdem man das Blatt Papier wieder ausgebreitet hatte, die horizontale Linie als Abszissenachse und die vertikale Linie als Ordinatenachse nehmen und die zu verschiedenen Abszissen gehörenden Ordinaten miteinander vergleichen. Es zeigte sich, daß die Ordinaten den zweiten Potenzen der Abszissen proportional waren, daß die Linie also eine Parabel war, wie es nach § 55, b der Fall sein muß.

Bei der Untersuchung schwingender Bewegungen bedient man sich oft der graphischen Methode. Ein feiner Stift, der

an einen schwingenden, z. B. einen tönenden Körper befestigt ist, zeichnet auf einen rotierenden Zylinder eine Wellenlinie, die nicht nur zeigt, über welchen Abstand der Punkt hin- und hergeht und wie oft er dies während einer Umdrehung des Zylinders tut, sondern die uns auch durch ihre Gestalt die Schwingungsform des Körpers angibt. Es zeigt sich z. B., daß eine schwingende Stimmgabel Linien wie die in § 20 und 21 besprochenen aufzeichnet; hieraus folgt, *daß die Schwingungen einer Stimmgabel einfache sind.*

In den besprochenen Fällen werden mit Hilfe der graphischen Methode Bewegungen untersucht, die so schnell sind, daß die unmittelbare Beobachtung schwierig wird. Gleichgute Dienste kann die Methode bei langsamen Ortsveränderungen leisten; selbst sehr träge Bewegungen, die die Geduld des Beobachters auf eine schwere Probe stellen würden, fallen in ihr Bereich. Das Steigen und Sinken der Meeresoberfläche, die Änderungen des Barometerstandes können durch Apparate aufgezeichnet werden, die, einmal in Bewegung gesetzt, geraume Zeit sich selbst überlassen werden können und denen, da sie ununterbrochen aufzeichnen, keine einzige Bewegung entgeht.

In verschiedenen Fällen ist dieser oder jener Kunstgriff nötig, um den Körper, dessen Bewegungen man untersuchen will, einen Schreibstift in Bewegung setzen zu lassen. Natürlich braucht der Stift nicht immer direkt an dem Körper befestigt zu werden; man kann ihn auch in einer gewissen Entfernung von demselben anbringen, wenn er nur mit ihm so verbunden ist, daß die Bewegung des Körpers auf den Stift übertragen wird. Dies Verfahren wird vielfach von den Physiologen angewandt, um die Bewegungen im tierischen Körper graphisch darzustellen.

Wir erwähnen noch ein einfaches Mittel, durch welches man das Aufschreiben von Bewegungen, die innerhalb enger Grenzen stattfinden, weiter fortsetzen kann, als dem Umfang des Zylinders entspricht, ohne daß der bereits gezeichnete Teil einer Wellenlinie von einem später beschriebenen Teil geschnitten wird. Man kann dem Zylinder außer der Rotation eine Verschiebung in der Richtung der Achse geben, die ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit vor sich geht. Wenn dann der Schreibstift stillstände, so würde eine Schraubenlinie

entstehen; geht er dagegen hin und her, so bekommt man eine Wellenlinie, deren Punkte abwechselnd auf der einen und der anderen Seite der Schraubenlinie liegen. Wenn das Papier in eine Ebene ausgebreitet wird, so würde die Schraubenlinie eine gerade Linie geben, die in bezug auf die erzeugenden Linien schief steht; die Wellenlinie, welche auf dem fortschreitenden Zylinder entsteht, befindet sich in einer ebensolchen Lage.

§ 58. **Anwendung der graphischen Methode auf die Zeitmessung.** Wenn die Schwingungen einer Stimmgabel auf einen Zylinder aufgezeichnet werden, dem durch ein Uhrwerk eine gleichförmige Bewegung von bekannter Geschwindigkeit erteilt wird, so kann man aus der Anzahl der Wellen, die die erhaltene Linie auf dem Zylinderumfang aufweist, die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde und folglich die Schwingungszeit ableiten. Ebenso kann bei jeder Linie, die durch einen beweglichen Stift auf den Zylinder gezeichnet wird, die Zeit, in welcher ein gewisser Teil beschrieben wurde, aus dem Abstand der erzeugenden Linien gefunden werden, die durch die Endpunkte dieses Teils gezogen werden.

Man hat verschiedene Mittel ersonnen, die es ermöglichen, immer mit Hilfe eines gleichförmig rotierenden Zylinders, die Dauer einer Erscheinung oder die Zeit zwischen zwei Erscheinungen zu messen. Man kann z. B. dem Zylinder gegenüber einen Stift anbringen, der sich selbst überlassen die geschwärzte Oberfläche nicht berührt, der aber in senkrechter Richtung für einen Augenblick gegen den Zylinder gedrückt werden kann. Tut man dies in den beiden Augenblicken, deren zeitlichen Abstand man zu wissen wünscht, so bekommt man zwei Punkte, deren Abstand man dann messen kann. Anstatt den Stift gegen den Zylinder zu drücken, kann man ihm auch eine feste Stellung geben und von seinem Ende einen elektrischen Funken nach dem Zylinder überspringen lassen, wodurch etwas von dem Ruß weggeschlagen wird. Endlich kann man den Stift ununterbrochen in Berührung mit dem Zylinder lassen und es so einrichten, daß er in der Richtung der erzeugenden Linien etwas verschoben werden kann, aber so, daß er nachher sofort in die ursprüngliche Stellung zurückkehrt. Dann bekommt man eine Linie wie die in Fig. 59 ab-

gebildete; der Abstand der Punkte b und e ist das Maß für die Zeit zwischen den beiden Augenblicken, in denen der Stift verschoben wurde, während aus der Länge von cd hervorgeht, wie lange er in der neuen Stellung geblieben ist.



Fig. 59.

Die schiefe Stellung von bc und ef ist eine Folge davon, daß während der Verschiebung des Stiftes der Zylinder sich eine kleine Strecke weitergedreht hat. Erfolgt die Verschiebung des Stiftes sehr schnell, so stehen (Fig. 60) bc und ef nahezu senkrecht auf ab.

Fig. 60.

§ 59. **Chronographen.** Wenn der Zylinder nicht mit konstanter Geschwindigkeit rotiert, kann man doch die Dauer von Erscheinungen, deren Lauf auf seiner Oberfläche aufgezeichnet oder *registriert* wird, ermitteln, wenn man zugleich eine zweite Erscheinung aufzeichnet, die sich in bekannten Zwischenzeiten wiederholt.

Wir setzen in den folgenden Beispielen voraus, daß der Zylinder vertikal steht.

a) Man kann mit Hilfe eines Uhrwerkes einen Stift, der ununterbrochen mit dem Zylinder in Berührung ist, jede Sekunde während einer kurzen Zeit nach oben verschieben, wodurch man eine Linie wie L_1 in Fig. 61 bekommt. Wird nun

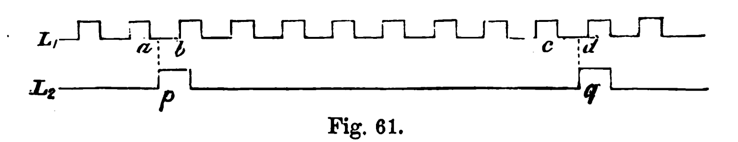


Fig. 61.

durch einen zweiten Stift, der die Linie L_2 zeichnet und der vertikal unter dem ersten steht, bei p und q der Anfang und das Ende einer gewissen Zeit registriert, so kann man, wenn man nachher vertikale Linien durch p und q zieht, die Dauer dieser Zeit auf L_1 ablesen. Dabei können auch Bruchteile einer Sekunde bestimmt werden, wenn man annimmt, daß während einer Sekunde die Bewegung des Zylinders gleich-

förmig gewesen ist. In der Figur ist die verlaufene Zeit 8,3 Sekunden.

b) Man kann die Anzahl der Schwingungen, die eine Stimmgabel in einer Sekunde macht, bestimmen, wenn man unter dem Stift, der die Schwingungen aufzeichnet, einen zweiten anbringt, der in bekannten Zeitintervallen auf dem Zylinder Marken wie die bei p und q in Fig. 61 oder andere Zeichen macht.

c) Kurze Zeiten können gemessen werden, wenn man über eine Stimmgabel verfügt, die in der Sekunde eine bekannte Anzahl von Schwingungen macht. In Fig. 62 wird durch ab

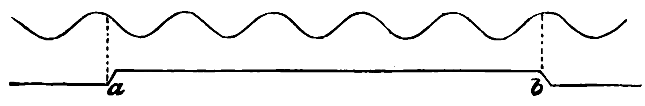


Fig. 62.

die Dauer einer zu untersuchenden Erscheinung dargestellt, während die obere Linie der Stimmgabel angehört, die als Zeitmesser dient. Die beiden Schreibstifte stehen am besten wieder auf derselben vertikalen Linie. Die durch ab angegebene Zeit beträgt dann 4,8 Schwingungszeiten.

Ist auch der untere Schreibstift mit einem schwingenden Körper verbunden, so kann man die Schwingungszeit dieses letzteren finden, indem man ermittelt, wieviel Wellen durch die beiden Stifte in derselben Zeit beschrieben werden.

d) Eine Abänderung dieser Methode besteht darin, daß man in den Augenblicken, deren Zeitabstand man ermitteln will, aus dem Stift, der mit einer bekannten Periode schwingt, einen elektrischen Funken auf den Zylinder überspringen läßt. Man bekommt dann eine Zeichnung wie in Fig. 63.

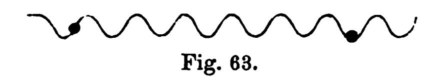


Fig. 63.

Apparate, die dazu dienen, auf einem rotierenden Zylinder oder auf einem fortgeschobenen Papierstreifen Marken anzubringen, die bestimmten Zeiten entsprechen, werden *Chronographen* genannt.

§ 60. **Andere Methode, eine graphische Darstellung des Falles eines Körpers zu bekommen.** Ein Schreibstift, der am

Ende einer schwingenden Feder befestigt ist, befindet sich, solange diese sich selbst überlassen wird, im Punkt *O* (Fig. 64), der „Gleichgewichtslage", und geht, wenn er nach *A* verschoben und hier losgelassen wird, auf der horizontalen Linie *AB* hin und her. Er ist fortwährend in Berührung mit einer vertikalen Platte, die in der Richtung *PO* fallen kann; auf diese Platte würde die Linie *OP* gezeichnet werden, wenn der Stift während des Fallens in Ruhe wäre. Werden aber der Stift und die Platte beide bewegt, und zwar so, daß der Fall in dem Augenblick anfängt, in welchem der Stift in *A* losgelassen wird, so bekommt man die Linie *ACDE*. Die Entfernungen zwischen den Punkten *a*, *b*, *c*, *d*, in denen diese Linie *OP* schneidet, sind die Wege, welche die Platte zwischen den aufeinander folgenden Augenblicken zurückgelegt hat, in denen der Schreibstift durch die Gleichgewichtslage geht. Da diese Augenblicke gleichweit auseinanderliegen, müssen, wie aus dem Gesetz des freien Falles (§ 54, b) abgeleitet werden kann, *ab*, *bc*, *cd* eine arithmetische Reihe bilden.

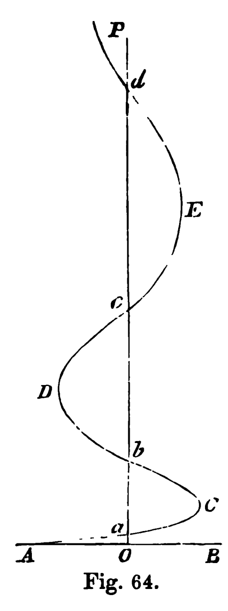


Fig. 64.

Aus der Gestalt der Linie kann man auch ersehen, daß
ı die Feder immer weniger weit von ihrer Gleichgewichts-
ʒe entfernt.

ʾ 61. **Geschwindigkeit bei einer nicht gleichförmigen Be-
ɣ.** Bei einer derartigen Bewegung spricht man zunächst
r *mittleren Geschwindigkeit während einer gewissen Zeit* und
ı von der *Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblick.*
ınter der mittleren Geschwindigkeit versteht man die
windigkeit, die der Körper bei gleichförmiger Bewegung
haben müssen, um in der betreffenden Zeit denselben
; zurückzulegen, den er in Wirklichkeit durchlaufen hat.
mittlere Geschwindigkeit wird daher gefunden, indem man
Weg durch die Zeit dividiert.

Unter der Geschwindigkeit in einem bestimmten Augen-

blick versteht man den Grenzwert, welchem sich die mittlere Geschwindigkeit für eine gewisse auf diesen Augenblick folgende Zeit nähert, wenn man sich die Länge der letzteren dem Wert Null nähern läßt.

Man kann diese Bestimmung auch so aussprechen: *Die Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblick wird gefunden, wenn man den in einer unendlich kleinen Zeit zurückgelegten Weg durch diese Zeit dividiert.*

Wenn ein Zeitintervall *sehr klein* ist, so ist die für dasselbe geltende mittlere Geschwindigkeit nur wenig verschieden von dem genannten Grenzwert und kann als Näherungswert an dessen Stelle genommen werden. Wenn z. B. ein Eisenbahnzug in einer Minute einen Weg von 1200 m zurücklegt, so ist die Geschwindigkeit am Anfang dieser Minute wohl nicht nennenswert verschieden von 20 m pro Sekunde, aber hätte man nur beobachtet, daß in 30 Minuten ein Weg von 32400 m durchlaufen wird, so würde man vielleicht einen merklichen Fehler begehen, wenn man annähme, die Anfangsgeschwindigkeit sei

$$\frac{32400}{30 \times 60} = 18 \text{ m pro Sekunde}$$

gewesen.

Die graphische Darstellung der Bewegungen kann dazu dienen, das Gesagte zu erläutern. Zunächst sieht man leicht ein, daß bei einer gleichförmigen Bewegung wie die durch die gerade Linie von Fig. 53 dargestellte die Geschwindigkeit durch die Tangente des Winkels gegeben wird, den AB mit OT macht. Ebenso wird bei einer Bewegung, die durch die krumme Linie von Fig. 12 dargestellt wird, wenn man OX als Achse der Zeiten und OY als Achse der Wege wählt, die mittlere Geschwindigkeit für die durch AC ausgedrückte Zeit durch $\operatorname{tg} QPX'$ bestimmt. BQ ist nämlich der zurückgelegte Weg, also BQ/AC die mittlere Geschwindigkeit. Die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit AC' wird durch $\operatorname{tg} Q'PX'$ gegeben und die Geschwindigkeit für den durch A angedeuteten Augenblick durch die Tangente des Winkels, den die Berührungslinie PR mit PX' macht.

§ 62. **Berechnung der Geschwindigkeit, wenn das Gesetz der Bewegung gegeben ist.** Wir drücken s durch die Zeit t aus und fragen nach der Geschwindigkeit v für eine bestimmte

Zeit t. Um diese zu finden, betrachten wir ein auf diesen Augenblick folgendes Zeitteilchen Δt. Am Ende desselben ist die Zeit $t + \Delta t$, und setzt man dies in die Formel, die s als Funktion von t darstellt, an Stelle von t ein, so findet man, wie groß s in dem neuen Augenblick ist.

Man hat dann zwei Werte von s aus der Formel berechnet, von denen der eine für die Zeit t, der andere für die Zeit $t + \Delta t$ gilt. Die Differenz derselben kann man die Zunahme von s nennen und mit Δs bezeichnen; sie ist der Weg, der in der Zeit Δt durchlaufen wird. Die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit Δt ist nun

$$\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

und die wahre Geschwindigkeit zur Zeit t ist der Grenzwert, dem sich dies Verhältnis nähert, wenn Δt immer kleiner wird. Man kann also schreiben (§ 39)

$$v = \text{Lim}\,\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Bei dem Abnehmen von Δt muß t selbst unverändert gelassen werden; diese Größe gibt nämlich den im voraus festgestellten Augenblick an, für den man die Geschwindigkeit sucht.

Man findet also, sobald s als Funktion der Zeit t gegeben ist, die Geschwindigkeit durch Differenzieren (§ 40). Dabei verdient bemerkt zu werden, daß, wenn wir für dt eine positive Zunahme der Zeit wählen, ds positiv oder negativ ausfallen kann, je nachdem der Ort des beweglichen Punktes am Ende des [illegible]telementes dt in bezug auf den Ort am Anfang desselben [illegible] derjenigen Seite liegt, nach welcher man s positiv rechnet [illegible] nach der entgegengesetzten Seite. Die vermittelst der ge[illegible]ten Formel berechnete Geschwindigkeit v ist also positiv, [illegible] die Bewegungsrichtung mit der Richtung übereinstimmt, [illegible]r man s positiv nennt, und negativ im entgegengesetzten Fall.

§ 63. Anwendung auf den freien Fall. Gleichförmig be[illegible]unigte Bewegung. Beschleunigung. Bei einem fallenden [illegible]per, für den die Formel (1) (§ 54, b) gilt, wird der in der [illegible] $t + \Delta t$ zurückgelegte Weg $a(t + \Delta t)^2$. Daraus folgt

$$\Delta s = a(t + \Delta t)^2 - at^2 = 2at\Delta t + a(\Delta t)^2,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + a\Delta t$$

und

$$v = 2at \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Also: *Beim freien Fall ist die Geschwindigkeit proportional der Zeit, während der die Bewegung stattgefunden hat*; oder auch: *in aufeinander folgenden gleichen Zeitteilen nimmt die Geschwindigkeit jedesmal um denselben Betrag zu.*

Eine Bewegung, bei welcher dies letztere der Fall ist, wird *gleichförmig beschleunigt* genannt. Unter der *Beschleunigung* versteht man dabei die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit.

Der freie Fall ist natürlich nicht die einzige gleichförmig beschleunigte Bewegung. In jeder Richtung und mit jedem Wert von a kann man sich eine Bewegung vorstellen, die der Gleichung (1) entspricht.

An Stelle des in der ersten Sekunde zurückgelegten Weges kann man die *Beschleunigung* einführen, um die gleichförmig beschleunigte Bewegung näher zu beschreiben. Nach Gleichung (3) ist die Beschleunigung $2a$. Für den freien Fall wird sie gewöhnlich mit g bezeichnet. Die Formeln (3) und (1) werden dann

$$v = gt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man die Geschwindigkeit berechnen, die ein Körper bekommt, wenn er von einer Höhe s herabfällt. Aus (5) folgt für die Dauer des Falles

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und dann aus (4) für die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gs} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Was die Messung der Beschleunigung beim freien Fall betrifft, so bemerken wir, daß man die genauesten Resultate nicht durch direkte Beobachtung eines fallenden Körpers, sondern in einer anderen Weise bekommen hat, die wir später kennen lernen werden.

Da alle Körper gleich schnell fallen, so ist g für alle gleich groß. Man hat ferner gefunden, daß die Beschleunigung

an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche ungleiche Werte hat. Je mehr man sich den Polen nähert, desto schneller fallen die Körper, und der Wert von g wird größer. Hier folgen einige der für g erhaltenen Werte; als Längeneinheit ist dabei das Zentimeter und als Zeiteinheit die Sekunde benutzt.

Breite	Fallbeschleunigung
0°	978,1
45°	980,6
52°	981,2
90°	983,1

Der Wert von g ist für Königsberg 981,4, für Berlin 981,2, für Wien 980,8.

§ 64. **Vertikal in die Höhe geworfener Körper.** Die Beobachtung hat gelehrt, wie bereits in § 48 erwähnt wurde, daß die erst steigende und dann fallende Bewegung eines solchen Körpers die Eigenschaft hat, die wir durch Fig. 42 (S. 66) ausdrückten. Man kann daraus das Folgende ableiten.

a) Die Geschwindigkeit des Körpers ist gleich groß in zwei Augenblicken, die gleich viel vor und nach dem Zeitpunkt liegen, in welchem die Bewegung umgekehrt wird. Der Weg z. B., der in Fig. 42 zwischen den Zeiten 1 und 1,0001 zurückgelegt wird, ist derselbe wie derjenige, welcher zwischen den Zeiten 6,9999 und 7 durchlaufen wird.

b) Da während des Fallens die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um g zunimmt, muß sie während des Steigens in jeder Sekunde um g abnehmen. So ist z. B. in Fig. 42 der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten in den Augenblicken 1 und 2 derselbe wie zwischen den Geschwindigkeiten in den Augenblicken 7 und 6.

Weil bei einem vertikal in die Höhe geworfenen Körper in aufeinander folgenden gleichen Zeiten die Geschwindigkeit jedesmal *um denselben Betrag* abnimmt, wird die Bewegung eines solchen Körpers *gleichförmig verzögert* genannt.

c) Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit v_0 vertikal in die Höhe geworfen, so muß, da in jeder Sekunde die Geschwindigkeit um g abnimmt, nach

$$t = \frac{v_0}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Sekunden die Geschwindigkeit gleich Null geworden sein. Dies ist die Zeit, welche für das Steigen, und ebenso die Zeit, die für das Fallen gebraucht wird.

Die Höhe h, die der Körper erreicht, ist zugleich der Weg, den er beim Fallen in der Zeit (8) zurücklegt. Aus Formel (5) folgt daher

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

§ 65. **Zusammensetzung von zwei Geschwindigkeiten.** Wir wollen annehmen, eine Ebene, z. B. das Deck eines Schiffes, bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer Richtung, die in der Ebene selbst liegt, und ein Körper bewege sich in der Ebene, z. B. es rolle eine Kugel über das Deck des Schiffes. Man kann dann auf die *Punkte der Ebene* achten, in denen sich der Körper, jedesmal nach gleichen Zeiten, befindet. Die Lage dieser Punkte bestimmt die Bewegung, die der Körper für einen Beobachter zu haben scheint, der selbst auf der Ebene steht und an der Bewegung derselben teilnimmt, vielleicht ohne etwas davon zu bemerken. Diese *scheinbare* Bewegung wird auch die *relative* Bewegung des Körpers in bezug auf die Ebene genannt; sie muß von der *wahren* oder *absoluten* Bewegung unterschieden werden, von der man eine Vorstellung bekommt, wenn man untersucht, welche *Punkte des Raumes* der Körper nacheinander erreicht.

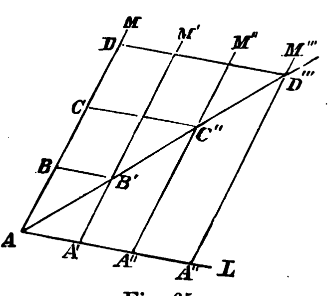


Fig. 65.

Wir nehmen nun an, daß die relative Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung einer geraden Linie in der Ebene stattfindet. Diese Linie ist in Fig. 65 mit AM bezeichnet; A, B, C, D sind die in gleichen Abständen voneinander liegenden Punkte der Linie, in denen sich der Körper in Augenblicken befindet, die in Zwischenzeiten = 1 aufeinander folgen, also in Augenblicken, die wir mit 0, 1, 2, 3 bezeichnen können. Wir müssen nun auf die Bewegung der Linie selbst bei der Verschiebung der Ebene achten; wir nehmen an, daß diese Verschiebung in der Richtung AL mit

der Geschwindigkeit AA' stattfindet. Hat die Linie die Lage AM zur Zeit 0, so werden die Lagen von A in den Augenblicken 1, 2, 3 dargestellt durch A', A'', A''', wenn man $A'A'' = A''A''' = AA'$ macht. Die Linie selbst, welche parallel zu sich selbst fortschreitet, hat nacheinander die Lagen $A'M'$, $A''M''$, $A'''M'''$.

Während sich der Körper zur Zeit 0 im Punkt A des Raumes befindet, befindet er sich zur Zeit 1 in demjenigen Punkt von $A'M'$, in den B gekommen ist, also im Punkt B', den man erhält, wenn man durch B eine Linie parallel zu AL zieht; alle Punkte von AM verschieben sich nämlich in derselben Richtung. Aus der Figur ist zu ersehen, wie in derselben Weise die wahren Orte C'' und D''' des Punktes für die Augenblicke 2 und 3 gefunden werden. Man sieht nun leicht, daß A, B', C'', D''' auf einer geraden Linie liegen; daß diese wirklich die wahre Bahn des Körpers ist, wird durch Betrachtung der Lagen bestätigt, die er in Zeitpunkten hat, die zwischen den Augenblicken 0 und 1, 1 und 2 usw. liegen. Ferner ist $AB' = B'C'' = C''D'''$, und da dies auch der Fall sein würde, wenn AB, BC usw., AA', $A'A''$ usw. nicht die Wege in Zeiteinheiten, sondern in beliebigen gleichen Zeiten vorstellten, so ist die absolute Bewegung des Körpers gleichförmig.

Die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist AB'; *man kann, wie man sieht, diese Geschwindigkeit dadurch finden, daß man die Geschwindigkeit AA' der Ebene und die Geschwindigkeit AB, die der Körper in bezug auf die letztere hat, nach der Regel, die wir in § 27 für die Zusammensetzung von Vektoren gegeben haben, zusammensetzt.*

Zu demselben Schluß kommt man auch, wenn die Bewegung des Körpers auf der Ebene und die Verschiebung der letzteren in der Richtung AL mit veränderlicher Geschwindigkeit stattfinden. Für die Dauer sehr kurzer (eigentlich unendlich kleiner) Zeiten kann man auch dann noch beide Bewegungen als gleichförmig betrachten. Es sei nun (Fig. 66) A der Ort im Raum, an welchem sich der bewegliche Körper in einem

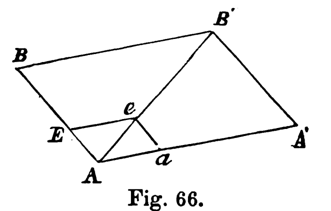


Fig. 66.

gewissen Augenblick befindet, E die Lage, welche er nach einer sehr kurzen Zeit erreicht haben würde, wenn die Ebene in Ruhe wäre. Wenn sich nun während dieser Zeit der Punkt A bis nach a, und die Linie AE bis nach ae fortbewegt hat, so ist der Eckpunkt e des Parallelogramms $AaeE$ der neue Ort des Körpers im Raum.

Die Linien Aa, AE und Ae stellen also die ein und derselben sehr kleinen Zeit entsprechenden Wege bei der Bewegung der Ebene, bezw. der relativen und der absoluten Bewegung des Körpers dar. Die diesen Bewegungen entsprechenden Geschwindigkeiten müssen die Richtung der drei Linien haben und der Länge derselben proportional sein; hieraus folgt (§ 28), daß die dritte Geschwindigkeit durch die Diagonale AB' des Parallelogramms dargestellt wird, dessen Seiten AA' und AB die beiden anderen Geschwindigkeiten angeben.

Von einem Körper wie der hier betrachtete pflegt man zu sagen, daß er *zwei Geschwindigkeiten zugleich* hat, nämlich die relative Geschwindigkeit in bezug auf die Ebene und die Geschwindigkeit dieser letzteren.

Dieser Ausdrucksweise gemäß wollen wir unter der Aussage „ein Körper habe zwei Geschwindigkeiten“ immer verstehen, daß er diejenige Geschwindigkeit hat, welche man erhält, wenn man diese beiden nach der Regel von § 27 zusammensetzt.

Die Bezeichnungen „Parallelogramm der Geschwindigkeiten“, „resultierende Geschwindigkeit“, „Zerlegen einer Geschwindigkeit“, „Geschwindigkeitskomponenten“ bedürfen nach dem in § 27 gesagten keiner weiteren Erläuterung mehr. Wir bemerken nur noch das Folgende:

a) *Haben die beiden Geschwindigkeiten, die man zusammenzusetzen hat, dieselbe oder entgegengesetzte Richtung, so ist die resultierende Geschwindigkeit gleich ihrer Summe oder ihrer Differenz.* Hiervon kann man sich leicht überzeugen, indem man einen Körper betrachtet, der sich in einer gewissen Richtung in einer Ebene bewegt, während diese Ebene in derselben oder in der entgegengesetzten Richtung fortgeschoben wird.

Zwei entgegengesetzte und gleiche Geschwindigkeiten haben die Resultierende Null. Ein Beispiel hat man in einer Person, die ein Boot mit einer Stange fortschiebt.

Nachdem wir jetzt festgesetzt haben, was wir unter der Zusammensetzung oder Vereinigung zweier Geschwindigkeiten von entgegengesetzter Richtung zu verstehen haben, können wir die Geschwindigkeitsänderung eines vertikal in die Höhe geworfenen Körpers (§ 64) auch in folgender Weise beschreiben:

Ein Körper, welcher vertikal in die Höhe steigt, bekommt — ebensogut wie ein fallender Körper — in jeder Sekunde zu der Geschwindigkeit, die er bereits hat, eine Geschwindigkeit g vertikal nach unten.

b) Ein Körper kann auch mehr als zwei Geschwindigkeiten zugleich haben; die wahre Geschwindigkeit wird dann immer nach den für Vektoren gegebenen Regeln gefunden. Ein fallender Stein z. B. hat in bezug auf die Erde die Bewegung, welche wir kennen gelernt haben, aber er nimmt außerdem teil an der Rotation der Erde um ihre Achse, an der fortschreitenden Bewegung unseres Planeten um die Sonne, endlich an der Bewegung des ganzen Sonnensystems durch den Weltraum. Die absolute Bewegung eines Körpers wird von uns niemals beobachtet; bei den Erscheinungen auf der Erde, soweit wir sie betrachten werden, kann jedoch meistens von der Bewegung der Erde abgesehen und die relative Bewegung, die wir beobachten, als die wirkliche Ortsveränderung angesehen werden.

§ 66. **Beschleunigung bei einer beliebigen geradlinigen Bewegung.** Im allgemeinen betrachtet man als Maß für die Beschleunigung bei einer solchen Bewegung die *Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit*, abgeleitet aus der Änderung, welche die Geschwindigkeit in einer unendlich kleinen Zeit erleidet; man berechnet also die Beschleunigung dadurch, daß man die Änderung der Geschwindigkeit während einer unendlich kleinen Zeit durch die Länge dieser Zeit dividiert. Bezeichnet man eine unendlich kleine Zeit mit dt und die Änderung der Geschwindigkeit v während dieser Zeit mit dv, so ist die Beschleunigung

$$q = \frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Man kann die Berechnung ausführen, sobald v als Funktion der Zeit t gegeben ist.

Wir bemerken bei dieser Formel noch das Folgende. Hat ı in der Bahn des Punktes eine bestimmte Richtung als

die positive gewählt, dann gibt (§ 62) das Vorzeichen der Geschwindigkeit v die Richtung der Bewegung an. Auch der Wert, den man für q findet, kann sowohl negativ als positiv sein. Dem entsprechen die verschiedenen Richtungen, die die Beschleunigung haben kann. Ist q positiv, so bedeutet dies, daß man, um die Geschwindigkeit am Ende der Zeit dt zu bekommen, die Geschwindigkeit am Anfang derselben mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit in der positiven Richtung zusammensetzen muß; wenn q negativ ist, so bedeutet dies, daß die unendlich kleine Geschwindigkeit, die zu der Geschwindigkeit, die der Punkt bereits hat, hinzukommt, die negative Richtung hat.

Haben q und v dasselbe Vorzeichen, also die Beschleunigung und die Geschwindigkeit dieselbe Richtung, so ist die Bewegung im eigentlichen Sinne des Wortes beschleunigt, dagegen ist sie verzögert, wenn q und v entgegengesetztes Vorzeichen haben.

§ 67. **Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit eines Punktes und derjenigen seiner Projektion auf eine feste gerade Linie.** Sind zwei Körper so miteinander verbunden, daß die Bewegung des einen eine Folge von der des anderen ist, so hängen auch die gleichzeitigen Geschwindigkeiten miteinander zusammen. Die Geschwindigkeit des Punktes Q in Fig. 49 hängt von derjenigen des Punktes P ab, und in ähnlicher Weise wird die Geschwindigkeit aller Teile einer Dampfmaschine von derjenigen des Kolbens bestimmt. Wird die Zeit, in welcher dieser hin- und hergeht, vergrößert oder verkleinert, so ändern sich alle Geschwindigkeiten in der Maschine in demselben Verhältnis.

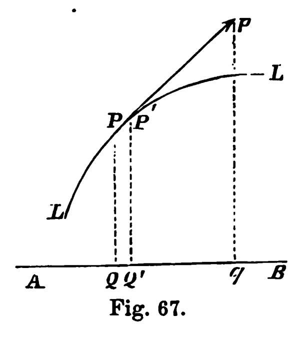


Fig. 67.

Wir wollen uns jetzt vorstellen, daß sich ein Punkt P (Fig. 67) auf der krummen Linie L bewegt, und wollen ihn in jedem Augenblick auf die gerade Linie AB projizieren. Während dann P den unendlich kleinen Weg PP' durchläuft, geht die Projektion Q um die Strecke QQ' weiter; die Geschwindigkeiten von P und Q verhalten sich also wie PP' und QQ'.

Man kann für jeden Punkt die Geschwindigkeit durch

eine gerade Linie darstellen, die in der Richtung der Bewegung gezogen ist und deren Länge die Größe der Geschwindigkeit angibt. Dieser Vektor (§ 27) muß für P in die Richtung der Linie fallen, die die Bahn in P berührt, und für Q in die Richtung von AB. Wenn Pp die Geschwindigkeit von P ist, so findet man die von Q, nämlich Qq, indem man die vierte Proportionale zu PP', QQ' und Pp sucht. Da nun der unendlich kleine Bogen PP' mit der Tangente zusammenfällt, bekommt man die vierte Proportionale, wenn man p auf AB projiziert. Wir erhalten also die Regel: *Die Geschwindigkeit der Projektion eines Punktes ist die Projektion der Geschwindigkeit des Punktes.*

Befindet sich P in einem Punkt der Bahn, in welchem die Tangente parallel AB ist, so ist die Geschwindigkeit der Projektion ebenso groß wie die Geschwindigkeit von P; in jedem anderen Fall ist sie kleiner. Steht die Tangente an der Bahn senkrecht auf AB, so ist die Geschwindigkeit der Projektion gleich Null. Das Gesagte gilt auch, wenn die Bahn und die gerade Linie nicht in *einer* Ebene liegen.

§ 68. **Zerlegung einer krummlinigen Bewegung in einer Ebene in zwei geradlinige Bewegungen.** Wir können den Punkt P, welcher sich auf der krummen Linie L bewegt, auf *zwei* Linien in der Ebene der Bahn, z. B. auf die zueinander senkrechten Koordinatenachsen OX und OY (Fig. 68) projizieren. Die Projektionen P_1 und P_2 bewegen sich auf OX und OY, und wenn man weiß, *wie* sie dies tun, so kann man für jeden Augenblick auch die Lage von P bestimmen.

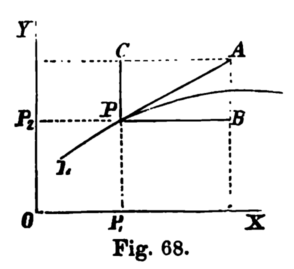


Fig. 68.

Man pflegt zu sagen, *daß der Punkt P die Bewegungen der beiden Projektionen, in der Figur also eine Bewegung nach rechts und eine Bewegung nach oben, zugleich hat.*

Dabei ist die Geschwindigkeit des Punktes die Resultante der Geschwindigkeiten, die die Projektionen in demselben Augenblick haben. Wird nämlich die Geschwindigkeit PA in PB und PC, parallel zu OX und OY, zerlegt, so sind diese Komponenten leich den Projektionen von PA auf die Achsen, also nach

dem vorhergehenden Paragraphen gleich den Geschwindigkeiten von P_1 und P_2.

Jede Bewegung eines Punktes im Raum kann dadurch beschrieben werden, daß man angibt, wie sich seine Projektionen auf drei zueinander senkrechten Achsen bewegen. Die Geschwindigkeit des Punktes wird auch hier für jeden Augenblick dadurch gefunden, daß man die Geschwindigkeiten der Projektionen miteinander zusammensetzt.

§ 69. **Geschwindigkeit und Beschleunigung bei einer einfachen Schwingung.** Wir können jetzt die Geschwindigkeit bei einer einfachen Schwingung bestimmen, indem wir bedenken, daß diese der Definition gemäß die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung ist. Der Punkt P, der in Fig. 47 (S. 68) den Kreisumfang durchläuft, hat die konstante Geschwindigkeit $2\pi a/T$ (S. 72); diese Geschwindigkeit hat auch der Punkt Q in dem Augenblicke, in welchem er durch den Mittelpunkt O geht. Dagegen ist in A und in B die Geschwindigkeit des Punktes einen Augenblick gleich Null.

Will man die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt Q finden, so muß man $2\pi a/T$ mit dem Cosinus des Winkels multiplizieren, den die Bewegungsrichtung von P mit OA macht. Dieser Winkel ist um $\frac{1}{2}\pi$ größer als der Winkel zwischen OA und OP; die gesuchte Geschwindigkeit ist also, wenn wir die Bewegung durch die Formel (2) darstellen,

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{2\pi a}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \qquad (11)$$

Man wird sich leicht davon überzeugen, daß diese Formel den Wechsel in der Richtung der Geschwindigkeit richtig zum Ausdruck bringt.

Aus (11) kann nun weiter die Beschleunigung q abgeleitet werden. Wir wollen die Berechnung nicht mitteilen und uns auf das Resultat

$$q = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

beschränken. Vergleicht man dies mit der Gleichung (2) (S. 72), so sieht man, daß die Beschleunigung gefunden wird, indem man die Entfernung des Punktes von O mit einem konstanten Faktor multipliziert; man hat nämlich

$$q = -\frac{4\pi^2}{T^2} s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Beschleunigung immer nach O gerichtet ist, was auch leicht einzusehen ist; aus dem soeben über die Geschwindigkeit Gesagten geht nämlich ohne weiteres hervor, daß die Bewegung von A oder B nach O hin beschleunigt und die Bewegung von O hinweg verzögert ist.

Die durch (13) ausgedrückte Proportionalität der Beschleunigung mit der Entfernung s ist ein wichtiges Kennzeichen der einfachen Schwingung.

Man kann (11) erhalten, indem man die Funktion $s = a \cos (2 \pi t / T)$ in der in § 40, e angegebenen Weise differenziert; ebenso findet man die Beschleunigung (12) dadurch, daß man den Wert (11) der Geschwindigkeit differenziert.

§ 70. **Bewegung eines in beliebiger Richtung in die Höhe geworfenen Körpers.** Wenn man mit konstanter Geschwindigkeit in horizontaler Richtung fortschreitet, kann man einen Ball in einer Richtung emporwerfen, die man, wenn man nicht auf seine eigne Bewegung achtet, für vertikal hält; man sieht den Ball vertikal über sich aufsteigen und wieder niederfallen, so daß man ihn nach einiger Zeit mit der Hand auffangen kann. Ebenso kann man auf einem Schiff, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, den Ball fallen lassen oder vertikal in die Höhe werfen, ohne daß man an der Bewegung derselben merkt, daß das Schiff nicht stillsteht.

Wir können daher sagen: *Auf einer vertikalen Linie, die mit konstanter Geschwindigkeit in horizontaler Richtung verschoben wird, kann ein Körper in derselben Weise steigen und fallen wie auf einer stillstehenden Linie.*

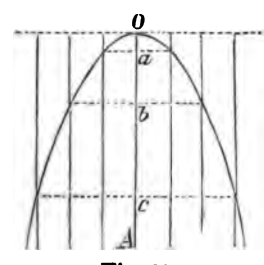


Fig. 69.

In Fig. 69 sind die Lagen der vertikalen Linie für einige Augenblicke angegeben, die in gleichen Zwischenzeiten aufeinander folgen; OA ist die Lage zur Zeit, wenn der Körper seine größte Höhe erreicht hat. Wir nehmen an, daß er sich dann in O befindet. Die Projektion des Körpers auf A hat dieselbe Bewegung wie ein vertikal in die Höhe geworfener und dann wieder fallender Körper; a, b, c sind die

Stellen, an welchen sie sich in Augenblicken befindet, in denen die vertikale Linie die verschiedenen in der Figur angegebenen Stellungen einnimmt (vgl. Fig. 42, S. 66). In der Figur sind nun in einer Weise, die keiner weiteren Erklärung bedarf, die Stellen im Raume bestimmt, welche der Körper nacheinander einnimmt; die krumme Linie, die durch alle diese Stellen geht, die wirkliche Bahn des Körpers, ist eine Parabel.

Ein Ball, der von dem Beobachter im Schiff scheinbar vertikal in die Höhe geworfen wird, verläßt in Wirklichkeit die Hand mit einer Geschwindigkeit, die man erhält, wenn man die Geschwindigkeit, die der Beobachter dem Ball in vertikaler Richtung erteilte, mit der horizontalen Geschwindigkeit des Schiffes zusammensetzt. Nachdem der Ball die Hand verlassen hat, ist er vollkommen frei; dieselbe Bewegung, welche er jetzt bekommt, muß er daher auch haben, wenn er in anderer Weise eine Geschwindigkeit in schiefer Richtung bekommen hat, wenn z. B. ein stillstehender Beobachter ihn in dieser Richtung in die Höhe geworfen hat.

Ein in beliebiger Richtung in die Höhe geworfener Körper beschreibt daher eine Parabel. Die Bewegung der Horizontalprojektion ist gleichförmig und die Bewegung der Vertikalprojektion ist dieselbe wie die eines vertikal in die Höhe geworfenen Körpers.

Im Punkt O (Fig. 70) werde ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $Oa = v_0$ in die Höhe geworfen, und zwar in einer Richtung, die mit einer horizontalen Ebene den Winkel α bildet. Zerlegt man v_0 in eine horizontale Komponente $Op = v_0 \cos\alpha$ und eine vertikale $Oq = v_0 \sin\alpha$, so ist die erstere die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, die der Körper in horizontaler Richtung hat, während die Bewegung in vertikaler Richtung dieselbe ist wie die eines Körpers, der mit der Anfangsgeschwindigkeit Oq vertikal in die Höhe steigt. Hieraus können alle Einzelheiten der Bewegung auf der Parabel OAB abgeleitet werden.

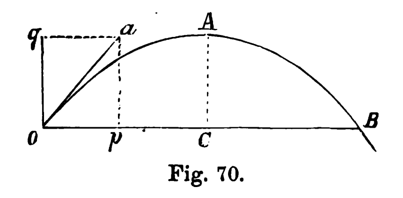


Fig. 70.

Ein mit der Geschwindigkeit $v_0 \sin\alpha$ aufsteigender Körper erreicht (§ 64) die Höhe

$$\frac{v_0 \sin^2 \alpha}{2g};$$

dies ist die Länge der Senkrechten AC vom höchsten Punkt der Parabel auf die horizontale Linie OB. Die Dauer des Steigens ist (§ 64)

$$\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

und der in dieser Zeit in horizontaler Richtung zurückgelegte Weg

$$OC = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \cdot v_0 \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Das Fallen längs AB dauert ebensolange wie das Steigen auf OA; hieraus folgt

$$OB = 2\,OC = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Folgerungen aus dieser Formel. Wird ein Körper mit derselben Geschwindigkeit erst in einer Richtung, die den Winkel α mit OB bildet, und dann in einer Richtung geworfen, die mit dieser Linie den Winkel $90° - \alpha$ bildet, so wird in beiden Fällen dieselbe Entfernung OB erreicht. Diese Entfernung ist am größten, wenn $\alpha = 45°$ ist.

§ 71. **Änderung der Geschwindigkeit bei der parabolischen Bewegung.** Die Geschwindigkeit des Körpers, der in der beschriebenen Weise eine Parabel durchläuft, kann in jedem Augenblick in eine horizontale und eine vertikale Komponente zerlegt werden. Während die erstere unverändert bleibt, kommt zu der letzteren während jeder Sekunde eine vertikal nach unten gerichtete Geschwindigkeit g hinzu.

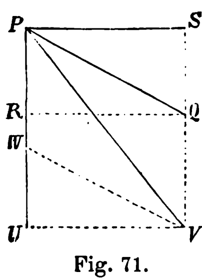


Fig. 71.

Um die Änderungen der Geschwindigkeit gut zu übersehen, kann man in einer Hilfsfigur (Fig. 71), immer aus demselben Punkt, Vektoren ziehen, die die Geschwindigkeit des Körpers für verschiedene Augenblicke darstellen.

Ist nun in einem bestimmten Augenblick die Geschwindigkeit PQ und sind ihre Komponenten PR und PS, so werden, wenn wir $RU = g$ machen, PU und PS die Geschwindigkeitskomponenten nach Verlauf einer Sekunde darstellen; die wirkliche Geschwindigkeit ist dann PV und man kann diese auch

aus PQ bekommen, indem man diese letztere Geschwindigkeit direkt mit $PW = g$, vertikal nach unten, zusammensetzt.

Man kann eine derartige Figur auch konstruieren für den Fall, daß die Geschwindigkeit zuerst schief *nach oben* gerichtet ist. Man sieht so, daß sowohl während des Steigens als während des Fallens in der Parabel der Körper in jeder Sekunde eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit g bekommt, die mit der bereits vorhandenen Geschwindigkeit zusammengesetzt wird.

In t Sekunden bekommt der Körper eine Geschwindigkeit gt zu derjenigen hinzu, die er bereits hat, so daß, wenn man die Geschwindigkeit für *einen* bestimmten Augenblick kennt, man die Geschwindigkeit für eine beliebige spätere Zeit unmittelbar durch Konstruktion eines Parallelogramms finden kann. Dabei kann t auch ein Bruch sein; während eines jeden auch noch so kleinen Zeitteilchens bekommt der Körper eine diesem Zeitteilchen proportionale Geschwindigkeit nach unten.

§ 72. **Beschleunigung bei einer krummlinigen Bewegung.**

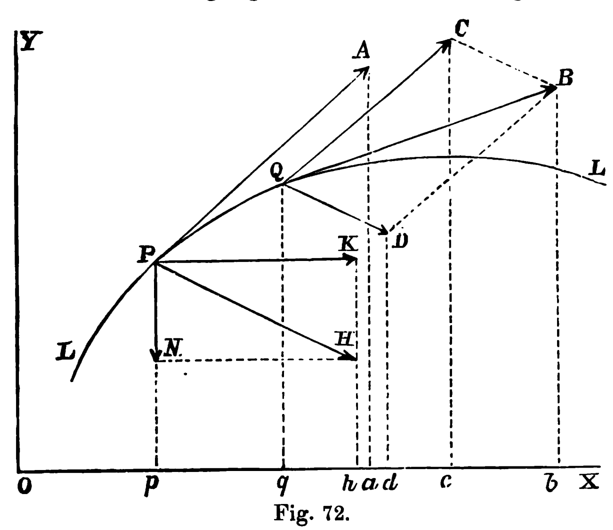


Fig. 72.

Wir wollen jetzt einen Körper betrachten, der sich in der einen oder anderen Weise auf einer krummen Linie LL (Fig. 72) bewegt. In einem bestimmten Augenblicke ist er in P und hat die Geschwindigkeit PA in der Richtung der

Tangente; nach einem Zeitelement τ ist er nach Q gekommen und hat die Geschwindigkeit QB, die im allgemeinen in Größe von PA verschieden ist.

Wenn Größe und Richtung unverändert geblieben wären so würde die Geschwindigkeit am Ende des Zeitelementes durch QC, parallel und gleich PA, dargestellt werden. Konstruiert man nun ein Parallelogramm, von dem QB die Diagonale und QC die eine Seite ist, so gibt die andere Seite QD die Geschwindigkeit an, die der Körper in der Zeit τ zu der bereits vorhandenen hinzubekommen hat. Wir dividieren diese Geschwindigkeit durch die Länge τ des Zeitelementes; dadurch finden wir die Geschwindigkeit, welche der Körper pro Zeiteinheit bekommen hat und die wir die *mittlere Beschleunigung* während der Zeit τ nennen können. Wir schreiben ihr die Richtung von QD zu.

Unter der *Beschleunigung im Punkt P* versteht man den Grenzwert, dem sich diese mittlere Beschleunigung nähert, wenn man die Zeit τ sich dem Wert Null nähern läßt. Die Richtung der Beschleunigung ist diejenige, welcher sich die Richtung von QD nähert, und die Größe q der Beschleunigung ist der Grenzwert des Verhältnisses QD/τ. Man kann die Beschleunigung durch einen Vektor PH von geeigneter Richtung darstellen, dessen Länge den Wert von q angibt.

Wenn man sagt, daß eine Beschleunigung q in der Richtung PH vorhanden ist, so meint man damit, daß der Körper in einer unendlich kleinen Zeit τ zu der Geschwindigkeit, die er bereits hat, eine Geschwindigkeit $q\tau$ in der Richtung PH hinzubekommt.

Das im vorhergehenden Paragraphen Gefundene können wir jetzt so ausdrücken, daß wir sagen, der Körper habe bei der parabolischen Bewegung eine vertikal nach unten gerichtete Beschleunigung g.

Es verdient bemerkt zu werden, daß es bei der vorhergehenden Betrachtung nicht nötig ist, daß die Bahn in einer Ebene liegt. Auch für eine beliebige Bewegung im Raum kann man die Beschleunigung in der angegebenen Weise definieren. Daß übrigens diese Definition zur Folge hat, daß bei einer krummlinigen Bewegung das Wort „Beschleunigung" in uneigentlichem Sinne gebraucht wird, ist leicht einzusehen.

Bei diesem Wort muß man nun nicht immer an ein Zunehmen der *Größe* der Geschwindigkeit denken.

§ 73. **Komponenten der Beschleunigung.** Wir wollen annehmen, daß die Linie LL, von der im vorhergehenden Paragraphen die Rede war, in einer Ebene liegt. Wir können dann zwei zueinander senkrechte Koordinatenachsen OX und OY annehmen, und sowohl den betrachteten materiellen Punkt als auch die Vektoren, welche die verschiedenen Geschwindigkeiten darstellen, auf diese Achsen projizieren. Wir wissen bereits, daß in jedem Augenblick die Projektion der Geschwindigkeit auf OX mit der Geschwindigkeit übereinstimmt, mit der sich die Projektion des Punktes auf dieser Achse bewegt. Diese letztere Geschwindigkeit ist also in den betrachteten Augenblicken pa und qb; da man für pa auch qc setzen kann, so wird die Zunahme der Geschwindigkeit durch cb und also auch durch qd, die Projektion von QD, dargestellt. Hieraus ergibt sich leicht, daß die mittlere Beschleunigung der Projektion in der Zeit τ, die die Richtung von qd und die Größe qd/τ hat, die Projektion der mittleren Beschleunigung des auf der krummen Linie sich bewegenden Punktes ist. Dieselbe Beziehung muß also auch zwischen den Grenzwerten dieser mittleren Beschleunigungen, d. h. zwischen den Beschleunigungen in einem bestimmten Augenblick bestehen. Wird diese Beschleunigung für den einen Punkt durch PH angegeben, so wird sie für den anderen durch ph dargestellt.

Hieraus folgt endlich, daß, wenn man den Vektor PH in die Komponenten PK und PN, parallel zu den Koordinatenachsen, zerlegt, diese die Beschleunigungen der Projektionen des betrachteten Punktes vorstellen.

Entsprechend der Ausdrucksweise, daß der Körper die Bewegungen in den Richtungen von OX und OY zugleich ausführt, sagen wir auch, daß er die Beschleunigungen PK und PN zugleich hat.

Überhaupt, wenn man sagt, daß ein Körper zwei oder mehr Beschleunigungen hat, so meint man damit, daß man die wirkliche Beschleunigung bekommt, wenn man diese Beschleunigungen nach der für Vektoren geltenden Regel zusammensetzt.

Es wird keine Schwierigkeit bieten, das Gesagte auf die Bewegung auf einer beliebigen Linie im Raum auszudehnen; man kann dann auf drei zueinander senkrechte Koordinatenachsen projizieren.

§ 74. **Bewegung eines Körpers, der äußeren Einflüssen entzogen ist.** Bis jetzt wurde nur über die Beobachtung und Beschreibung von Bewegungen gesprochen. Die Physiker wünschen aber auch die *Ursachen* der Ortsveränderung der Körper zu ermitteln oder wenigstens nachzuforschen, wie diese von verschiedenen Umständen abhängt. Wer ein Papierschnitzelchen nach einem darüber gehaltenen Glasstab, der mit einem seidenen Lappen gerieben und dadurch *elektrisiert* worden ist, emporsteigen sieht, wird in der Anwesenheit dieses Glasstabes die Ursache der Bewegung des Papierstückchens erblicken; er wird sagen, daß dieses von dem Glasstab *angezogen* wird. Dies ist zwar nicht mehr als eine Redensart, allein sie hat den Vorteil, die Aufmerksamkeit auf die Tatsache zu richten, daß das Papier nicht in die Höhe steigt, wenn der Stab nicht über dasselbe gehalten wird.

Ebenso können wir, sobald wir wahrgenommen haben, daß überall die Körper nach dem Mittelpunkt der Erde hin fallen, nicht umhin, die Anwesenheit der Erde als die Ursache dieser Bewegung zu betrachten.

In allen Fällen, in denen ein Körper aus dem Zustand der Ruhe in den Zustand der Bewegung übergeht, gelingt es einen anderen Körper zu finden, dessen Anwesenheit oder Zustand als die Ursache der Bewegung betrachtet werden kann.

Ist ein Körper allen äußeren Einflüssen entzogen, so beharrt er, wenn er in Ruhe ist, dauernd in diesem Zustand.

Um einzusehen, was geschieht, wenn ein solcher sich selbst überlassener Körper eine gewisse Geschwindigkeit hat, betrachten wir eine Kugel, die auf einem horizontalen Fußboden liegt. Offenbar wirken auf sie keine Einflüsse ein, die eine Bewegung hervorrufen können. Wir setzen nun die Kugel durch einen Schlag mit dem Hammer in Bewegung und beobachten, was nach diesem Schlag geschieht, also nachdem *die ursprüngliche Bewegungsursache aufgehört hat zu wirken.* Die Kugel beschreibt eine *gerade* Linie und kommt zur Ruhe, nachdem sie eine Strecke durchlaufen hat, die von der Beschaffenheit der Oberfläche des Fußbodens und der Kugel abhängt; je glatter wir beide machen, desto länger dauert die Bewegung. So kommt man zu der Vorstellung, daß die Unebenheiten der Oberflächen die Ursache der Verzögerung der Bewegung sind

und daß, wenn wir die Unebenheiten ganz entfernen könnten, die Kugel sich unaufhörlich mit derselben Geschwindigkeit weiterbewegen würde.

Aus diesen und ähnlichen Erscheinungen hat man den folgenden Satz abgeleitet: *Hat ein Körper, auf den keine äußeren Einflüsse wirken, eine Geschwindigkeit, so behält er sie unaufhörlich mit derselben Richtung und Größe bei; er hat eine gleichförmige geradlinige Bewegung.*

Von der Richtigkeit dieses Gesetzes ist man überzeugt, nicht weil man einen Körper, der in Bewegung ist, allen äußeren Einflüssen entziehen kann, sondern weil man beobachtet, daß sich die Bewegung um so mehr einer gleichförmigen nähert, je besser es gelingt, diese Einflüsse zu entfernen, und weil man noch niemals eine Abweichung von der gleichförmigen Bewegung beobachtet hat, ohne eine Ursache dafür angeben zu können.

Das Gesetz sagt ausdrücklich, daß sich der Körper in *gerader* Linie bewegt. Auch für jede Richtungsänderung kann man eine Ursache finden. Niemand wird bezweifeln, daß es ein von der Erde ausgehender Einfluß ist, infolgedessen sich der Mond in einem Kreis um die Erde bewegt.

§ 75. **Kräfte. Schwerkraft.** Um physikalische Erscheinungen kurz und deutlich beschreiben zu können, ist es notwendig, für die im vorhergehenden Paragraphen besprochenen äußeren Einflüsse einen Namen zu haben. Man ist daher übereingekommen, wenn man sieht, daß sich ein Körper in Bewegung setzt oder daß eine bereits vorhandene Bewegung in Geschwindigkeit oder Richtung eine Änderung erleidet, zu sagen, daß auf den Körper eine *Kraft* wirkt, die dann als die *Ursache* der Bewegung oder Bewegungsänderung betrachtet wird.

Jeder Kraft schreibt man eine bestimmte *Richtung* und eine bestimmte *Größe* zu.

Um dies näher zu erläutern, denken wir nochmals an einen Körper, der auf einer vertikalen Linie steigt oder fällt oder die in § 70 betrachtete Parabel beschreibt. Wir wissen bereits, daß in allen diesen Fällen eine Beschleunigung g vertikal nach unten stattfindet, und wir können jetzt noch hinzufügen, daß, solange wir uns auf einen nicht zu großen Raum, z. B. ein Zimmer beschränken, die Bewegungen in allen

Teilen dieses Raumes in derselben Weise stattfinden können. Dies alles bringt uns zu der Vorstellung, daß der Körper, wo er sich auch befindet und einerlei ob er in Ruhe ist oder ob bereits eine Geschwindigkeit in dieser oder jener Richtung er besitzt, einer *unveränderlichen* vertikal nach unten gerichteten Kraft unterworfen ist, und daß die *Wirkung dieser Kraft eben in der Beschleunigung besteht.* Diese Kraft nennt man die *Schwerkraft*, und wir können also sagen:

Die fortwährend in derselben Richtung und mit derselben Größe wirkende Schwerkraft erteilt einem Körper, während er sich bewegt, zu der bereits vorhandenen Geschwindigkeit in aufeinander folgenden gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten vertikal nach unten, und zwar ist diese Geschwindigkeit pro Sekunde gleich g.

Einer derartigen Redeweise bedient man sich auch in anderen Fällen. Jedesmal, wenn ein Körper eine andere als gleichförmige geradlinige Bewegung hat, spricht man von einer Kraft, die in der Richtung der Beschleunigung wirkt, mit anderen Worten, in der Richtung der Geschwindigkeit, die der Körper in einem kleinen Zeitteilchen zu der bereits vorhandenen hinzubekommt, oder umgekehrt, *die Wirkung einer Kraft besteht immer darin, daß dem Körper in jedem kleinen Zeitteilchen in der Richtung der Kraft eine Geschwindigkeit erteilt wird, die mit der bereits vorhandenen nach der Regel von § 65 zusammengesetzt wird.*

Wirkt die Kraft gerade in der Richtung der Bewegung, so ist diese beschleunigt; dagegen ist sie verzögert, wenn die Kraft der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist.

Weicht die Richtung der Kraft von der bereits vorhandenen Geschwindigkeit ab, so ist die Bahn gekrümmt. Im Falle von Fig. 72 (§ 72) z. B. muß eine Kraft in der Richtung von PH wirken, wenn die angenommene Bewegung wirklich stattfinden soll.

Das Gesagte wird noch in verschiedener Hinsicht ergänzt werden, sobald wir einige Arten von Kräften kennen gelernt haben. Für jetzt bemerken wir noch folgendes:

a) Ebenso wie manche andere Ausdrücke wird das Wort „Kraft“ nicht immer in demselben Sinne gebraucht. Auch ein Physiker spricht zuweilen von „Naturkräften“ in ziemlich unbestimmtem Sinne. *Allein, sobald irgend eine Begriffsverwirrung*

entstehen kann, gebe man dem Wort „Kraft“ keine andere Bedeutung, als die, welche wir ihm im vorhergehenden beigelegt haben.

In diesem Lehrbuch wird das Wort nur ein einziges Mal in einem abweichenden Sinne gebraucht werden.[1]

b) *Es kann nicht nachdrücklich genug darauf hingewiesen werden, daß auf einen Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Linie bewegt, alles zusammengenommen, keine Kraft wirkt.* Etwas anderes ist es, daß auf ihn eine Kraft *gewirkt hat*, als er die Geschwindigkeit bekam.

Wir sagten soeben „alles zusammengenommen“, weil, wie wir bald lernen werden, zwei oder mehr Kräfte auf den Körper wirken können, die einander aufheben.

c) Im vorhergehenden war nur von Fällen die Rede, in denen eine Geschwindigkeit *nach und nach* entsteht oder sich *allmählich* ändert. Nur in solchen Fällen wird von einer Kraft in dem angegebenen Sinne gesprochen. Mit anderen Worten, *eine Kraft hat, um einem Körper eine Geschwindigkeit, sei sie noch so klein, zu erteilen, eine gewisse Zeit nötig.* In vielen Fällen, in denen man auf den ersten Blick sagen würde, daß eine Geschwindigkeit *plötzlich* entsteht, zeigt es sich bei näherer Betrachtung, daß sie dem Körper nicht augenblicklich, sondern *in einer sehr kurzen Zeit* erteilt worden ist.

§ 76. **Weitere Beispiele von Kräften.** a) Durch die Muskelkraft von Menschen oder Tieren kann ein Körper in Bewegung gesetzt oder eine bereits vorhandene Geschwindigkeit vergrößert oder verkleinert werden. Wenn man einen Schlitten in Bewegung setzt, erteilt man ihm während einer gewissen Zeit eine beschleunigte Bewegung.

b) Bereits in § 74 wurde eine *elektrische Anziehung* erwähnt. Hat man zwei in derselben Weise elektrisierte Glasstücke, von denen das eine beweglich ist, so nimmt dieses, wenn es losgelassen wird, eine Geschwindigkeit an, die von dem anderen Stück hinweg gerichtet ist. Es findet dann eine *elektrische Abstoßung* statt.

c) Andere Beispiele von Anziehungen und Abstoßungen liefern uns die *Magnete.*

[1] Nämlich wenn in der Elektrizitätslehre der Ausdruck „elektromotorische Kraft“ gebraucht wird.

Man kann einen stab- oder nadelförmigen Magnet (Kompaßnadel) so an einem Faden aufhängen oder mit einem Hütchen auf eine Spitze setzen, daß er sich um einen Punkt in der Mitte seiner Länge in einer horizontalen Ebene drehen kann. Sich selbst überlassen nimmt er dann eine bestimmte Stellung ein, wobei das eine Ende nahezu nach Norden weist. Man nennt dieses Ende den *Nordpol*, das andere den *Südpol*. Die Richtung des Magnets fällt nicht mit dem astronomischen oder geographischen Meridian zusammen; im westlichen und mittleren Europa weicht der Nordpol westlich von dem letzteren ab. Man nennt die vertikale Ebene, in welche sich der Magnet einstellt, den *magnetischen Meridian* und den Winkel, den diese Ebene mit dem astronomischen Meridian bildet, die *Deklination*.

Die Deklination ist jetzt in Amsterdam 13,5°, in Bonn 12,4°, in Berlin 9,3°, in Königsberg 5,5°, iu Wien 7,8°; sie nimmt jedes Jahr um nahezu 0,07° ab.

Hat nun ein Magnet die soeben erwähnte Stellung eingenommen, dann setzt er sich in Bewegung, wenn man einem der Enden einen Pol eines anderen Magnets in einiger Entfernung gegenüberstellt. Man muß also sagen, *daß der eine Magnetpol eine Kraft auf den anderen ausübt;* die Richtung derselben wird durch die folgende Regel bestimmt:

Zwei ungleichnamige Pole (ein Nordpol und ein Südpol) *ziehen sich an, zwei gleichnamige* (zwei Nordpole oder zwei Südpole) *stoßen sich ab.*

Auch ein Stück Eisen, welches man in die Nähe eines der Pole einer Kompaßnadel hält, übt auf diesen eine Kraft aus. *Das Eisen zieht beide Magnetpole an und wird auch umgekehrt von diesen angezogen.*

Endlich müssen noch die Kräfte erwähnt werden, die — wenn kein Eisen und kein Magnetpol in der Nähe ist — die Kompaßnadel nach dem magnetischen Meridian zurücktreiben, nachdem sie aus diesem entfernt worden ist. Man hat allen Grund, diese Kräfte dem Einfluß der Erde zuzuschreiben, und nennt sie daher *erdmagnetische Kräfte.*

d) Eine besondere Klasse von Kräften sind diejenigen, welche erst entstehen, wenn ein Körper in Bewegung ist, und die dann immer der Bewegung entgegengesetzt gerichtet sind. Wenn nach dem Aufhören der bewegenden Kraft die

Bewegung eines auf einer horizontalen Ebene gleitenden oder rollenden Körpers verzögert wird, so schreiben wir dies der Kraft der *Reibung* zu. Ebenso widersetzt sich bei Körpern, die sich in einer Flüssigkeit oder in einem Gas bewegen, der sogenannte *Widerstand* des umgebenden Stoffes der Bewegung.

§ 77. **Die Wirkung einer Kraft aufgehoben durch die Spannung eines Seils oder den Widerstand einer Stützfläche.** Wird ein Körper an einem Seil aufgehängt, so hat die Schwerkraft nicht die früher erwähnte Wirkung. Betrachtet man aber die Sache näher, so zeigt sich zunächst, daß das Seil stets etwas verlängert wird. Diese Verlängerung fällt bei einem Gummischlauch sofort in die Augen; sie kann auch bei einem Metalldraht, der mit einem Gewicht von einigen Kilogramm belastet wird, durch geeignete Hilfsmittel beobachtet werden. Die Untersuchung der Erscheinung hat zu der Überzeugung geführt, daß immer eine gewisse Verlängerung stattfindet, wie dick das Seil und wie leicht der Körper auch ist.

Sodann zeigt jeder verlängerte Draht das Bestreben, wieder zur ursprünglichen Länge zurückzukehren. Er strebt infolgedessen den Körper, der an ihm hängt, nach oben zu bewegen, und er tut dies tatsächlich, wenn wir den Körper erst mit der Hand noch etwas weiter nach unten ziehen und ihn dann loslassen.

Wir müssen also sagen, daß der Draht auf den Körper eine Kraft nach oben ausübt, und es zeigt sich, daß der Zustand der Ruhe, in welchem sich der Körper befindet, dadurch verursacht ist, daß *zwei* Kräfte auf ihn wirken, von denen die eine nach oben und die andere nach unten gerichtet ist.

Von zwei Kräften, die auf einen Körper wirken, ohne ihn in Bewegung zu setzen, sagt man, daß sie miteinander im *Gleichgewicht* sind oder sich gegenseitig *aufheben*.

Die Kraft, welche das Seil auf den an ihm hängenden Körper ausübt, heißt die *Spannung* des Seils. Wenn man ausdrücken will, daß sie durch das Bestreben des Drahtes, sich nach einer Verlängerung wieder zusammenzuziehen, hervorgebracht wird, so wird sie *Elastizität* genannt. Die letztere Bezeichnung wird überhaupt gebraucht, um die Kräfte zu bezeichnen, die ein Körper ausübt, wenn er eine Änderung der Form oder Größe erlitten hat und in den ursprünglichen Zustand zurückzukehren strebt.

Ein Seil kann auch gespannt sein, wenn es eine andere als die vertikale Richtung hat. Wir können das eine Ende befestigen und am anderen Ende in beliebiger Richtung ziehen. *Die Spannung hat immer die Richtung der Länge des Seils.*

Wir können übrigens das Seil auch durch einen spiralförmig (d. h. nach einer Schraubenlinie) gewundenen Metalldraht AB (Fig. 73) ersetzen; dieser hat den Vorzug, daß man die Verlängerung durch mäßige Kräfte leicht beobachten kann.

A B F

Fig. 73.

Bemerkungen wie die vorhergehenden finden ferner auch Anwendung, wenn ein Körper auf einer horizontalen Ebene, z. B. auf einer Tischplatte ruht. Das Holz wird dann ein wenig eingedrückt; es strebt seine ursprüngliche Form wieder anzunehmen und übt dadurch auf den Körper eine Kraft aus, die die Schwerkraft aufhebt. Diese Kraft nennen wir den *Widerstand* der Unterstützungsfläche.

§ 78. **Angriffspunkt einer Kraft.** Wenn wir ein Seil an einem Punkt eines Körpers befestigen und dann an dem Seil ziehen, so üben wir eine Kraft aus, die, wie man sagt, in dem Befestigungspunkt *angreift.* Auch bei anderen Kräften spricht man von dem *Angriffspunkt*; ein Stück Eisen oder ein in der Nähe befindlicher Magnet wirkt z. B. *auf die Pole* einer Kompaßnadel.

Die Schwerkraft, welcher ein Körper unterworfen ist, wirkt nicht auf einen einzelnen Punkt; sie kann, wie wir sehen werden, als aus sehr vielen Kräften bestehend betrachtet werden, die auf alle Stoffteilchen wirken, aus denen der Körper zusammengesetzt ist.

§ 79. **Gleichgewicht von Kräften.** *Man sagt, daß zwei Kräfte gleich sind, erstens, wenn sie auf denselben Körper — oder auf gleiche Körper — wirken und dieselbe Wirkung, also dieselbe Geschwindigkeitsänderung (§ 75) oder dieselbe Formänderung (§ 77) bewirken; zweitens, wenn sie durch gleiche Körper, die sich in demselben Zustand befinden, ausgeübt werden, und drittens, wenn sie in demselben Punkt in entgegengesetzter Richtung angreifen und sich gegenseitig aufheben.*

Man hat gefunden, daß man niemals auf Widersprüche stößt, wenn man bald das eine, bald das andere Kennzeichen benutzt.

Wir können z. B. auf einen Körper dadurch eine Kraft ausüben, daß wir eine Spiralfeder mit dem einen Ende an dem Körper befestigen und mit der Hand am anderen Ende ziehen. Der Grad der Verlängerung der Feder bestimmt dann offenbar die Kraft, mit der sie auf den Körper wirkt. Haben wir nun zwei gleiche Federn und ziehen erst mit der einen und dann mit der anderen an demselben Körper, so erhält man dieselbe Wirkung auf diesen letzteren, wenn bei den beiden Versuchen die Verlängerung der Federn gleich groß ist. Man sieht hieraus, wie zwei Kräfte, die nach dem zweiten Kennzeichen gleich genannt werden müssen, es auch nach dem ersten sind.

Befestigen wir die beiden Federn an demselben Punkt eines Körpers, aber so, daß sie nach entgegengesetzten Seiten ziehen, so bleibt der Körper in Ruhe, wenn die Federn gleich viel verlängert werden. Hieraus geht hervor, daß zwei Kräfte, die nach dem zweiten Kennzeichen gleich groß sind, dies auch nach dem dritten Kennzeichen sind.

Das dritte Kennzeichen kann natürlich nur auf Kräfte Anwendung finden, die auf denselben Körper wirken, während das zweite auch auf Kräfte angewandt werden kann, die auf verschiedene Körper wirken.

Die erwähnten Versuche mit Spiralfedern geben noch zu einigen Bemerkungen Veranlassung.

Zunächst kann man die Feder in umgekehrter Lage gebrauchen, so daß das Ende, an welchem man zuerst mit der Hand zog, an dem Körper befestigt wird. Wenn dann an der Feder so stark gezogen wird, daß sie um ebensoviel verlängert wird wie das erste Mal, so ist auch die Wirkung auf den Körper, an welchem sie befestigt ist, wieder dieselbe. Die Feder zieht also an diesem Körper ebenso stark wie bei dem ersten Versuch, so daß wir schließen können, daß eine *ausgedehnte Feder* (und dasselbe gilt von einem ausgedehnten Draht) *sich nach beiden Seiten hin mit derselben Kraft zusammenzuziehen strebt.*

Sodann bedenken wir, daß, wenn wir eine Kraft F (Fig. 73) auf das Ende B der Feder AB wirken lassen, die an einem unbeweglichen Körper A befestigt ist, auf den Teil B der Feder zwei entgegengesetzte Kräfte wirken. Nach links wirkt nämlich auf ihn die Spannung der Feder selbst. Ist Gleichgewicht ein-

getreten, d. h. ist die Feder so weit ausgedehnt als es die Kraft F vermag, so müssen die beiden Kräfte einander gleich sein. Also: *Die Spannung einer Feder, die durch eine gewisse Kraft ausgedehnt wird, ist gleich dieser Kraft.*

Mit dieser der Kraft F gleichen Spannung wirkt nun aber die Spiralfeder auch auf den Körper A, mit anderen Worten, *die Kraft F wird in unveränderter Größe auf den Körper übertragen, an dem die Feder befestigt ist.*

Von dem letzteren können wir uns noch durch einen Versuch überzeugen, bei welchem zwei Federn AB und BC, wie Fig. 74 zeigt, gebraucht werden. Wir nehmen dabei an, daß die Feder BC gleich der Feder AB in Fig. 73 ist. Übt man nun, in den beiden Fällen von Fig. 73 und Fig. 74, gleiche Kräfte F aus, was man daran sehen kann, daß die Feder AB im ersten Fall ebenso weit ausgedehnt ist wie die Feder BC im zweiten Fall, dann ist auch die Wirkung auf den Körper A in beiden Fällen dieselbe. Die in Fig. 74 eingeschaltete Feder AB überträgt also die Spannung von BC auf den Körper A.

Fig. 74.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß man in einem Falle wie dem in Fig. 74 von vielen Kräften sprechen kann, die alle einander gleich sind. Zieht man den Punkt C mit der Hand nach rechts, so wird die Hand durch die Feder nach links gezogen. Dagegen übt BC auf AB eine Kraft nach rechts aus und steht selbst in B unter der Einwirkung einer Kraft nach links. Wir müssen uns sogar vorstellen, daß nicht nur die eine Feder an der anderen zieht, sondern daß dieselbe Wirkung auch zwischen den beiden Teilen besteht, in die man eine und dieselbe Feder in Gedanken durch eine auf ihrer Länge senkrecht stehende Ebene teilen kann.

Aus alle diesem sieht man nun auch, wie notwendig es ist, immer deutlich anzugeben, auf welchen Körper eine Kraft wirkt und durch welchen Körper sie ausgeübt wird.

Natürlich können nur Kräfte, die auf *denselben* Körper oder Teil eines Körpers wirken, sich gegenseitig aufheben.

Bemerkungen wie diese können auch in anderen Fällen gemacht werden. Wird ein Körper auf eine vertikale Säule

gestellt, die auf einer horizontalen Ebene steht, so wird die Säule zusammengedrückt und sie übt durch ihre Elastizität nach beiden Seiten eine Kraft aus; nach oben eine Kraft, die auf den Körper wirkt und mit dem Gewicht desselben im Gleichgewicht ist, nach unten eine Kraft, die die Unterlage in derselben Weise niederdrückt, als ob der Körper direkt auf ihr ruhte. Die Säule überträgt wieder die Kraft, die auf ihr oberes Ende wirkt, auf die Unterlage.

§ 80. **Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.** Der im vorhergehenden Paragraphen besprochenen Körper übt auf die Säule, auf welcher er steht, einen nach unten gerichteten Druck aus, und wird selbst durch die Säule mit einer ebenso großen Kraft nach oben gedrückt. Zwei ähnliche gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte sind zwischen der Säule und der Unterlage wirksam.

Überhaupt übt ein Körper niemals eine Kraft auf einen anderen aus, ohne daß dieser auf ihn eine Kraft in der entgegengesetzten Richtung ausübt. Man unterscheidet diese Kräfte als *Wirkung* (*Aktion*) und *Gegenwirkung* (*Reaktion*), und man hat gefunden, daß sie immer gleich groß sind. Die Anziehungen und Abstoßungen z. B., welche elektrisierte Körper oder Magnete aufeinander ausüben, befolgen dieses Gesetz; wenn ein elektrisierter Körper A an einer Spiralfeder aufgehängt und von einem anderen B, der sich unter ihm befindet, angezogen wird, so zeigt die Ausdehnung der Feder eine gleich große Kraft an, wenn man A und B vertauscht, während ihre relative Stellung unverändert bleibt.

Die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ist in so vielen Fällen nachgewiesen worden, daß man sie auch in Fällen annimmt, in denen vielleicht eine der Kräfte noch gar nicht nachgewiesen worden ist. Man hat z. B. beobachtet, daß ein elektrisierter Körper, wenn er schnell bewegt wird, auf die Pole eines Magnets wirkt; man darf nun annehmen, daß auch die letzteren auf den ersteren einwirken, obgleich dies noch nicht experimentell nachgewiesen ist.

§ 81. **Folgen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.** Auf den ersten Blick scheint es, daß lebende Wesen eine Ausnahme von der Regel bilden, daß ein Körper nicht in Bewegung kommen kann, ohne daß eine äußere Kraft auf

ihn einwirkt; es scheint, daß wir selbst unseren Körper ohne eine solche Ursache in fortschreitende oder steigende Bewegung bringen können. Bei näherer Überlegung zeigt sich jedoch das Gegenteil.

Wenn wir ruhig auf einem Treppentritt stehen, so drücken wir diesen so weit ein, daß durch die Gegenwirkung Gleichgewicht mit unserem Gewichte hergestellt wird. Um aber die Treppe hinaufzusteigen, drücken wir die Tritte stärker nach unten, bei schnellem Treppensteigen, indem wir mit den Füßen gegen die Tritte *schlagen*; die größere Gegenwirkung, welche dies zur Folge hat, gibt unserem Körper die Geschwindigkeit nach oben.

Beim Fortschreiten auf horizontalem Fußboden machen wir Gebrauch von der Rauheit desselben. Jeder kann selbst die Beobachtung machen, daß er den Fußboden nach hinten drückt; die Gegenwirkung des Fußbodens ist es, die bewirkt, daß der Körper nach vorn geht. Bei einem vollkommen glatten Fußboden würden diese horizontalen Kräfte nicht bestehen können und das Fortschreiten würde unmöglich sein.

Ist der Fußboden rauh genug und selbst beweglich, so bewegt er sich rückwärts. Hiervon hat man verschiedene Anwendungen gemacht; wir weisen nur darauf hin, daß eine Person, die einen Kahn mit der Stange fortschiebt, diesen mit seinen Füßen nach hinten drückt. Er selbst wird durch das Deck des Fahrzeugs nach vorn gedrückt, aber er bleibt an demselben Platz, da die Stange, die er gegen den festen Boden drückt, eine entgegengesetzt gerichtete Kraft auf ihn ausübt.

Die Fortbewegung eines Fahrzeugs durch Ruder, Räder oder eine Schraube besteht darin, daß man auf das Wasser eine Kraft nach hinten ausübt; hierdurch wird wieder eine Gegenwirkung hervorgerufen, die auf das Fahrzeug wirkt.

Das Schwimmen der Fische und der Flug der Vögel haben mit diesen Bewegungsmitteln einige Ähnlichkeit. Die für das Aufsteigen erforderliche Gegenwirkung wird durch den Vogel hervorgerufen, während er die Flügel niederschlägt. Beim Emporschlagen der Flügel wirkt auf ihn allerdings eine Kraft nach unten, allein die Geschwindigkeit der Bewegungen und die Stellung der Flügel sind derartig, daß die Luft beim

Niederschlagen einen größeren Widerstand leistet als beim Emporschlagen.

Als letztes Beispiel der Gegenwirkung, die jede Wirkung begleitet, erwähnen wir den Fall eines Körpers, der über eine Fläche, z. B. eine Tischplatte, fortgezogen wird, wobei er einen Reibungswiderstand erleidet. Der Körper strebt dann die Platte mit einer dieser Reibung gleichen Kraft fortzuziehen.

§ 82. **Das Messen der Kräfte.** Um die Größe von Kräften durch Zahlen angeben zu können, müssen wir zunächst festsetzen, nach welcher Regel wir das Verhältnis zweier Kräfte bestimmen wollen, und zweitens müssen wir eine bestimmte Kraft als Einheit wählen. Nun sahen wir bereits in § 75, daß die Wirkung einer Kraft in der Änderung der Geschwindigkeit, der Beschleunigung, besteht, die sie einem Körper erteilt; es liegt also nahe, die Kraft als *proportional* dieser Beschleunigung zu betrachten. Vielleicht ist es aber etwas deutlicher, wenn wir die Größe von Kräften zunächst nach der Ausdehnung beurteilen, die sie an einer Spiralfeder bewirken; es wird sich bald zeigen, daß wir, wenn wir so verfahren, mit der zuerst genannten Auffassung nicht in Widerspruch kommen.

Die Größe der Schwerkraft, die auf einen Körper wirkt, wird das *Gewicht* des Körpers genannt. Um die Gewichte verschiedener Körper zu vergleichen, können wir uns einer Spiralfeder bedienen, die mit dem oberen Ende an einem festen Haken aufgehängt und am unteren Ende mit einer Schale versehen ist, in die man die zu untersuchenden Körper legen kann.

Zwei Körper haben nun offenbar dasselbe Gewicht, wenn sie dieselbe Verlängerung der Feder bewirken, und denjenigen Körpern, welche die Feder am meisten verlängern, dürfen wir das größte Gewicht zuschreiben.

Wir stellen uns jetzt vor, wir hätten eine Anzahl von Körpern, z. B. Stücke Kupfer von demselben Volum, an denen wir in keiner Hinsicht einen Unterschied bemerken können. Wenn wir diese der Reihe nach in die Schale bringen, bekommen wir jedesmal dieselbe Ausdehnung, so daß die verschiedenen Stücke auch gleiche Gewichte haben. Wenn wir ferner nacheinander 1, 2, 3 usw. Stücke Kupfer in die Schale

legen, so wird die Ausdehnung immer größer. Wir stellen uns vor — und dies können wir, ohne in irgendeinen Widerspruch zu kommen —, daß die Kräfte, durch die in diesen Fällen die Feder ausgedehnt wird, sich verhalten wie 1, 2, 3 usw. Da ferner ein Stück Kupfer, dessen Volum 2mal oder 3mal so groß ist als das Volum der erwähnten Stücke, dieselbe Wirkung ausübt wie 2 oder 3 der letzteren, *so setzen wir das Gewicht von Körpern, die aus demselben Stoff bestehen, ihrem Volum proportional.*

Jetzt ist es klar, wie man mit Hilfe der Spiralfeder das Verhältnis verschiedener Gewichte oder anderer Kräfte bestimmen und auch alle in einer bestimmten Einheit ausdrücken kann.

Als Krafteinheit nehmen wir vorläufig das Gewicht von einem Kubikzentimeter Wasser bei 4° C., d. h. bei derjenigen Temperatur, bei welcher eine Menge Wasser das kleinste Volum hat (§ 6). Wir nennen diese Gewichtseinheit das Gewicht von einem Gramm oder kurzweg ein *Gramm.*

Mit Hilfe der Tabelle von § 6 können wir leicht das Gewicht von 1 ccm Wasser von einer anderen Temperatur berechnen. Bei Erwärmung von 4° auf 10° wird für eine bestimmte Menge Wasser das Volum $\frac{1,000124}{0,999877}$ mal größer. Da es sich nun gezeigt hat, daß sich das Gewicht eines Körpers nicht ändert, wenn man ihn erwärmt, muß das Gewicht von $\frac{1,000124}{0,999877}$ ccm Wasser von 10° immer noch ein Gramm sein; hieraus folgt, daß 1 ccm davon $\frac{0,999877}{1,000124} = 0,99975$ Gramm wiegt.

Um nun z. B. das Gewicht von einem Stück Blei in Grammen auszudrücken, haben wir nur zu ermitteln, wieviel Kubikzentimeter Wasser man in die Schale bringen muß, um dieselbe Ausdehnung zu bekommen, die durch das Blei bewirkt wurde. In derselben Weise kann auch eine Kraft, die wir mit der Hand auf das untere Ende der Feder ausüben, oder eine elektrische oder magnetische Anziehung, die in vertikaler Richtung auf einen an der Feder aufgehängten Körper wirkt, in Grammen oder Teilen eines Gramms gemessen werden.

Wir brauchen wohl nicht zu sagen, daß man das Gewicht eines Körpers vermittelst einer *Wage* genauer bestimmen kann

als vermittelst einer Spiralfeder. Wir nehmen aber bei diesen Betrachtungen an, daß man eine Feder benutzt, weil man mit dieser auch verschiedene andere Kräfte leicht messen kann.

In Wirklichkeit wird das Gewicht eines Körpers nicht direkt mit dem Gewicht eines gewissen Volums Wasser verglichen, sondern mit dem von „Gewichten", d. h. von Metallstücken, die direkt oder indirekt mit einer Menge Wasser verglichen worden sind. Man braucht also nicht jedesmal den Raum, den eine gewisse Menge Wasser einnimmt, zu messen, und hierin liegt ein großer Vorteil, da es schwierig ist, diese Messung genau auszuführen. Dies ist in so hohem Grade der Fall, daß man, wenn es möglich ist, eine Volumbestimmung durch eine Wägung ersetzt; man ermittelt z. B. oft das innere Volum eines Gefäßes dadurch, daß man die Menge Wasser oder Quecksilber wiegt, die es fassen kann.

Eine Vergleichung eines Gewichtsstückes mit einer Menge Wasser, deren Volum bestimmt wurde, ist bei Einführung des metrischen Systems ausgeführt worden; man hat damals ein Stück Platin verfertigt, das so gut wie möglich dasselbe Gewicht wie ein Kubikdezimeter Wasser von 4° C. hat. Dies Stück ist das Normalkilogramm, das noch jetzt aufbewahrt wird, von dem genaue Kopien angefertigt worden sind und mit dem alle Gewichtsstücke, die wir benutzen, direkt oder indirekt verglichen sind.

Als genauere Untersuchungen gelehrt hatten, daß das Normalkilogramm etwas von dem Gewicht eines Kubikdezimeters Wasser abwich, wurde das Kilogramm nicht verändert, so daß es jetzt nicht mehr ganz richtig ist, zu sagen, daß 1 cbdm Wasser von 4° C. 1 kg wiegt.

Ähnlich verhält es sich mit dem Meter. Man hat gegen Ende des 18. Jahrhunderts einen Maßstab angefertigt, der so gut wie möglich gleich dem vierzigmillionsten Teil des Erdumfanges war. Dies Normalmeter ist beibehalten worden, auch nachdem genauere Messungen des Erdumfanges ein Resultat geliefert hatten, welches von dem früher erhaltenen etwas abweicht.

Der Unterschied zwischen dem Gewicht eines Kilogramms und dem eines Kubikdezimeters Wasser von 4° C. ist übrigens so gering, daß wir in allen Fällen, die in diesem Buche zur Sprache kommen, davon absehen können.

§ 83. **Homogene und nichthomogene Körper. Spezifisches Gewicht.** Ein Körper oder ein Stoff heißt *homogen*, wenn die Eigenschaften desselben in allen Punkten dieselben sind oder, genauer gesagt, wenn kleine Teile von gleichem Volum und

8*

gleicher Form und Lage, an verschiedenen Stellen aus dem Körper herausgenommen, in ihren Eigenschaften vollkommen übereinstimmen.

Flüssigkeiten und Gase können in der Regel als homogen betrachtet werden, ebenso krystallisierte feste Körper. Bei Holz verrät sich der Mangel von Homogenität schon bei oberflächlicher Beobachtung; Glas und Metalle sind viel mehr homogen, aber vollkommen sind es auch diese Stoffe niemals, da durch die Bearbeitung, welche sie erfahren haben, die Oberflächenschichten andere Eigenschaften angenommen haben, als die tieferliegenden Teile.

Bei Stoffen, die homogen sind oder die man als homogen betrachtet, versteht man unter dem *spezifischen Gewicht* die Zahl, welche angibt, wievielmal ein gewisses Volum des Stoffes mehr wiegt, als ein gleiches Volum eines bestimmten Stoffes, mit dem alle anderen verglichen werden. Für diesen Stoff wählt man in den meisten Fällen Wasser von 4° C., und man kann daher sagen: das spezifische Gewicht eines Stoffes gibt, in Grammen ausgedrückt, das Gewicht von 1 ccm des Stoffes an.

§ 84. **Zusammenhang zwischen der Größe von Kräften und der Geschwindigkeit, die sie einem Körper erteilen.** Man kann in verschiedener Weise die Größe einer Kraft beurteilen, *während sie einen Körper in Bewegung setzt.* Wir können z. B. einen Körper vermittelst einer Spiralfeder über eine horizontale Ebene fortziehen; die Verlängerung der Feder ist dann in jedem Augenblick ein Maß für die Kraft, die auf den Körper wirkt. Oder wir können bei elektrisierten Körpern erst, während sie in Ruhe gehalten werden, die Kräfte messen, die sie aus verschiedenen Entfernungen aufeinander ausüben, und dann, während sie sich bewegen, aus ihrem Abstand auf die Größe der Kraft schließen. Man hat nämlich allen Grund zu der Annahme, daß die Wirkung zwischen zwei gegebenen elektrisierten Körpern, unabhängig von der Bewegung, die wir ihnen geben können, nur von ihrer relativen Stellung abhängt.

Dadurch, daß man nun auf einen und denselben Körper verschiedene Kräfte wirken ließ und jedesmal sowohl die Größe der Kraft als auch die Geschwindigkeitsänderung des Körpers ermittelte, hat man das folgende Gesetz gefunden:

I. *Wirken nacheinander verschiedene Kräfte auf einen Körper, aber jede Kraft eine Zeitlang in derselben Richtung und mit derselben Größe, so sind die Geschwindigkeiten, die sie dem Körper in der Zeiteinheit erteilen, d. h. die Beschleunigungen den Kräften proportional.*

Diesem Gesetze gemäß müssen die verschiedenen Werte, die die Beschleunigung g eines fallenden Körpers auf der Erdoberfläche hat (§ 63), dem Umstande zugeschrieben werden, daß die Schwerkraft an dem einen Ort stärker und an dem anderen schwächer wirkt. Das Gewicht desselben Körpers würde demnach auch ohne Zweifel derselben Spiralfeder in der Nähe der Pole eine größere Ausdehnung geben, als in der Nähe des Äquators.

Nachdem wir obiges Gesetz kennen gelernt haben, ist es klar, daß die beiden in § 82 erwähnten Auffassungen nicht miteinander in Widerspruch stehen.

§ 85. **Einfluß der Stoffmenge, die in Bewegung gesetzt werden muß.** Ein zweites, nicht minder wichtiges Gesetz ist das folgende:

II. *Wenn eine und dieselbe Kraft, immer ohne die Richtung und die Größe zu ändern, nacheinander auf verschiedene Körper wirkt, so ist die Geschwindigkeit, welche diese in der Zeiteinheit bekommen, umgekehrt proportional der Stoffmenge, welche sie enthalten.*

Bestehen die Körper, welche man miteinander vergleicht, aus derselben Substanz, z. B. aus Kupfer, so ist offenbar die Stoffmenge, welche sie enthalten, proportional dem Volum, und da jedes Kubikzentimeter gleich viel wiegt, auch dem Gewicht. Für solche Körper kann das zweite Gesetz aus dem ersten abgeleitet werden, wenn man noch den Umstand berücksichtigt, daß alle Körper gleich schnell fallen. Wir wollen z. B. annehmen, das eine Stück Kupfer sei doppelt so groß als das andere. Die Gewichte wollen wir mit K und $2K$ bezeichnen. Durch diese Kräfte bekommen dann beide Stücke, wenn wir sie fallen lassen, in der Sekunde die Geschwindigkeit g. Nun lasse man aber auf das große Stück eine Kraft wirken, die gleich K, also nur gleich der Hälfte seines Gewichtes ist, man lasse z. B. das Stück über eine glatte horizontale Ebene mit der Kraft K fortgezogen werden. Dann wird das

Stück nach dem ersten Gesetz in der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit $\frac{1}{2}g$ bekommen. Eine Kraft K, die dem kleinen Stück die Geschwindigkeit g erteilt, gibt also dem großen nur die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}g$.

Wirkt auf beide Stücke dieselbe Kraft F, so ist die Geschwindigkeit, die das kleine in der Sekunde bekommt, nach dem ersten Gesetz

$$\frac{F}{K}g,$$

und die, welche das große Stück bekommt,

$$\frac{F}{2K}g,$$

Werte, die wieder dem zweiten Gesetze genügen.

Hat man es mit Körpern zu tun, die aus verschiedenen Substanzen bestehen, so muß, wenn das Gesetz Sinn haben soll, zuerst festgesetzt werden, nach welchem Maßstab man die Stoffmengen, welche sie enthalten, miteinander vergleichen will. Wir wollen nun *übereinkommen zu sagen, daß z. B. ein Stück Kupfer und ein Stück Eisen dieselbe Stoffmenge enthalten, wenn sie an demselben Ort der Erde gleich viel wiegen.* Ein Stück Kupfer mit dem Gewicht K und ein Stück Eisen mit dem Gewicht $2K$ enthalten nach dieser Auffassung Stoffmengen, die sich zueinander wie 1 zu 2 verhalten, und auf diese Körper können nun wieder die obigen Schlüsse angewandt werden, so daß auch in diesem Fall das Gesetz seine Gültigkeit hat.

Die Stoffmenge eines Körpers wird die *Masse* genannt. Die Massen verschiedener Körper sind, wie wir gesehen haben, ihren Gewichten an demselben Ort der Erde proportional; die Wage ist daher das Instrument, welches dazu dient, Massen miteinander zu vergleichen. *Die Begriffe Gewicht und Masse muß man jedoch scharf voneinander unterscheiden.* Das Gewicht eines Körpers ist die *Kraft*, mit der er von der Erde angezogen wird; es ist größer oder kleiner, je nachdem wir unsere Beobachtungen näher bei den Polen der Erde oder näher beim Äquator machen. Die *Masse* dagegen ändert sich nicht, wenn man den Körper von einem Ort der Erdoberfläche nach einem anderen bringt, und man kann die Massen zweier Körper durch Versuche vergleichen, bei denen die Schwerkraft gar nicht im Spiel ist, z. B. dadurch, daß man die Körper mit

einer Spiralfeder über eine horizontale Fläche fortzieht und jedesmal die bei einer bestimmten Ausdehnung vorhandene Beschleunigung mißt.

§ 86. **Beispiele des Einflusses der Masse auf die Bewegungserscheinungen.** Je größer die Masse eines Körpers ist, desto längere Zeit braucht eine und dieselbe Kraft, um eine bestimmte Geschwindigkeit hervorzubringen. Ebenso ist die Zeit, während der eine Kraft wirken muß, um eine bereits vorhandene Geschwindigkeit zu vernichten, bei einem Körper von großer Masse länger als bei einem kleinen Körper. Die der Bewegung entgegengesetzten Geschwindigkeiten, welche die Körper in diesem Falle in aufeinander folgenden Zeitteilen erhalten, mit anderen Worten die Geschwindigkeitsverminderungen, sind wieder der Masse umgekehrt proportional.

Wenn der Magnet von § 76 durch eine drehende Bewegung in einer horizontalen Ebene aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und dann losgelassen wird, so nimmt er eine beschleunigte Bewegung nach der Gleichgewichtslage hin an. Er überschreitet diese Lage und hat, sobald dies geschehen ist, weil auf ihn stets Kräfte wirken, die ihn in den magnetischen Meridian zu stellen streben, eine verzögerte Bewegung. Nach einiger Zeit ist die Geschwindigkeit erschöpft; der Magnet kehrt nach der Gleichgewichtslage zurück und geht von neuem durch sie hindurch; kurz, er schwingt über einen gewissen Winkel hin und her.

Dabei wird für den Übergang aus einer der äußersten Stellungen in die Gleichgewichtslage ebensoviel Zeit gebraucht wie für die Bewegung von der Gleichgewichtslage in eine jener Stellungen. Ferner hat man gefunden, daß, solange die Ablenkungswinkel nicht zu groß sind, große und kleine Schwingungen in derselben Zeit gemacht werden. Hierauf kommen wir später zurück, weisen aber jetzt besonders darauf hin, daß die Schwingungen langsamer werden, wenn man den Magnet in Punkten, die an beiden Seiten gleich weit von der Mitte liegen, mit zwei gleichen Stücken Kupfer belastet.

Da sich ein drehbarer Kupferstab nicht in den magnetischen Meridian stellt, muß man annehmen, daß bei diesem Versuch keine Kräfte, die die Bewegung beeinflussen, auf die Kupferstücke wirken. Die Vergrößerung der Schwingungszeit

kann also nur durch die Vermehrung der Masse des Stabes hervorgebracht sein.

Daß diese Vermehrung wirklich eine solche Wirkung haben muß, sieht man leicht ein, wenn man sich vorstellt, daß zwei gleiche Magnete, von denen der erste nicht, wohl aber der zweite mit Kupferstücken beschwert ist, so gedreht werden, daß sie gleichgroße Winkel mit der Gleichgewichtslage bilden und daß sie dann zugleich losgelassen werden. Da die wirkenden Kräfte bei beiden dieselben sind, muß der zweite Magnet wegen der größeren Masse in derselben Zeit die kleinere Geschwindigkeit bekommen; er wird also die Gleichgewichtslage später als der erste Magnet erreichen.

Ähnliche Erscheinungen können bei tönenden Körpern, z. B. bei einer schwingenden Stimmgabel, beobachtet werden. Die Zinken sind hier abwechselnd weiter nach innen gebogen und weiter voneinander entfernt als in der Gleichgewichtslage. Die Elastizität des Stahls treibt stets die Teilchen nach der Gleichgewichtslage und hat bei jeder Annäherung an diese Lage eine Beschleunigung und bei jeder Entfernung von ihr eine Verzögerung zur Folge. Wenn man die Zinken der Stimmgabel mit Kupferstücken, Kautschukringen oder etwas derartigem belastet, ohne an der Elastizität etwas zu ändern, so macht man die Schwingungen langsamer, wie sich z. B. zeigt, wenn man diese auf einen rotierenden Zylinder aufzeichnet (§ 57).

§ 87. **Einheiten der Kraft und der Masse** In der Geometrie pflegt man die Längeneinheit und die Volumeinheit nicht beide willkürlich zu wählen, sondern, nachdem man die erste festgesetzt hat, für die zweite den Inhalt eines Würfels zu nehmen, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist. Hierdurch werden die Regeln für die Inhaltsberechnung einfacher als es sonst der Fall sein würde. Hätte man als Längeneinheit das Meter und als Volumeinheit den Kubikfuß genommen, so würde man die Zahl, welche den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds angibt, nicht bekommen, indem man die Zahlen, welche die Länge, die Breite und die Höhe angeben, miteinander multipliziert.

In ähnlicher Weise kann man die Berechnung der Wirkung, die eine gegebene Kraft auf eine gegebene Masse ausübt, ver-

einfachen, wenn man dafür sorgt, daß zwischen der Krafteinheit und der Masseneinheit ein bestimmter Zusammenhang besteht.

Man wählt diese Einheiten so, daß die Einheit der Kraft der Einheit der Masse eine Beschleunigung 1 erteilt, d. h. daß sie eine Geschwindigkeit 1 verursacht, wenn sie eine Zeiteinheit lang auf die Einheit der Masse wirkt.

Wirkt dann eine Kraft K auf die Masse 1, so ist die Beschleunigung nach dem ersten Gesetz (§ 84) K. Und nach dem zweiten Gesetz (§ 85) wird die Beschleunigung

$$q = \frac{K}{m}, \qquad (14)$$

wenn die Kraft auf die Masse m wirkt.

In Worten ausgedrückt: die Zahl, welche die Beschleunigung angibt, ist gleich dem Quotienten der Zahlen, welche die Kraft und die Masse angeben, oder in kürzerer Ausdrucksweise, die wir in solchen Fällen oft benutzen werden: *um die Beschleunigung zu bekommen, muß man die Kraft durch die Masse dividieren.*

Die Formel (14) kann auch in der Form

$$K = q\,m$$

geschrieben werden.

Wendet man nun diese Beziehung auf einen fallenden Körper an, so wird K das Gewicht des Körpers, welches wir P nennen wollen, während q die früher besprochene Beschleunigung g wird. Zwischen den Zahlenwerten des Gewichtes und der Masse haben wir also die Beziehung

$$P = g\,m \qquad (15)$$

Wenn zwischen den Einheiten der Kraft und der Masse der angegebene Zusammenhang besteht, wollen wir sagen, daß die Einheiten „zueinander passen". Dies ist noch auf verschiedene Weise möglich, z. B.:

a) Zeiteinheit die Sekunde, Längeneinheit das Meter, Krafteinheit das Gewicht eines Kilogramms. Die Masseneinheit ist jetzt nicht die Menge Stoff in einem Kilogramm, denn wenn man diese fallen läßt, sieht man, daß ihr die Krafteinheit nicht die Beschleunigung 1, sondern die Beschleunigung g (9,81) erteilt. Wenn eine Kraft gleich dem Gewicht von einem Kilogramm auf eine Masse wirkte, die g mal so groß ist als

die eines Kilogramms, so würde eine Beschleunigung 1 entstehen; daher muß die zuletzt genannte Menge Stoff zur Masseneinheit gewählt werden. Dies ergibt sich auch aus der Formel (15), da $P = g$ sein muß, wenn $m = 1$ werden soll.

b) Einheiten von Zeit und Länge wie oben, Masseneinheit die Masse eines Kilogramms. Durch eine einfache Schlußfolgerung oder, wenn man will, durch die Formel (15) findet man, daß jetzt als Krafteinheit eine Kraft genommen werden muß, die g mal kleiner ist als das Gewicht eines Kilogramms.

Natürlich kann man auch als Einheiten Bruchteile oder Vielfache der genannten Einheiten benutzen, ohne etwas an der Art des Systems von Einheiten zu ändern.

Die Einheiten in der unter b) angegebenen Weise zu wählen, verdient aus folgendem Grunde den Vorzug. Die Masse eines Kubikdezimeters Wasser ist an allen Orten dieselbe. Werden also die Einheiten in der zweiten Weise gewählt, so arbeiten alle Physiker mit derselben Masseneinheit und also auch mit derselben Krafteinheit, da diese von der Masseneinheit abhängt. Dagegen ist das Gewicht eines Kubikdezimeters Wasser nicht überall dasselbe; das unter a) genannte System ist daher nicht geeignet, bei genauen Messungen allgemein benutzt zu werden.

Ein System von zueinander passenden Einheiten, bei welchem die Masseneinheit ein Kilogramm oder ein einfacher Bruchteil desselben ist, wurde zuerst bei der Untersuchung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen eingeführt. Gegenwärtig pflegen viele Physiker als Längeneinheit das Zentimeter und als Masseneinheit das Gramm zu nehmen, während Zeiten in Sekunden ausgedrückt werden. In diesem *Zentimeter-Gramm-Sekunden-System*, welches wir als das C-G-S-System bezeichnen wollen, wird die Beschleunigung der Schwerkraft durch 981 ausgedrückt und ist die Krafteinheit, der man den Namen *Dyn* gegeben hat, der 981ste Teil des Gewichtes von einem Gramm, also etwas mehr als das Gewicht von einem Milligramm. Das letztere findet man durch eine ähnliche Schlußfolgerung wie oben.

Bei numerischen Berechnungen wollen wir, wenn nicht das Gegenteil bemerkt wird, das C-G-S-System benutzen. Übrigens würden verschiedene Formeln, die auf dem Gebrauch

zueinander passender Einheiten beruhen, ebensogut gelten, wenn man z. B. die unter a) oder b) genannten Einheiten wählte.

Ausnahmsweise werden wir das Gewicht eines Gramms oder eines Kilogramms als Krafteinheit und auch eine andere Längeneinheit als das Zentimeter benutzen.

Wir bemerken noch, daß man oft das Wort „Gramm“ benutzt, bald um die „Masse“, bald um das „Gewicht eines Gramms“ zu bezeichnen. Verwirrung wird hieraus bei einigem Nachdenken nicht entstehen.

§ 88. **Dichte.** *Unter der Dichte eines Stoffes versteht man die Masse der Volumeinheit.* Im C-G-S-System wird also die Dichte durch die Zahl bezeichnet, welche angibt, wieviel Gramm in 1 ccm enthalten sind, also durch dieselbe Zahl wie das spezifische Gewicht in bezug auf Wasser von 4^0.

Zuweilen wird die Dichte eines Stoffes durch die Zahl ausgedrückt, welche angibt, wievielmal größer sie ist als die Dichte einer Substanz, mit der man alle Stoffe vergleicht. Diese Zahl stellt zugleich das spezifische Gewicht des Stoffes in bezug auf diese Substanz vor.

§ 89. **Probleme über die Bewegung eines materiellen Punktes.** Die Bewegung eines als materieller Punkt betrachteten Körpers gibt zu zweierlei Problemen Veranlassung. Zuweilen muß man, nachdem man die Bewegung durch Beobachtung kennen gelernt hat, einen Schluß auf die wirkende Kraft ziehen, oder auch wohl die Kraft angeben, die für eine bestimmte angenommene Bewegung nötig ist. Zu diesem Zwecke ermittelt man zuerst die Beschleunigung (§§ 66 und 72); die Kraft muß die Richtung derselben haben und eine Größe, die man findet, indem man die Größe der Beschleunigung mit der Masse multipliziert.

In anderen Fällen kennt man für jeden Augenblick die Kraft, die auf den Körper wirkt, und es handelt sich darum, die Bewegung zu bestimmen. Dies ist möglich, wenn für den Augenblick, in welchem man die Bewegung zu betrachten anfängt, die Lage und die Geschwindigkeit gegeben sind. Bei der Lösung des Problems muß man im allgemeinen, nämlich wenn sich die Kraft nach Richtung und Größe ändert, seine Zu-

flucht zu einer Teilung der Zeit in unendlich kleine Teilchen nehmen.

a) *Geradlinige Bewegung.* Die Bahn ist eine gerade Linie, wenn die Kraft immer dieselbe Richtung hat und der Körper anfangs in Ruhe ist oder eine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der Kraft oder in der entgegengesetzten Richtung hat.

Wir teilen die Zeit in sehr kleine Teilchen und schließen zunächst so, als ob während eines jeden dieser Teile die Kraft dieselbe Größe beibehielte, welche sie am Anfang desselben hat, als ob sich die Kraft also nicht allmählich, sondern mit kleinen Sprüngen änderte. Ist m die Masse des Körpers und K die Kraft am Anfange eines der kleinen Zeitteilchen τ, dann erleidet der Körper im Laufe desselben eine Geschwindigkeitsvermehrung oder Geschwindigkeitsverminderung

$$\frac{K}{m}\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Mit Hilfe dieser Formel kann die Geschwindigkeit am Ende des Zeitteilchens τ aus der Geschwindigkeit am Anfang desselben abgeleitet werden; aus der Geschwindigkeit in dem Augenblick, in welchem man anfängt die Bewegung zu betrachten, kann also die Geschwindigkeit am Ende des ersten, zweiten, dritten Zeitteilchens usw. gefunden werden, folglich auch die Geschwindigkeit in einem beliebigen Augenblick. Das Resultat wird um so genauer sein, je kleiner man die Zeitteilchen gewählt hat; das wahre Resultat ist der Grenzwert, welchem sich der für die Geschwindigkeit gefundene Wert nähert, wenn man die Zeitteilchen immer kleiner macht. Kürzer können wir dies ausdrücken, indem wir sagen, daß die Zeit in unendlich kleine Teilchen geteilt und während des Teilchens die Kraft als konstant betrachtet wird.

Sobald die Geschwindigkeit für den ganzen Verlauf der [Be]wegung bekannt ist, kann auch der Ort des Körpers für [jede]n Augenblick gefunden werden. Bei diesem Problem kann [wäh]rend eines Zeitelementes τ die Bewegung als gleichförmig [betr]achtet werden, so daß man den zurückgelegten Weg be[stim]men kann, indem man die Geschwindigkeit mit τ multipli[zie]rt. Indem man dies für die aufeinander folgenden unendlich [klei]nen Zeiten tut, kann man die Ortsveränderung des Körpers [v]on einem Augenblick zum anderen verfolgen.

In vielen Fällen ist die Kraft, welche auf den Körper wirkt, abhängig von dem Orte, an dem er sich befindet. Man kann dann die Berechnung der Geschwindigkeit und die Bestimmung des Ortes nicht voneinander trennen, sondern muß sich mit beiden Fragen zugleich beschäftigen. Es sei P die Anfangslage des Körpers. Während eines ersten Zeitelementes legt er einen Weg zurück, der aus der Anfangsgeschwindigkeit gefunden werden kann; man kennt dann auch den Ort Q, in welchem er am Ende dieses Zeitelementes angekommen ist. Zugleich kann aus der Kraft, die in der Anfangslage P auf den Körper wirkte, abgeleitet werden, wie groß die Geschwindigkeit am Ende des Elementes geworden ist. Diese neue Geschwindigkeit dient dann zur Berechnung des Weges, der in einem zweiten Zeitteilchen zurückgelegt wird, während die gleichzeitige Geschwindigkeitsänderung aus dem Werte gefunden wird, den die Kraft am Anfang des zweiten, also am Ende der ersten Zeitteilchens hatte, einem Werte, der bekannt ist, da man den Ort Q bereits bestimmt hat. In dieser Weise kann man weiter schließen.

b) *Krummlinige Bewegung.* Wir nehmen jetzt an, daß sich die Kraft in dieser oder jener Weise in Richtung und Größe ändert, während der Körper eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit hat, deren Richtung nicht mit derjenigen der Kraft zusammenzufallen braucht.

Es sei P (Fig. 75) die Anfangslage, PA die Anfangsgeschwindigkeit, PF die anfangs auf den Körper wirkende Kraft. Wir teilen die Zeit wieder in unendlich kleine Teilchen, die wir mit τ bezeichnen. Der in dem ersten Element durchlaufene Weg PQ wird aus der Geschwindigkeit PA berechnet. Hätte nun keine Kraft auf den Körper gewirkt, so würde die Geschwindigkeit in Q durch den Vektor $QB = PA$ dargestellt werden. In Wirklichkeit aber hat der Körper zu dieser Geschwindigkeit noch eine andere Qb bekommen, die parallel PF ist, da wir während der Zeit τ

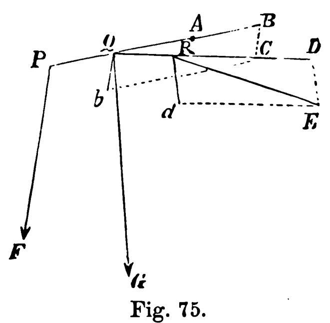


Fig. 75.

die Richtung der Kraft als konstant betrachten; die Größe von Qb ist durch den Ausdruck (16) gegeben, wenn K die Kraft PF ist.

Die Geschwindigkeit, welche der Körper in Q hat, ist die Resultante QC von QB und Qb. Aus dieser Resultante findet man den Ort R des Körpers nach einem zweiten Zeitelement, während die Geschwindigkeit RE, die er dann hat, bestimmt wird, indem man $RD = QC$ mit der Geschwindigkeit Rd zusammensetzt, die die Folge der Kraft QG ist, die auf den Körper wirkt, wenn er sich in Q befindet.

In dieser Weise kann man eine Reihe von Orten P, Q, R usw., die in unendlich kleinen Entfernungen voneinander liegen, bestimmen und also auch die ganze Bahn kennen lernen.

Daß in denjenigen Fällen, in denen die Kraft sich weder in Richtung noch in Größe ändert, der Körper eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte geradlinige Bewegung hat oder eine Parabel beschreibt, brauchen wir nicht näher auseinanderzusetzen.

§ 90. **Zusammensetzung von Kräften.** Oft wirken zwei oder mehr Bewegungsursachen zugleich auf einen materiellen Punkt. *Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Geschwindigkeit, die der Punkt dann während eines Zeitelementes bekommt, die Resultante der Geschwindigkeiten ist, die ihm die Kräfte einzeln erteilen würden,* was man auch so ausdrücken kann (vgl. § 65), daß man sagt, der Punkt nehme die letzteren Geschwindigkeiten zugleich an.

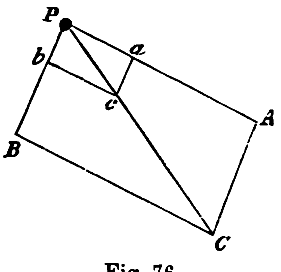


Fig. 76.

Angenommen, auf einen materiellen Punkt P (Fig. 76) wirkten nur zwei Kräfte, die durch die Vektoren PA und PB dargestellt werden. Die Geschwindigkeiten, welche diese Kräfte, wenn jede für sich allein wirkte, in einer unendlich kleinen Zeit τ dem Punkt erteilen würden, werden, wenn m die Masse ist, dargestellt durch

$$Pa = \frac{PA}{m}\tau \quad \text{und} \quad Pb = \frac{PB}{m}\tau.$$

In Wirklichkeit bekommt nun der Punkt die Geschwindigkeit, die durch die Diagonale Pc des aus Pa und Pb beschriebenen

Parallelogramms dargestellt wird. Dieselbe Geschwindigkeit würde aber in der Zeit τ entstehen, wenn auf den Punkt eine einzige Kraft in der Richtung von Pc und von der Größe

$$PC = \frac{Pc \times m}{\tau}$$

wirkte.

Aus den angeführten Beziehungen folgt

$$PA : PB : PC = Pa : Pb : Pc,$$

woraus folgt (§ 28), daß PC die Diagonale eines Parallelogramms ist, welches aus PA und PB als Seiten beschrieben wird. Also:

Zwei Kräfte, die auf denselben Punkt wirken, können durch eine einzige Kraft ersetzt werden, und man bekommt den Vektor, der diese vorstellt, indem man die Vektoren, welche die zwei gegebenen Kräfte vorstellen, nach der Regel von § 27 miteinander zusammensetzt. Die Ausdrücke „Parallelogramm der Kräfte", „Zusammensetzen von zwei Kräften", „Zerlegung einer Kraft" und die Worte „Komponenten" und „Resultante" bedürfen jetzt keiner Erklärung mehr, ebensowenig die Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl von Kräften, die auf einen materiellen Punkt wirken, zu einer einzigen Resultante, sowie die einfachen Regeln für das Zusammensetzen von Kräften, die in einer und derselben geraden Linie wirken.

Zwei Kräfte haben die Resultante Null, sind also, wie wir bereits wissen, miteinander im Gleichgewicht, wenn sie gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind.

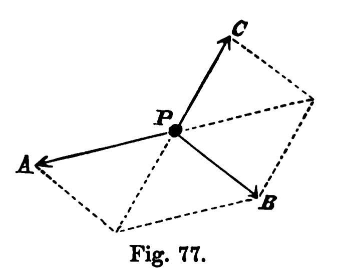


Fig. 77.

Bei drei Kräften ist Gleichgewicht möglich, wenn die dritte PC (Fig. 77) gleich und entgegengesetzt gerichtet ist der Resultante der beiden anderen PA und PB. Dann ist auch PA gleich und entgegengesetzt gerichtet der Resultante von PB und PC.

Nach dem am Anfang dieses Paragraphen Gesagten kann man das Gleichgewicht von zwei oder drei Kräften so auffassen, daß die Geschwindigkeiten, die die Kräfte während eines Zeitelementes dem materiellen Punkt erteilen, sich gegen-

seitig vernichten, eine Auffassung, die allerdings in vielen Fällen etwas gekünstelt ist.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die Betrachtung, durch welche wir zu dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte gekommen sind, unabhängig von der Geschwindigkeit ist, die der materielle Punkt am Anfang der Zeit τ bereits haben kann. Einerlei welche Richtung und Größe diese Geschwindigkeit hat, der Punkt würde immer außerdem noch die Geschwindigkeit Pa oder die Geschwindigkeit Pb (Fig. 76) bekommen, wenn entweder nur die eine oder nur die andere Kraft wirkte, und er bekommt zu der bereits vorhandenen Geschwindigkeit die durch Pc dargestellte, wenn beide Kräfte zugleich auf ihn einwirken.

Der Satz, daß zwei Kräfte, die zugleich auf einen materiellen Punkt wirken, diesem dieselben Geschwindigkeiten erteilen, die sie zur Folge haben würden, wenn sie allein wirkten, ist, wie gesagt, aus der Erfahrung abgeleitet. Die Richtigkeit desselben kann jedoch nicht durch einen einzigen Versuch bewiesen werden. Ist der Satz z. B. für die Spannungen von Seilen bewiesen, so folgt daraus noch keineswegs, daß er auch für die Anziehungen und Abstoßungen von Magnetpolen gilt. Das Gesetz muß daher für verschiedene Klassen von Kräften besonders bewiesen werden. Dies ist nicht immer direkt geschehen; daß wir dennoch von der Richtigkeit des Gesetzes überzeugt sind, ist der Übereinstimmung aller daraus gezogenen Schlüsse mit der Wirklichkeit zu verdanken.

Mit anderen Sätzen, die in diesem Kapitel besprochen wurden, verhält es sich ebenso. Bei den meisten Kräften würde es nicht leicht sein, durch einen einfachen direkten Versuch zu beweisen, daß die Beschleunigung, die sie einem und demselben Körper erteilen, der Größe der Kraft proportional ist. Zu den auseinandergesetzten Grundsätzen ist man denn auch nicht durch eine Reihe von leicht auszuführenden Versuchen, sondern durch ein langes Studium der Naturerscheinungen gekommen.

§ 91. **Zerlegung der Bewegung und der Kraft nach zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen.** In Fig. 78 stellt LL die Bahn eines materiellen Punktes vor, der sich in der Ebene XOY bewegt, PH die Beschleunigung in einem be-

stimmten Augenblick und PF, von derselben Richtung wie PH, die zu dieser Zeit wirkende Kraft. Wenn die Masse mit m bezeichnet wird, hat man

$$PF = m \times PH.$$

Zerlegt man nun die Beschleunigung in die Komponenten PK und PN, parallel zu den Koordinatenachsen, und ebenso die Kraft in die Komponenten PQ und PS, dann ist

$$PQ = m \times PK \quad \text{und} \quad PS = m \times PN.$$

Wir wissen aber bereits, daß PK die Beschleunigung bei der Bewegung des Körpers in der Richtung OX ist, d. h. bei der Bewegung der Projektion auf dieser Achse. Hätte der Körper nur diese Bewegung, bewegte er sich also so wie es die Projektion tut, so müßte auf ihn also die Kraft PQ wirken. Etwas ähnliches gilt von der Bewegung in der Richtung von OY, und wir können schließen:

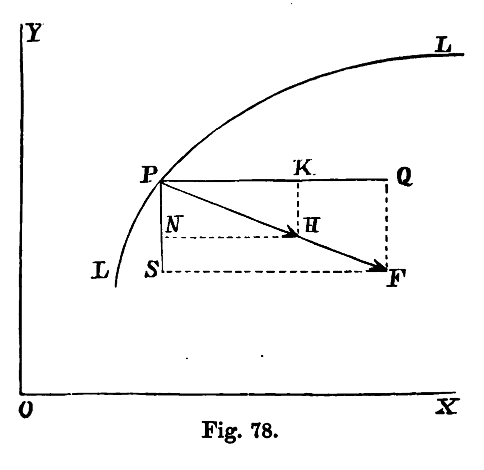


Fig. 78.

Die Kraft, welche bei der krummlinigen Bewegung wirken muß, wird gefunden, indem man die Kräfte, welche wirken müßten, wenn der Körper entweder nur die Bewegung in der Richtung OX oder nur die in der Richtung OY hätte, miteinander zusammenzusetzt.

Zu einem hiermit übereinstimmenden Satz kommt man, wenn man die Bewegung eines Körpers im Raum in bezug auf drei zueinander senkrechte Koordinatenachsen betrachtet.

Wir wollen in den folgenden Paragraphen dieses Kapitels die Grundsätze, welche wir jetzt kennen gelernt haben, auf einige Bewegungserscheinungen anwenden.

§ 92. **Nähere Betrachtung fallender und vertikal in die Höhe steigender Körper.** In § 89 wurde angegeben, wie man für einen Körper, dessen Geschwindigkeit für jeden Augenblick

bekannt ist, den in einer bestimmten Zeit zurückgelegten Weg berechnen kann. Besonders einfach wird diese Berechnung, wenn die Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert ist. Teilt man nämlich die betrachtete Zeit in unendlich viele gleiche Teile und berechnet für jeden Zeitteil den zurückgelegten Weg mit der Geschwindigkeit, welche der Körper am Anfang dieses Zeitteils besitzt, so bilden die Resultate eine arithmetische Reihe. Ist n die Anzahl der Teile, v_0 die Geschwindigkeit am Anfang der Zeit ϑ und v_1 die Geschwindigkeit am Ende derselben, so ist das erste Glied der Reihe $v_0 \frac{\vartheta}{n}$ und das letzte Glied $\left[v_1 - \frac{v_1 - v_0}{n}\right] \frac{\vartheta}{n}$. Also ist die Summe

$$\tfrac{1}{2} n \left\{ v_0 \frac{\vartheta}{n} + \left[v_1 - \frac{v_1 - v_0}{n}\right] \frac{\vartheta}{n} \right\} = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_1)\vartheta - \frac{v_1 - v_0}{2n}\vartheta.$$

Der Grenzwert hiervon für $n = \infty$ ist

$$s = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_1)\vartheta, \text{ d. h.:}$$

Bei einer gleichförmig beschleunigten oder gleichförmig verzögerten Bewegung findet man den zurückgelegten Weg, wenn man die betrachtete Zeit mit der halben Summe (dem Mittel) der Anfangs- und Endgeschwindigkeit multipliziert.

Hat ein fallender Körper in dem Augenblick, in welchem wir anfangen seine Bewegung zu betrachten, bereits eine Geschwindigkeit v_0, so wird durch die Wirkung der Schwerkraft die Geschwindigkeit nach t Sekunden geworden sein

$$v_t = v_0 + g t;$$

der in dieser Zeit zurückgelegte Weg ist also

$$s = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_t) t = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal in die Höhe geworfen, so dauert es

$$\frac{v_0}{g}$$

Sekunden, bis die Geschwindigkeit erschöpft ist (§ 64). Da die halbe Summe der Anfangs- und Endgeschwindigkeit für diese Zeit $\frac{1}{2} v_0$ ist, so ist die Höhe, bis zu welcher der Körper steigt,

$$\tfrac{1}{2} v_0 \times \frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

In diesem Resultat, welches bereits früher (§ 64) gefunden wurde, kommt die zweite Potenz der Anfangsgeschwindigkeit vor, da, wenn sie z. B. verdoppelt wird, der Körper eine zweimal längere Zeit steigt und sich außerdem in dieser Zeit mit einer zweimal größeren mittleren Geschwindigkeit bewegt.

§ 93. **Druck eines Körpers auf eine horizontale Ebene, die nach oben oder nach unten bewegt wird.** Wir wollen annehmen, die Ebene habe eine beschleunigte Bewegung nach oben und die Beschleunigung sei in einem bestimmten Augenblick a. Dann hat auch der Körper, der auf der Ebene liegt, eine ebenso große Beschleunigung und, wenn die Masse m ist, muß, alles zusammengenommen, eine Kraft nach oben auf ihn wirken, die durch

$$a m$$

ausgedrückt wird. Auf den Körper wirkt nun erstens das Gewicht P und zweitens der nach oben gerichtete Widerstand der Ebene, den wir x nennen wollen. Also:

$$x - P = a m,$$

und, da $P = g m$ ist,

$$x = \left(1 + \frac{a}{g}\right) P.$$

Wegen der Gleichheit von Aktion und Reaktion hat der Druck des Körpers auf die Ebene denselben Wert. Die Fälle, in denen die Ebene eine verzögerte oder gleichförmige Bewegung nach oben hat oder nach unten geht, wollen wir dem Leser überlassen. Wir machen nur noch auf die eigentümliche Weise aufmerksam, in welcher der Druck bestimmt wird. Er ist nicht bekannt, weil uns gegeben ist, wie weit die Ebene eingedrückt wird, sondern weil wir die Bewegung des Körpers kennen.

Mit dem Druck verhält es sich hier wie in vielen Fällen mit der Spannung eines Seils; er ist nicht vorher gegeben, sondern er richtet sich nach den Umständen. Die Ebene wird eben so weit eingedrückt, daß die Kraft, die sie auf den Körper ausübt, den oben berechneten Wert hat; ist dieser erreicht, dann hat der Körper dieselbe Bewegung wie die Ebene und drückt diese nicht weiter ein.

§ 94. **Maschine von Atwood.** Um eine Rolle, die sich um eine horizontale Achse dreht, ist ein Seil geschlagen,

welches an den Enden zwei ungleiche Gewichte trägt, nämlich rechts ein Gewicht P und links ein Gewicht P'. Wir nehmen an, daß das Seil nicht über die Rolle gleiten kann und daß $P' > P$ ist; die Spannungen des Seils rechts und links von der Rolle nennen wir S und S'. Wenn nun die Gewichte losgelassen werden, so entsteht eine beschleunigte Bewegung, und dabei kann man das Folgende bemerken.

Da das Gewicht rechts steigt, muß $S > P$ sein, denn die einzigen Kräfte, die auf das Gewicht wirken, sind die Schwerkraft und die Spannung S. Dagegen muß links $S' < P'$ sein. Endlich muß $S' > S$ sein, denn der Unterschied dieser Spannungen ist es, der der Rolle eine beschleunigte Rotation erteilt. Man hat also

$$P < S < S' < P'.$$

Die Spannungen S und S' regulieren sich nun von selbst so, daß die Differenzen $S - P$, $S' - S$, $P' - S'$ gerade diejenigen Werte annehmen, die sie haben müssen, damit bei der Bewegung der Gewichte und der Rolle sich die Länge des Seils nicht ändert. Um einzusehen, wie dieses „regulieren" vor sich geht, nehmen wir an, daß in dem Augenblick, in welchem die Gewichte losgelassen werden, zunächst noch $S = P$ ist. Dann würde das Gewicht rechts einen Augenblick in Ruhe bleiben, während die Rolle bereits angefangen hat sich zu drehen; dadurch würde eine kleine Ausdehnung des Seils rechts entstehen und $S > P$ werden. Oder, wenn S' viel größer als S wäre, so würde die Drehung der Rolle sofort so beschleunigt werden, daß eine kleine Ausdehnung des Seils rechts und eine Zusammenziehung des Seils links die Folge ist. Dadurch würde die Differenz $S' - S$ kleiner werden.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Rolle eine viel kleinere Masse hat als die Gewichte; dann werden sich die Spannungen so regulieren, daß $S' - S$ viel kleiner ist als die Differenzen $S - P$ und $P' - S'$, welche die Kräfte vorstellen, die auf die Gewichte wirken. Wir können dann die Differenz $S' - S$ vernachlässigen und für die zuletzt genannten Kräfte setzen

$$S - P \quad \text{und} \quad P' - S.$$

Da nun diese Kräfte den Massen gleiche Beschleunigungen

nach oben und nach unten erteilen, müssen sie diesen Massen und also auch den Gewichten proportional sein. Man hat also

$$(S - P):(P' - S) = P:P',$$

woraus folgt

$$S = \frac{2PP'}{P' + P}.$$

Hieraus findet man für die Kraft, welche das Gewicht P nach oben treibt,

$$S - P = \frac{P(P' - P)}{P' + P}$$

und für die Beschleunigung, welche die Gewichte bekommen,

$$g\frac{P' - P}{P' + P}.$$

§ 95. **Einfluß des Widerstandes der Luft auf den Fall der Körper.** Ein Körper, der sich in der Luft fortbewegt, erleidet einen Widerstand (§ 76), *der um so größer ist, je schneller die Bewegung ist.* Wenn wir einen Körper fallen lassen, so hat er während der ersten Zeitteilchen noch eine so geringe Geschwindigkeit, daß vom Luftwiderstand abgesehen werden kann; anfangs hat er daher nahezu dieselbe gleichförmig beschleunigte Bewegung, die er im luftleeren Raum annehmen würde. Beim Zunehmen der Geschwindigkeit wird aber auch der Widerstand immer größer; die gesamte auf den Körper wirkende Kraft, die Resultante des Gewichtes und des Widerstandes, nimmt ab. Die Bewegung ist zwar noch beschleunigt, aber die Geschwindigkeitsvermehrungen während aufeinander folgender gleicher Zeitelemente werden immer kleiner. Dies geht so fort, *bis eine Geschwindigkeit erreicht ist, bei welcher der Widerstand gleich dem Gewicht des Körpers ist.* Da sich dann die beiden Kräfte einander aufheben, ändert sich die Geschwindigkeit nicht mehr, und diese gleichförmige Bewegung behält der Körper bei, eben weil *fortwährend* der Widerstand im Gleichgewicht mit dem Gewicht ist. Die Regentropfen haben in der Nähe der Erdoberfläche eine solche gleichförmige Bewegung.

Wie groß die Endgeschwindigkeit ist und wie lange es dauert, bis sie erreicht wird, hängt einesteils vom Gewicht und anderenteils von der Größe des Widerstandes ab. Die Schwerkraft wirkt auf alle Stoffteilchen des Körpers, der Widerstand nur auf diejenigen, welche an der Oberfläche liegen.

Daraus folgt, daß von zwei Körpern, die bei gleichem Gewicht verschiedene Oberflächen haben, der mit der größten Oberfläche die kleinste Endgeschwindigkeit bekommt. Ist nämlich v der Wert der Geschwindigkeit, bei welcher für *diesen* Körper der Luftwiderstand die Schwerkraft aufhebt, so wird für den anderen Körper, wenn er dieselbe Geschwindigkeit erreicht hat, der Widerstand noch kleiner sein als das Gewicht. Bei diesem letzteren Körper hat daher, wenn er die Geschwindigkeit v hat, die Beschleunigung noch nicht aufgehört.

Ebenso kann man beweisen, daß von zwei Körpern, welche dieselbe Größe und Gestalt, aber verschiedenes Gewicht haben, der schwerere die größere Endgeschwindigkeit bekommt.

Man wird jetzt einsehen, weshalb Körper wie ein Blatt Papier, eine Feder, eine Schneeflocke, ein Fallschirm so langsam fallen, während eine schwere Metallkugel sich in der Luft nahezu den Gesetzen des freien Falls entsprechend bewegt.

Ein Mittel, die Oberfläche eines Körpers zu vergrößern, besteht darin, daß man ihn in getrennte Stücke zerteilt; hierdurch kommen nämlich zu der ursprünglichen Oberfläche neue Oberflächen hinzu. Zerteilen wir daher von zwei gleichen Körpern den einen in kleine Teile und lassen diese in einiger Entfernung voneinander gleichzeitig fallen, so wird die Bewegung viel langsamer vor sich gehen als der Fall des Körpers, der unzerteilt geblieben ist. Ein kleiner Körper bekommt daher eine kleinere Endgeschwindigkeit als ein großer Körper von demselben Stoff.

Wir können dies auch begreifen, wenn wir bedenken, daß, wenn alle Dimensionen eines Körpers 2 mal kleiner gemacht werden, das Gewicht 8 mal, die Oberfläche aber nur 4 mal kleiner wird.

Sehr kleine Körperchen bekommen nur eine geringe Endgeschwindigkeit. In ruhiger Luft würden sie indes immer fallen. Es sind jedoch immer strömende Bewegungen in der Luft vorhanden, z. B. infolge von Temperaturverschiedenheiten, und wenn nun die Endgeschwindigkeit, welche ein Körperchen in ruhiger Luft bekommen würde, kleiner als die Geschwindigkeit der Luftströmungen ist, so ist das Körperchen ein Spielball dieser letzteren; es wird bald hierhin bald dorthin getrieben werden und dabei schwebend bleiben. Dies ist der Fall bei den

zahllosen Staubteilchen, die in dem Wege eines Sonnenstrahls in der Luft sichtbar werden.

Was hier über den Widerstand in der Luft gesagt wurde, gilt auch vom Widerstand in Flüssigkeiten. Dieser ist unter sonst gleichen Umständen größer als der Widerstand der Luft; ein kleines Körperchen schwebt also im Wasser leichter als in der Luft. Fein verteilte Niederschläge setzen sich zuweilen überhaupt nicht.

§ 96. **Größe des Widerstandes.** Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten ist der Widerstand w, den ein Gas oder eine Flüssigkeit auf einen Körper ausübt, der Geschwindigkeit v proportional. Wird diese immer größer, so nimmt w jedoch schneller zu, so daß der Zusammenhang zwischen beiden schließlich ziemlich genau durch eine Formel von der Form

$$w = a v^2$$

ausgedrückt werden kann.

Um eine Vorstellung von der Größe des Luftwiderstandes zu geben, führen wir an, daß eine Kugel vom Radius R, die sich mit der sehr kleinen Geschwindigkeit v in Luft von 0° C. bewegt, einen Widerstand erleidet, der durch die Gleichung

$$w = 0{,}0035\, R\, v$$

bestimmt wird, wenn alles in C-G-S-Einheiten ausgedrückt wird. Dieser Widerstand bei kleinen Geschwindigkeiten ist der inneren Reibung der Luft zuzuschreiben, die wir später kennen lernen werden; er ist nicht, wie man bei oberflächlicher Betrachtung erwarten könnte, der Oberfläche, sondern dem Radius R proportional.

Bei größeren Geschwindigkeiten tritt die innere Reibung in den Hintergrund; die theoretische Bestimmung des Widerstandes, der dann besteht, ist mit großen Schwierigkeiten verbunden. Die folgende Betrachtung hat daher auch nicht viel mehr Bedeutung, als daß sie zur Annahme einer bestimmten Form für eine empirische Formel führt.

Eine Ebene habe die Größe S und bewege sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der Normalen in einer Flüssigkeit oder einem Gas von der Dichte ϱ. Die Ebene verdrängt pro Sekunde ein Volum $S v$ des Mittels, also eine Masse $S \varrho v$. Nimmt man an, daß sie dieser die Geschwindigkeit v erteilt, so muß die Ebene auf das Mittel eine Kraft

$$w = S \varrho v^2$$

ausüben. Dies ist nämlich die Kraft, die der Masse $S \varrho v$ in der Sekunde die Geschwindigkeit v erteilen kann.

Daß diese Schlußfolgerung höchst mangelhaft ist, liegt auf der Hand. Sie nimmt nämlich keine Rücksicht auf die Einzelhditen des in dem Mittel erregten Bewegungszustandes. Es ist nicht richtig, daß nur der Stoff, welcher in dem Volum $S v$ enthalten ist, in Bewegung gesetzt wird, auch nicht, daß die in Bewegung gesetzten Flüssigkeits- oder Gasteilchen

gerade die Geschwindigkeit v bekommen. **Man hat indes gefunden, daß die Ergebnisse der Beobachtung ziemlich gut durch die empirische Formel**

$$w = k S \varrho v^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

wiedergegeben werden können, in welcher k ein Faktor ist, der experimentell bestimmt werden muß. Dieser Faktor ist von der Größe und der Gestalt der Ebene abhängig.

Wegen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ist die Kraft w auch der Widerstand, den das Mittel der Ebene entgegensetzt.

Bei Flächen, die kleiner als 1 qdm sind, ist k ungefähr 0,6.

Die Formel kann auch auf einen Körper von beliebiger Gestalt angewandt werden; man muß dann unter S die Größe der Projektion des Körpers auf eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Ebene verstehen, und unter k einen Koeffizienten, der von der Gestalt des Körpers abhängt. Es ist z. B. eine geringere Kraft erforderlich, um eine Kugel mit einer gewissen Geschwindigkeit durch ein Gas oder eine Flüssigkeit zu bewegen, als dasselbe mit einer kreisförmigen Scheibe zu tun, die denselben Radius wie die Kugel hat und die senkrecht zur Bewegungsrichtung gehalten wird.

Für einen Körper, der an der Vorderseite mit einer scharfen Kante oder mit einer Spitze versehen ist, ist der Koeffizient k viel kleiner als für eine Ebene. Dagegen ist er größer als für eine Ebene bei einem Körper, der die Form einer Kugelhaube hat und der die hohle Seite nach vorn wendet. Versuche haben z. B. gelehrt, daß für einen Fallschirm, der die Gestalt eines Regenschirmes hat, der Koeffizient beinahe zweimal so groß ist als für eine Ebene. Wird der Fallschirm umgekehrt, so wird der Koeffizient ungefähr $^3/_4$ von demjenigen für eine Ebene. Für eine Kanonenkugel, die sich mit einer Geschwindigkeit von Hunderten von Metern bewegte, ergab sich, daß k ungefähr 0,4 ist.

Da die Kräfte zwischen einem Körper und dem umgebenden Mittel nur von der relativen Geschwindigkeit abhängen können, stellt die Formel (17) auch die Kraft vor, mit der ein Luft- oder Flüssigkeitsstrom mit der Geschwindigkeit v auf einen ruhenden Körper wirkt. Mit Hilfe einer solchen Formel kann man z. B. die Wirkung des Windes auf die Flügel einer Windmühle oder die Wirkung eines Wasserstromes auf die Schaufeln eines Wasserrades berechnen.

§ 97. **Andere Beispiele einer Bewegung, die durch einen Widerstand gleichförmig wird.** Bei einem Wagen, der auf einem horizontalen Weg fortgezogen wird und bei einem Schiff, welches vermittelst einer Leine bewegt wird, können wir ähnliche Betrachtungen anstellen wie beim Fall in der Luft. Der Weg, das Wasser und die Luft üben einen Widerstand aus, der mit der Geschwindigkeit zunimmt und, sobald er gleich der bewegenden Kraft geworden ist, die Bewegung gleichförmig macht. Während der ersten Zeit nach dem Anfang der Be-

wegung muß die Kraft dazu dienen, die Bewegung zu beschleunigen; sobald aber die Endgeschwindigkeit erreicht ist, dient sie nur dazu, die Reibung zu überwinden.

Wir können die Bewegung dadurch verzögern, daß wir die bewegende Kraft verkleinern oder aufhören lassen, oder auch dadurch daß wir den Widerstand vergrößern. Daß, um einen schwer beladenen Wagen mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf einer horizontalen Ebene fortzubewegen, eine größere Kraft erforderlich ist als bei einem leichteren Wagen, ist eine Folge davon, daß der Widerstand, den der Weg bietet, um so größer ist, je stärker der Wagen durch die Schwerkraft gegen den Boden gedrückt wird.

§ 98. **Fortschlagen oder Fortwerfen eines Körpers.** *Welche Geschwindigkeit eine Kraft erzeugt, hängt auch von der Zeit ab, während der sie wirkt.*

Man kann daher nicht sagen, daß, um einem Körper eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen, eine Kraft von bestimmter Größe erforderlich ist. Wie groß die Kraft sein muß, hängt von der Zeit ab, in welcher sie die verlangte Geschwindigkeit zustande bringen soll.

Wir wollen z. B. annehmen, wir wollten einer Kugel, deren Masse 500 g beträgt, eine Geschwindigkeit von 200 cm pro Sekunde geben. Wir können sie zu diesem Zwecke $\frac{200}{981} = 0{,}204$ Sekunden fallen lassen; dabei wirkt auf sie eine Kraft von 500×981 Dyn. Wir können aber auch eine zweimal so große Kraft 0,102 Sekunden lang oder eine zweihundertmal so große 0,00102 Sekunden lang auf die Kugel wirken lassen. Wenn wir der Kugel die Geschwindigkeit von 200 cm dadurch geben, daß wir sie mit einem Hammer fortschlagen, so können wir aus der Geschwindigkeit weder die Größe der Kraft, noch auch die Zeit ableiten, während der sie gewirkt hat. Das einzige, was wir sagen können, ist, daß das Produkt beider einen bestimmten Wert hat. Aus der Formel (14) folgt nämlich, daß, wenn die Kraft K während der Zeit τ der Masse m die Geschwindigkeit v erteilt,

$$K\tau = mv \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

ist.

Bei Kräften, die sehr kurze Zeit wirken oder, wie man zu sagen pflegt, einem Körper eine Geschwindigkeit *plötzlich* erteilen, wird das Produkt $K\tau$ die Größe des *Stoßes* genannt.

§ 99. **Bewegungsgröße.** *Wenn ein materieller Punkt eine Geschwindigkeit v hat, so kann man in der Richtung derselben einen Vektor ziehen, dessen Größe das Produkt aus v und der Masse m vorstellt. Dieser Vektor wird als das Maß für die Größe oder Quantität der Bewegung betrachtet und auch selbst die Bewegungsgröße genannt.*

Wenn ein materieller Punkt zugleich zwei Geschwindigkeiten hat, so können wir auch sagen, daß er die zwei Bewegungsgrößen, welche diesen Geschwindigkeiten entsprechen, zugleich hat, und aus der Regel für das Zusammensetzen von zwei Geschwindigkeiten in Verbindung mit dem Satze von § 28 folgt dann, daß die wirkliche Bewegungsgröße gefunden wird, indem man die beiden soeben genannten Bewegungsgrößen nach der Vorschrift von § 27 zusammensetzt.

Anstatt zu sagen, daß ein materieller Punkt durch die Wirkung einer Kraft zu der Geschwindigkeit, welche er bereits hat, eine gewisse Geschwindigkeit hinzubekommt, können wir auch sagen, daß er eine neue Bewegungsgröße bekommt, die mit der bereits vorhandenen zusammengesetzt werden muß.

Der Nutzen der Einführung dieser neuen Größe liegt in dem folgenden Satz, der unmittelbar aus der Formel (18) folgt:

Eine bestimmte Kraft, die während einer bestimmten Zeit in unveränderter Richtung wirkt, bringt eine bestimmte Bewegungsgröße hervor, einerlei wie groß die Masse des materiellen Punktes ist.

Setzt man in (18) $\tau = 1$, so wird $K = mv$, d. h.

Die Bewegungsgröße, welche eine Kraft in der Zeiteinheit hervorbringt, wird durch diesselbe Zahl ausgedrückt wie die Kraft.

Nimmt man dagegen an, daß τ sehr klein ist und nennt man das Produkt $K\tau$ den Stoß, so lehrt uns die Formel:

Ein Stoß wird durch dieselbe Zahl ausgedrückt wie die Bewegungsgröße, die er hervorbringt.

§ 100. **Stoß zweier Körper.** Werden zwei Körper, die Kräfte aufeinander ausüben, ihrer gegenseitigen Einwirkung überlassen, so folgt aus dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung

und Gegenwirkung in Verbindung mit dem Satz von § 85, daß die Geschwindigkeiten, welche sie in einer gewissen Zeit zu der bereits vorhandenen hinzubekommen, entgegengesetzt gerichtet und umgekehrt proportional den Massen sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die Körper gleiche und entgegengesetzte Bewegungsgrößen bekommen.

Es seien z. B. A und B (Fig. 79) zwei Kugeln, die die Massen m_1 und m_2 haben und deren Mittelpunkte sich auf derselben geraden Linie in derselben Richtung bewegen. Es sei v_1 die Geschwindigkeit von A, v_2 die Geschwindigkeit von B und $v_1 > v_2$, so daß A die Kugel B einholt. Im Augenblick der ersten Berührung haben die Mittelpunkte noch diese Geschwindigkeiten und sie werden sich daher noch einige, wenn auch nur kurze Zeit, einander nähern, was nur möglich ist, wenn die Körper an der Berührungsstelle eingedrückt werden. Dadurch entsteht aber eine gegenseitige Abstoßung, welche die Geschwindigkeit von A verkleinert und die Geschwindigkeit von B vergrößert. Nach einiger Zeit werden infolgedessen die Körper eine gleich große Geschwindigkeit x bekommen haben. Diese wollen wir berechnen.

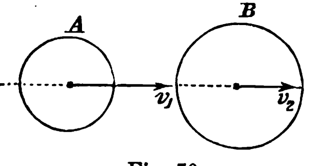


Fig. 79.

Die Geschwindigkeit von A hat um $v_1 - x$ abgenommen und diejenige von B hat um $x - v_2$ zugenommen. Diese Änderungen müssen den Massen umgekehrt proportional sein. Man hat also

$$(v_1 - x):(x - v_2) = m_2 : m_1,$$

woraus folgt

$$x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Man kommt zu demselben Resultat, wenn man bedenkt, daß beim Stoß A und B gleiche, aber entgegengesetzte Bewegungsgrößen bekommen und daß sich also die Summe der Bewegungsgrößen beider Körper nicht ändert. Hieraus folgt nämlich:

$$m_1 x + m_2 x = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Für den Fall, daß die Kugeln vor dem Stoß entgegengesetzte Geschwindigkeiten haben, gelten dieselben Formeln,

nur muß jetzt durch die Zeichen + und — unterschieden werden, nach welcher Seite die Bewegung gerichtet ist. Das Vorzeichen, welches x bekommt, gibt dann zugleich die Richtung der gemeinsamen Geschwindigkeit an. Diese ist Null, wenn die Körper vor dem Stoß entgegengesetzte Geschwindigkeiten haben, die den Massen umgekehrt proportional sind.

Das Gesagte gilt auch für einige andere Formen der zusammenstoßenden Körper, z. B. für Zylinder, die sich mit den Achsen auf derselben geraden Linie bewegen.

Ob sich die Geschwindigkeiten der Körper, nachdem sie einander gleich geworden sind, noch weiter ändern, wollen wir vorläufig dahingestellt sein lassen.

§ 101. **Kraft, die für eine einfache Schwingung erforderlich ist.** Wenn ein Körper zwischen den Punkten A und B (Fig. 80) eine einfache Schwingung ausführt, so ist die Bewegung bei jeder Annäherung an den Mittelpunkt O der Bahn beschleunigt, bei jeder Entfernung von diesem Punkt verzögert (§ 69). Daraus folgt, daß auf den Körper in jedem Augenblick eine Kraft wirken muß, die nach dem Punkt O hin gerichtet ist, eine Kraft, die man in der in § 89 angegebenen Weise berechnen kann.

A O B

Fig. 80.

Sie ist, während der Punkt einen der Wege AO oder BO durchläuft, nicht konstant, da wir es hier nicht mit *gleichförmig* beschleunigten oder verzögerten Bewegungen zu tun haben. Aus dem Resultat, welches wir in § 69 für die Beschleunigung fanden, folgt, daß in dem Augenblick, in welchem sich der Körper in der Entfernung s von O befindet, die Kraft den folgenden Wert haben muß:

$$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

In dieser Formel bedeutet m die Masse.

Es ist leicht einzusehen, weshalb die Kraft um so größer sein muß, je kleiner T ist. Wenn wir den Körper einmal mit der Schwingungszeit T und ein anderes Mal mit der Schwingungszeit $\frac{1}{2} T$ zwischen A und B hin- und hergehen lassen wollen, so müssen wir ihm beim zweiten Versuch während der Bewegung von A nach O eine zweimal so große Geschwindigkeit geben als beim ersten Versuch, und da wir dies in einer halb

so langen Zeit tun müssen, so ist es kein Wunder, daß wir eine viermal so große Kraft wirken lassen müssen. Ebenso ist es einleuchtend, daß die Erschöpfung der Geschwindigkeit während der Bewegung von O nach B bei dem zweiten Versuch eine viermal so große Kraft erfordert als bei dem ersten.

Besonders wichtig ist der in der Formel enthaltene Satz: *Soll ein materieller Punkt eine einfache Schwingung ausführen, so muß auf ihn eine Kraft wirken, die der Entfernung vom Mittelpunkt der Bahn proportional ist.* Die Kraft muß am größten sein an den Enden der Bahn und, während sich der Körper dem Punkt O nähert, abnehmen, um beim Durchgang durch O für einen Augenblick gleich Null zu sein.

§ 102. **Einfache Schwingung unter dem Einfluß einer gegebenen Kraft.** Man kann den soeben ausgesprochenen Satz umkehren und sagen:

Wenn auf einen Körper, der sich auf einer geraden Linie LL (Fig. 81) *bewegen kann, eine Kraft wirkt, die immer nach einem festen Punkt O dieser Linie hin gerichtet und proportional der Entfernung von O ist, so wird der Körper, wenn er in dem einen oder anderen Punkt von LL losgelassen wird oder den Punkt O mit einer gewissen Geschwindigkeit verläßt, O eine einfache Schwingung um den Punkt O ausführen.*

L A A' O B B L

Fig. 81.

Da auf den Körper keine Kraft wirkt, wenn er sich im Punkt O befindet, ist dieser Punkt die Gleichgewichtslage.

Gerade deshalb, weil die Kräfte, die auf einen Körper wirken, oft eine Resultante haben, die nach einem festen Punkt hin gerichtet und der Entfernung von diesem Punkt proportional ist, kommen einfache Schwingungen so häufig vor.

Eine wichtige Eigentümlichkeit bei der Bewegung eines materiellen Punktes, auf den derartige Kräfte wirken, ist die, daß die Schwingungszeit dieselbe ist, einerlei, ob der Punkt in eine große oder eine kleine Entfernung von seiner Gleichgewichtslage gebracht wird. Wenn wir ihn z. B. einmal in A und bei einem zweiten Versuch in A' loslassen, so braucht er jedesmal dieselbe Zeit, um in den Punkt O zu kommen; da die Kraft der Entfernung von O proportional ist, wird er nämlich bei dem ersten Versuch durch eine größere Kraft nach O

hingetrieben als beim zweiten; er bekommt daher auch beim ersten Versuch größere Geschwindigkeiten, und zwar gerade in dem Maße, daß er bei beiden Versuchen den Punkt O in derselben Zeit erreicht.

Man drückt dies dadurch aus, daß man sagt, daß große und kleine Schwingungen *isochron* sind.

Kennt man die Masse des Körpers und das konstante Verhältnis zwischen der Kraft, die auf ihn wirkt, und der Entfernung von O, so ist die Dauer der Schwingungen bestimmt. Man sieht ohne weiteres ein, daß eine Vergrößerung der nach O wirkenden Kräfte bei gleichbleibender Masse zur Folge hat, daß die Schwingungen schneller aufeinander folgen, während eine Vergrößerung der Masse den entgegengesetzten Einfluß hat.

Es sei α das betreffende konstante Verhältnis, so daß die Kraft durch αs dargestellt werden kann; dann wird die Schwingungszeit T so, daß (§ 101)

$$\frac{4\pi^2 m}{T^2} \cdot s = \alpha s$$

ist. Hieraus folgt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Aus dem Umstand, daß in dieser Formel die Amplitude nicht vorkommt, ergibt sich das Gesetz des Isochronismus.

§ 103. **Anwendungen des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte.** a) *Körper, der an zwei Seilen aufgehängt ist.* Ein Körper (Fig. 82) ist an einem Punkt C aufgehängt, der durch zwei Seile CA und CB mit den festen Punkten A und B verbunden ist. Auf C wirken drei Kräfte, nämlich das Gewicht des Körpers, welches wir durch CP darstellen, und die Spannungen der Seile AC und BC. Soll Gleichgewicht bestehen, so müssen diese letzteren eine Resultante haben, die gleich und entgegengesetzt CP ist. Macht man also, vertikal nach oben, $CP' = CP$ und zerlegt CP' in CQ und CR in der Richtung der Seile, so stellen diese Linien die Spannungen vor.

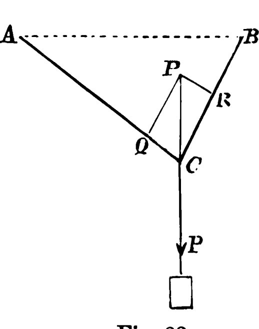


Fig. 82.

Man kann dies auch anders einkleiden. Man kann nämlich die Kraft CP in zwei andere zerlegen, die in der Verlängerung der Seile wirken. Diese Komponenten sind es, die die Spannungen von AC und BC hervorrufen.

Zwei derartige Einkleidungen sind bei vielen Problemen möglich.

b) *Gleichgewicht auf einer schiefen Ebene.* Eine Ebene, die mit einer horizontalen Ebene den Winkel α bildet, wird von einer vertikalen Ebene, die auf ihr senkrecht steht, in der Linie AB geschnitten (Fig. 83). M sei ein Körper, der auf der schiefen Ebene liegt, und der Vektor MQ stelle das Gewicht P desselben vor. Man kann dann MQ in die Kraft MS, parallel zu AB, und die Kraft MR, senkrecht zu AB, zerlegen.

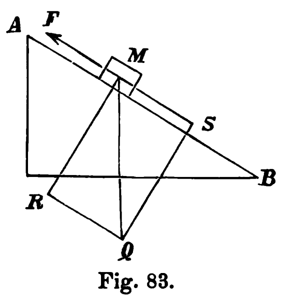


Fig. 83.

Die letztere Kraft kann keine Bewegung hervorbringen; sie drückt nur den Körper gegen die schiefe Ebene und wird durch den Widerstand derselben aufgehoben. Die Komponente

$$MS = P \sin \alpha$$

ist es, die den Körper in der Richtung AB nach unten treibt. Durch eine Kraft F von derselben Größe, die in der Richtung von BA nach oben wirkt, können wir den Körper im Gleichgewicht halten.

Ist die Ebene vollkommen glatt, so wird der Körper unter der Wirkung der Kraft F, sobald diese etwas größer als $P \sin \alpha$ ist, nach oben gehen, und dies wird selbst dann geschehen, wenn $F = P \sin \alpha$ ist, wenn der Körper eine Anfangsgeschwindigkeit nach oben hat. In diesem Sinne kann man sagen, daß eine Kraft $P \sin \alpha$ hinreichend ist, um den Körper die schiefe Ebene hinaufzuziehen.

Von dem Umstand, daß diese Kraft bei einem kleinen Neigungswinkel viel kleiner als das Gewicht P wird, wird oft Anwendung gemacht (Schiffswerft, Weg am Abhang eines Berges).

Ein Körper kann auf einer schiefen Ebene auch im Gleichgewicht sein, wenn, wie in Fig. 84, eine Kraft F in einer von

BA abweichenden Richtung auf ihn wirkt; dies ist z. B. der Fall, wenn der Körper an einem Seil befestigt ist, welches nicht parallel zu BA läuft. Um die Gleichgewichtsbedingung aufzustellen, muß man bedenken, daß auf den Körper drei Kräfte wirken, nämlich die Schwerkraft, die Kraft F (die Spannung des Seils) und die Kraft, welche durch die Ebene ausgeübt wird.

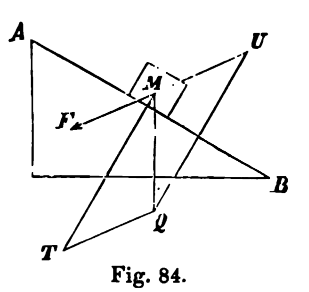


Fig. 84.

Ein Körper, der auf einer vollkommen glatten Oberfläche ruht, setzt sich in Bewegung, sobald die geringste Kraft in der Richtung der Oberfläche wirkt. Also:

Der durch eine vollkommen glatte Oberfläche ausgeübte Widerstand hat die Richtung der Normalen.

Wenn man dies berücksichtigt, so bietet es keine Schwierigkeit, das Parallelogramm der Kräfte zu finden, durch welches die Gleichgewichtsbedingung zwischen den drei genannten Kräften ausgedrückt wird. In Fig. 84 ist MQ in MT, senkrecht zu AB, und MU, entgegengesetzt der Kraft F, zerlegt.

c) *Gleichgewicht auf einer beliebigen vollkommen glatten Oberfläche.*

Die Gleichgewichtsbedingung für einen auf einer solchen Oberfläche liegenden Körper kann man im allgemeinen ausdrücken, indem man sagt, daß die Resultante aller Kräfte, die auf ihn wirken, mit Ausnahme des Widerstandes der Oberfläche, in der Richtung der Normalen und zwar nach der Oberfläche hin gerichtet sein muß. Dann kann sie nämlich durch den Widerstand aufgehoben werden.

d) *Bewegung auf einer schiefen Ebene.* Wirkt auf den Körper M von Fig. 83 keine andere Kraft als die Schwerkraft und der normale Widerstand der Fläche, so geht er in der Richtung AB abwärts, während er sich aufwärts bewegt, sobald er eine Geschwindigkeit in der Richtung BA hat. Diese Bewegungen finden unter dem Einfluß einer Kraft MS (Fig. 83) statt, die konstant bleibt, denn, in welchem Punkt von AB der Körper sich auch befindet, es kann immer ein Parallelogramm der Kräfte konstruiert werden, welches mit dem von Fig. 83 übereinstimmt. Die Bewegung auf der schiefen Ebene ist daher

gleichförmig beschleunigt oder verzögert. Die Beschleunigung ist $g \sin \alpha$, wie man findet, wenn man den Fall des Körpers auf der schiefen Ebene mit dem freien Fall vergleicht.

Bei einem Körper, der sich auf einer beliebigen gekrümmten Oberfläche bewegt, gelten ähnliche Betrachtungen. Man kann in jedem Augenblick das Gewicht in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine in die Richtung der Normalen fällt und die andere die Oberfläche entlang wirkt. Diese letztere Komponente bestimmt die Bewegung auf der Oberfläche, und diese Bewegung kann nach der Methode von § 89 näher untersucht werden.

e) Ein Körper, der durch einen Faden mit einem festen Punkt verbunden ist, ist offenbar im Gleichgewicht, wenn die Resultante aller Kräfte, die auf ihn wirken, die Richtung der Verlängerung des Fadens hat. Hieraus kann man ableiten, wie weit ein Körper, der an einem Faden aufgehängt ist, durch eine konstante horizontale Kraft aus seiner Gleichgewichtslage verschoben wird.

§ 104. **Einfaches oder mathematisches Pendel.** Wenn man einen Körper an einem undehnbaren Faden aufhängt, der so dünn ist, daß seine Masse vernachlässigt werden kann, so bekommt man ein *Pendel*, welches zum Unterschied von einem später zu besprechenden Apparat *einfaches* oder *mathematisches* Pendel genannt wird. Hat man das Pendel aus seiner Gleichgewichtslage OA (Fig. 85) in die Lage OB gebracht, so kann man das Gewicht BP des Körpers in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine, BR, in die Verlängerung des Fadens fällt, und die andere, BQ, auf diesem senkrecht steht. Diese letztere ist es, welche den Körper auf dem Kreisbogen BA nach unten treibt, und man kann in derselben Weise auch für jede andere Lage B' des Körpers die entsprechende Kraft $B'Q'$ finden. Wenn der Körper

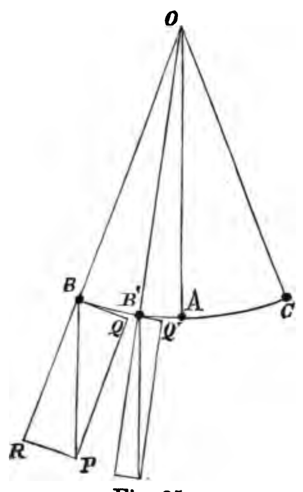


Fig. 85.

losgelassen wird, so geht er mit beschleunigter Bewegung von B nach A und steigt auf der anderen Seite von A bis zu einem Punkt C, der von A ebenso weit entfernt ist wie B. Dann kehrt er nach B zurück; kurz, er schwingt zwischen B und C hin und her.

Aus Fig. 85 folgt:

$$BQ:B'Q' = \sin BOA : \sin B'OA.$$

Wenn nun die Amplitude der Schwingungen, also der Winkel BOA, sehr klein ist, so kann man statt dessen schreiben:

$$BQ:B'Q' = \text{Bogen}\, BA : \text{Bogen}\, B'A.$$

Da also die Kraft, welche den Körper auf dem Kreisbogen nach der Gleichgewichtslage A treibt, der Entfernung von A proportional ist, so werden kleine Schwingungen auf dem Bogen in derselben Weise stattfinden wie einfache Schwingungen auf einer geraden Linie. Wenn nämlich ein materieller Punkt, wie hier, gezwungen ist, auf einer bestimmten krummen Linie zu bleiben, so kann er sich so bewegen, daß die längs dieser Linie gemessene Entfernung s von einem festen Punkt der Linie in jedem Augenblick durch die Gleichung (2) von S. 72 bestimmt ist. Dazu ist erforderlich, daß auf den Punkt eine Kraft von der in § 101 angegebenen Größe wirkt, die längs der krummen Linie, und zwar nach dem festen Punkt hin gerichtet ist. Ein Beweis dieses Satzes kann hier nicht gegeben werden.

Unter der *Schwingungszeit* verstehen wir diejenige Zeit, die das Pendel braucht, um sich aus der einen äußersten Lage in die andere zu bewegen. Sie wird für hinreichend kleine Schwingungen durch die Formel

$$\vartheta = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

bestimmt, in welcher l die Länge des Pendels bezeichnet.

Ist der Winkel $AOB = 5^0, 10^0, 15^0, 20^0$, so ist dieser Wert von ϑ bzw. 0,05, 0,19, 0,43, 0,76 $^0/_0$ zu klein.

Ist in Fig. 85 die Entfernung des Punktes B' von OA gleich d und ist die Masse des an dem Faden hängenden Körpers m, also das Gewicht des Körpers mg, so ist

$$B'Q' = mg\frac{d}{l},$$

wofür man auch schreiben kann

$$B'\,Q' = m\,g\,\frac{\text{Bogen}\,B'\,A}{l}\,.$$

Das in § 102 eingeführte Verhältnis zwischen der Kraft und der Entfernung von der Gleichgewichtslage ist also hier

$$\alpha = \frac{m}{l}\,g$$

und durch Einsetzung in (20) findet man

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

woraus die Formel (21) folgt.

In der Gleichung (21) sind die folgenden Gesetze enthalten.

a) Große und kleine Schwingungen, wenn sie nur hinreichend klein sind, so daß die Formel angewandt werden kann, werden in derselben Zeit ausgeführt. Diesen Isochronismus lernten wir bereits mehr im allgemeinen in § 102 kennen.

b) Die Schwingungszeit ist unabhängig von der Größe und der Beschaffenheit des an dem Faden aufgehängten Körpers. Dies ist eine Folge davon, daß für verschiedene Körper die Gewichte den Massen proportional sind.

c) Ein Pendel schwingt um so schneller, je kürzer es ist. Wenn nämlich ein langes und ein kurzes Pendel mit gleichen Gewichten so weit aus der Gleichgewichtslage entfernt werden, daß die Bogen BA und ba (Fig. 86) gleich lang sind, so ist, wie man leicht einsieht, die Kraft bq, durch welche der Körper b nach der Gleichgewichtslage getrieben wird, größer als die entsprechende Kraft BQ. Es ist daher begreiflich, daß, wenn man die Pendel zugleich losgelassen hat, man das kürzere zuerst die Gleichgewichtslage erreichen sieht.

Fig. 86.

d) Je stärker die Schwerkraft wird, desto schneller finden die Schwingungen statt, etwas, was man leicht hätte voraussagen

können. Die Länge eines Sekundenpendels, d. h. eines Pendels, welches in *einer* Sekunde eine Schwingung macht, ist an den Polen größer als am Äquator.

Die experimentelle Bestätigung der Gesetze a, b und c ist von großer Wichtigkeit. Es gibt z. B. kein besseres Mittel um zu beweisen, daß die Beschleunigung der Schwerkraft für alle Stoffe dieselbe ist, als die Beobachtung von Pendeln, die aus verschiedenen Substanzen bestehen.

Wenn man die Länge l des Pendels und die Zeit ϑ mißt, so kann man aus der Formel (21) g ableiten. Dies Prinzip ist es, nach welchem man genaue Bestimmungen der Beschleunigung der Schwerkraft ausgeführt hat. Man macht dabei jedoch keinen Gebrauch von einem mathematischen Pendel, sondern von einem anderen Pendel, welches wir später kennen lernen werden. Man kann nämlich ein mathematisches Pendel nicht realisieren, da ein undehnbarer Faden ohne Masse ebensowenig existiert wie ein Körper, der wirklich als ein einzelner Punkt betrachtet werden kann. Sobald der aufgehängte Körper eine merkbare Ausdehnung hat, entsteht Unsicherheit über die Frage, was man unter der Länge l zu verstehen hat.

§ 105. **Kraft, die für eine gleichförmige Bewegung in einem Kreis erforderlich ist.** Wir nehmen an, daß sich ein Körper von der Masse m mit der konstanten Geschwindigkeit v auf einem Kreis, dessen Radius r ist (Fig. 87), bewegen soll. Wir können die Kraft, welche zu diesem Zweck auf den Körper wirken muß, bestimmen, indem wir zuerst in der in § 72 angegebenen Weise die Beschleunigung suchen.

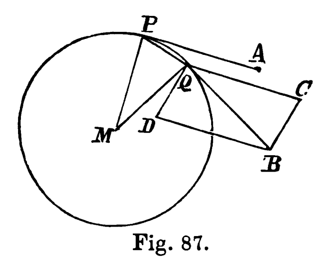


Fig. 87.

Da in Fig. 87 dieselben Buchstaben benutzt sind wie in Fig. 72, so brauchen wir das in jenem Paragraphen Gesagte nicht zu wiederholen. Zieht man die Radien MP und MQ und die Sehne PQ, so entsteht ein Dreieck, welches dem Dreieck QBC ähnlich ist, weil $\angle BQC = \angle PMQ$ und $QB = QC$ ist. Aus dieser Ähnlichkeit ergibt sich, daß CB und also auch QD senkrecht auf PQ steht, und da nun bei fortdauernder An-

näherung von Q an P die Richtung der Sehne PQ diejenige der Tangente in P zum Grenzwert hat, nähert sich die Richtung von QD derjenigen des Radius PM. Wir können also sagen, daß bei der betreffenden Bewegung die Geschwindigkeit, welche der Körper in einem Zeitelement zu derjenigen, welche er bereits hat, hinzubekommt, nach dem Mittelpunkt des Kreises hin gerichtet ist. Hierdurch ist die *Richtung* der Beschleunigung bestimmt.

Um nun die *Größe* derselben zu berechnen, bemerken wir, daß infolge der Ähnlichkeit der genannten Dreiecke

$$MP : PQ = QC : QD$$

und also

$$QD = \frac{QC}{MP} \times PQ$$

ist.

Dies ist die Geschwindigkeit, welche der Körper in der unendlich kleinen Zeit τ bekommt. Hieraus folgt für die Größe der Beschleunigung

$$\frac{QC}{MP} \times \frac{PQ}{\tau}.$$

Man kann aber die unendlich kleine Sehne PQ durch den Bogen ersetzen, und dann ist der letzte Faktor nichts anderes als die Geschwindigkeit v. Demnach wird die Beschleunigung

$$\frac{v^2}{r}.$$

Aus den gefundenen Resultaten schließen wir, daß für die angenommene Bewegung eine Kraft erforderlich ist, die fortwährend nach dem Mittelpunkt des Kreises hin gerichtet ist. Diese sogenannte *Zentripetalkraft* muß die Größe

$$K = \frac{m v^2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

haben.

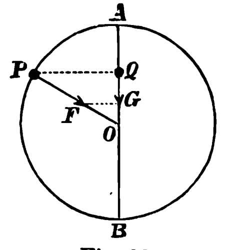


Fig. 88.

Ein Körper Q (Fig. 88) mit der Masse m führe eine einfache Schwingung auf der Linie AB mit der Schwingungszeit T aus. Wenn ein zweiter Körper P mit derselben Masse sich auf dem Kreis mit dem Durchmesser AB so bewegen soll, daß Q immer die Projektion von P ist, so muß P die konstante Geschwindigkeit

können. Die Länge eines Sekundenpendels, d. h. eines Pendels, welches in *einer* Sekunde eine Schwingung macht, ist an den Polen größer als am Äquator.

Die experimentelle Bestätigung der Gesetze a, b und c ist von großer Wichtigkeit. Es gibt z. B. kein besseres Mittel um zu beweisen, daß die Beschleunigung der Schwerkraft für alle Stoffe dieselbe ist, als die Beobachtung von Pendeln, die aus verschiedenen Substanzen bestehen.

Wenn man die Länge l des Pendels und die Zeit ϑ mißt, so kann man aus der Formel (21) g ableiten. Dies Prinzip ist es, nach welchem man genaue Bestimmungen der Beschleunigung der Schwerkraft ausgeführt hat. Man macht dabei jedoch keinen Gebrauch von einem mathematischen Pendel, sondern von einem anderen Pendel, welches wir später kennen lernen werden. Man kann nämlich ein mathematisches Pendel nicht realisieren, da ein undehnbarer Faden ohne Masse ebensowenig existiert wie ein Körper, der wirklich als ein einzelner Punkt betrachtet werden kann. Sobald der aufgehängte Körper eine merkbare Ausdehnung hat, entsteht Unsicherheit über die Frage, was man unter der Länge l zu verstehen hat.

§ 105. **Kraft, die für eine gleichförmige Bewegung in einem Kreis erforderlich ist.** Wir nehmen an, daß sich ein Körper von der Masse m mit der konstanten Geschwindigkeit v auf einem Kreis, dessen Radius r ist (Fig. 87), bewegen soll. Wir können die Kraft, welche zu diesem Zweck auf den Körper wirken muß, bestimmen, indem wir zuerst in der in § 72 angegebenen Weise die Beschleunigung suchen. Da in Fig. 87 dieselben Buchstaben benutzt sind wie in Fig. 72, so brauchen wir das in jenem Paragraphen Gesagte nicht zu wiederholen. Zieht man die Radien MP und MQ und die Sehne PQ, so entsteht ein Dreieck, welches dem Dreieck QBC ähnlich ist, weil $\angle BQC = \angle PMQ$ und $QB = QC$ ist. Aus dieser Ähnlichkeit ergibt sich, daß CB und also auch QD senkrecht auf PQ steht, und da nun bei fortdauernder An-

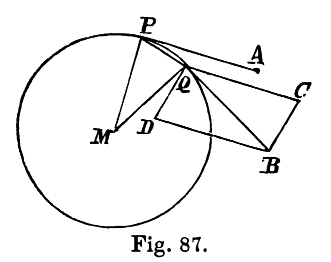


Fig. 87.

näherung von Q an P die Richtung der Sehne PQ diejenige der Tangente in P zum Grenzwert hat, nähert sich die Richtung von QD derjenigen des Radius PM. Wir können also sagen, daß bei der betreffenden Bewegung die Geschwindigkeit, welche der Körper in einem Zeitelement zu derjenigen, welche er bereits hat, hinzubekommt, nach dem Mittelpunkt des Kreises hin gerichtet ist. Hierdurch ist die *Richtung* der Beschleunigung bestimmt.

Um nun die *Größe* derselben zu berechnen, bemerken wir, daß infolge der Ähnlichkeit der genannten Dreiecke

$$MP : PQ = QC : QD$$

und also

$$QD = \frac{QC}{MP} \times PQ$$

ist.

Dies ist die Geschwindigkeit, welche der Körper in der unendlich kleinen Zeit τ bekommt. Hieraus folgt für die Größe der Beschleunigung

$$\frac{QC}{MP} \times \frac{PQ}{\tau}.$$

Man kann aber die unendlich kleine Sehne PQ durch den Bogen ersetzen, und dann ist der letzte Faktor nichts anderes als die Geschwindigkeit v. Demnach wird die Beschleunigung

$$\frac{v^2}{r}.$$

Aus den gefundenen Resultaten schließen wir, daß für die angenommene Bewegung eine Kraft erforderlich ist, die fortwährend nach dem Mittelpunkt des Kreises hin gerichtet ist. Diese sogenannte *Zentripetalkraft* muß die Größe

$$K = \frac{m v^2}{r} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

haben.

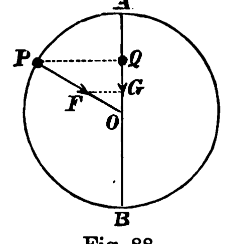


Fig. 88.

Ein Körper Q (Fig. 88) mit der Masse m führe eine einfache Schwingung auf der Linie AB mit der Schwingungszeit T aus. Wenn ein zweiter Körper P mit derselben Masse sich auf dem Kreis mit dem Durchmesser AB so bewegen soll, daß Q immer die Projektion von P ist, so muß P die konstante Geschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

haben ($OA = r$). Auf P muß dann nach dem Mittelpunkt hin die Kraft

$$PF = \frac{4\pi^2 m}{T^2} r$$

wirken. Die Kraft, welche erforderlich ist, um dem Körper Q die gewünschte Bewegung zu geben, ist die Projektion QG von PF. Hieraus folgt, wenn $OQ = s$ ist, für die Kraft der in § 101 gegebene Wert.

§ 106. **Erscheinungen bei drehenden Bewegungen.** Hat der oben betrachtete Körper eine Geschwindigkeit in der Richtung des Kreisumfangs, wirkt aber *keine* Kraft auf ihn, so geht er in der Richtung der Tangente weiter. Dies zeigt sich bei verschiedenen Versuchen.

a) Ein Stab ab (Fig. 89), auf dem eine durchbohrte Kugel gleiten kann, kann in einer horizontalen Ebene um den Punkt M gedreht werden. Sobald diese Bewegung anfängt, bekommt die Kugel c eine Geschwindigkeit in der Richtung cd und geht dann, wenigstens annähernd, in der Richtung dieser Linie weiter. Die Kugel entfernt sich dabei auf dem Stab von M; hat dieser letztere z. B. die Lage $a'b'$ eingenommen, so ist die Kugel in e angekommen.

Fig. 89.

Auch wenn der Körper c vermittelst eines Fadens am Punkt M befestigt ist, entfernt er sich unmittelbar nachdem die Bewegung angefangen hat, etwas von M, aber der hierdurch ausgedehnte Faden übt auf die Kugel eine Spannung aus, die bewirkt, daß sie von der Linie cd abweicht. Die Ausdehnung ht so weit, bis die Spannung des Fadens gerade so groß s die Kraft ist, die erforderlich ist, damit sich die Kugel einem Kreis bewegt.

Wird anstatt des Fadens eine Spiralfeder benutzt, so n man durch Messung der Ausdehnung, welche diese er-, die Richtigkeit der Formel (22) beweisen.

b) Auf dem Stab ab seien zwei durchbohrte Kugeln, eine jeder Seite von M, angebracht, die durch einen Faden bunden sind. Wenn dann der Stab in Drehung versetzt rd, so werden je nach den Massen des Körpers und ihren

Entfernungen vom Mittelpunkt verschiedene Erscheinungen beobachtet. Es kann der Fall eintreten, daß der Faden infolge seiner Ausdehnung in einem bestimmten Augenblick eine Spannung bekommen hat, welche hinreicht, um den ersten Körper in einem Kreise laufen zu lassen, die aber noch nicht ausreicht, um dieselbe Wirkung bei dem zweiten Körper zu haben. Dann wird sich dieser letztere noch vom Mittelpunkt entfernen und dabei den ersteren über den Mittelpunkt hinaus fortziehen, so daß schließlich beide Körper nach derjenigen Seite gehen, wo sich der zweite befand.

Es kann auch der Fall eintreten, daß, wenn der Faden bei zunehmender Ausdehnung eine Spannung bekommen hat, die hinreicht, um den einen Körper in einem Kreis laufen zu lassen, diese Spannung auch gerade den anderen Körper in konstanter Entfernung vom Mittelpunkt halten kann. Dann werden beide Körper auf dem Stabe in Ruhe bleiben.

c) Man kann einen Körper auch zwingen, sich auf einem Kreis zu bewegen, wenn man ihn an die Innenseite eines auf horizontaler Ebene angebrachten kreisförmigen aufrechten Randes legt und ihm eine tangentiale Geschwindigkeit gibt. Wie hierbei der Widerstand des Randes die Zentripetalkraft bildet und wie dieser Widerstand hervorgerufen wird, ist leicht einzusehen.

Wenn jemand auf einer horizontalen Ebene im Kreis herumläuft, so drückt er mit den Füßen die Ebene nach außen; infolgedessen wirkt die Ebene die erforderliche nach dem Mittelpunkt gerichtete Kraft auf ihn aus.

A C D M B F E

Fig. 90.

d) An einer vertikalen Säule AB (Fig. 90), die sich um ihre eigene Achse drehen kann, ist die Stange AM, die an ihrem unteren Ende die Kugel M trägt, drehbar in A befestigt, so daß sie sich in der Ebene ACM bewegen kann. Ist die Achse in Ruhe, so berührt die Kugel die Säule AB; fängt dann die Drehung von AB an, so bekommt der Mittelpunkt der Kugel eine Geschwindigkeit senkrecht zur Ebene MAC Die Kugel strebt soviel als möglich in der Richtung dieser Geschwindigkeit weiterzugehen, was sie jedoch nicht kann, ohne

sich weiter von AB zu entfernen, also ohne zugleich zu steigen. Wenn die Geschwindigkeit um die vertikale Achse konstant ist, so nimmt AM eine bestimmte Stellung in bezug auf diese Achse an, so daß M einen Kreis mit dem Mittelpunkt C beschreibt. Zerlegt man nun das Gewicht MP in ME in der Richtung der Verlängerung von AM und MD in der Richtung von MC, dann ist es die letztere Kraft, die die Kugel in einem Kreis zu laufen zwingt. Diese Kraft muß die durch die Formel (22) bestimmte Größe haben, und hieraus kann man den Winkel MAC berechnen, wenn die Anzahl der Umdrehungen von AB in der Zeiteinheit bekannt ist. Der bei Dampfmaschinen vorkommende Zentrifugalregulator besteht aus *zwei* gleichen mit je einer Kugel versehenen Stangen der beschriebenen Art; sie sind an gegenüberstehenden Seiten von AB befestigt. Nimmt aus irgend einer Ursache die Geschwindigkeit von AB zu, so gehen die Kugeln in die Höhe und diese Bewegung wird benutzt, um durch eine geeignete Vorrichtung das Zuströmen des Dampfes zu vermindern.

Um die oben erwähnte Beziehung zwischen der Geschwindigkeit der Drehung und dem Ablenkungswinkel zu finden, setzen wir in Fig. 90 $AM = l$, $\angle MAB = \varphi$, $MC = r$. Ist die Masse der Kugel m und die Umlaufszeit T, so muß, da die Geschwindigkeit $2\pi r/T$ ist, nach der Formel (22)

$$MD = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} = \frac{4\pi^2 m l \sin\varphi}{T^2}$$

sein. Anderseits folgt aus dem Dreieck DMP, da $MP = mg$ ist,

$$MD = mg \operatorname{tg} \varphi.$$

Setzt man die beiden Werte von MD einander gleich, so findet man

$$\cos\varphi = \frac{gT^2}{4\pi^2 l}.$$

Diese Formel ist auch anwendbar, wenn eine an einem Faden von der Länge l aufgehängte Kugel einen Kreis von beliebiger Größe beschreibt, was man leicht bewirken kann. Die Umlaufszeit wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l\cos\varphi}{g}}.$$

Ist der Radius des Kreises im Vergleich mit l sehr klein, so

darf man $\cos\varphi = 1$ setzen; die Umlaufszeit ist dann ebenso groß wie die Zeit, in welcher dasselbe Pendel eine vollständige Schwingung in einer Ebene macht.

§ 107. **Zentrifugalkraft.** Zuweilen werden Erscheinungen wie die in § 106 besprochenen einer Kraft zugeschrieben, die auf die bewegten Körper wirkt und die von dem Punkt, um welchen die Drehung stattfindet, hinweg gerichtet ist. In Wirklichkeit existiert eine solche *Fliehkraft* oder *Zentrifugalkraft* nicht. Wenn sich ein Körper auf einem Kreis bewegen soll, so ist eine Kraft erforderlich, die nach dem Mittelpunkt hin gerichtet ist, und der Körper entfernt sich, wenn diese Kraft aufhört zu bestehen, in der Richtung der Tangente an die Bahn, nicht, weil auf ihn eine Kraft wirkt, die ihn vom Mittelpunkt hinwegtreibt, sondern einfach infolge der Geschwindigkeit, welche er hat.

Erscheinungen wie diejenigen, welche in einem System von Körpern durch eine drehende Bewegung hervorgebracht werden, können aber auch zustande gebracht werden, wenn keine Drehung stattfindet, aber Kräfte auf die Körper wirken, die vom Mittelpunkt, um welchen die Drehung stattfand, hinweg gerichtet sind. Wir können z. B. bei dem Versuch von § 106, a) den Faden auch ausdehnen, wenn wir den Stab in Ruhe lassen, aber auf den Körper *c* eine Kraft vom Mittelpunkt hinweg wirken lassen, und die Kugeln des Zentrifugalregulators können durch horizontal nach außen gerichtete Kräfte von der Achse entfernt werden.

Diese Kraft, durch welche die Drehung, was die durch sie hervorgebrachte Wirkung betrifft, ersetzt werden kann, kann man *Zentrifugalkraft* nennen; wenn man diese einführt, *wobei dann zugleich von der drehenden Bewegung abgesehen werden muß,* lassen sich manche Probleme etwas einfacher behandeln.

Man sich leicht überzeugen, *daß der nur in der Vorstellung existierenden Zentrifugalkraft eine Größe zugeschrieben werden muß, die gleich derjenigen der wirklich existierenden Zentripetalkraft ist.*

Man stelle sich nämlich vor, ein beliebiges System von Körpern habe eine drehende Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit um eine Achse, sonst aber keine andere Bewegung. Jedes Stoffteilchen beschreibt dann einen Kreis, und die Resultante aller

Kräfte, die auf das Teilchen wirken, muß die in § 105 betrachtete Zentripetalkraft K sein. Hörte nun die Drehung auf, so würden diese Kräfte K die Teilchen der Achse nähern. Man kann dies aber verhindern, also die Teilchen in denselben relativen Lagen halten, die sie während der Drehung einnahmen, wenn man auf jedes Teilchen eine Zentrifugalkraft gleich der Kraft K wirken läßt.

§ 108. **Einfluß der Achsendrehung der Erde auf die scheinbare Größe der Schwerkraft.** Jeder Punkt der Erde beschreibt in 24 Stunden einen Kreis, dessen Radius die von diesem Punkt auf die Erdachse gefällte Senkrechte ist. Dies muß auf die Bewegungserscheinungen, die man bei Körpern auf der Erdoberfläche beobachtet, denselben Einfluß haben wie eine Kraft, die auf jeden Körper in der Richtung der Verlängerung der erwähnten Senkrechten wirkt. Diese Zentrifugalkraft hat den durch (22) bestimmten Wert und ist offenbar am größten am Äquator und gleich Null an den Polen. Am Äquator ist sie der Schwerkraft entgegengesetzt gerichtet, während sie an anderen Orten einen stumpfen Winkel mit der Richtung der Schwerkraft bildet.

Die Erscheinungen auf der Erdoberfläche sind nun so, als ob die Erde stillstände, aber die Schwerkraft am Äquator etwas schwächer wäre als an den Polen. Die in § 63 besprochene Ungleichheit der Werte von g in verschiedener Breite kann hierdurch zum Teil, aber nicht vollständig erklärt werden. Die Theorie lehrt nämlich, daß, während der *scheinbare* Wert von g am Äquator 978,1 ist, der *wahre* Wert, d. h. der Wert, den man beobachten würde, wenn die Erde stillstände, 981,5 sein muß. Dieser Wert ist noch etwas kleiner als der an den Polen bestehende.

Wir wollen uns vorstellen, am Äquator der Erde werde aus einer gewissen Höhe über dem Boden ein Körper fallen gelassen. Dieser wird von der Erde angezogen und bekommt infolgedessen eine nach dem Mittelpunkt der Erde hin gerichtete Beschleunigung, die wir mit G bezeichnen wollen. Man kann sich nun aber denken, daß diesem Körper eine so große Geschwindigkeit v in der Richtung der Tangente an den Äquator gegeben wird, daß die Anziehung gerade hinreichend ist, um zu bewirken, daß sich der Körper auf einem Kreis um die Erde bewegt. Wenn dies der Fall sein soll, müßte, wenn r die Entfernung vom Mittelpunkt der Erde ist,

$$\frac{v^2}{r} = G, \quad \text{also} \quad v = \sqrt{G r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

sein. Wenn der Körper diese Geschwindigkeit hätte, so würde er sich nicht dem Boden nähern, und wenn er eine noch schnellere seitliche Bewegung hätte, so würde die Anziehung sogar nicht hinreichend sein, um den Körper zu zwingen, sich in einem Kreise zu bewegen; er würde sich von der Erde entfernen, allerdings nicht in der Richtung der Tangente an den Kreis, sondern auf einer Linie, die zwischen der Tangente und dem Kreis liegt.

Der Körper hat nun wirklich ohne unser Zutun eine seitliche Geschwindigkeit, nämlich die Geschwindigkeit, die alle Punkte des Äquators infolge der Achsendrehung der Erde haben. Der Betrag dieser Geschwindigkeit ist

$$\frac{2 \pi r}{T},$$

wenn man mit T die Umlaufszeit bezeichnet, oder, da $2 \pi r = 4 \times 10^9$ cm und $T = 24 \times 60 \times 60$ Sekunden ist, 46 300 cm pro Sekunde.

Diese Geschwindigkeit ist bedeutend kleiner als die durch (23) bestimmte; die Schwerkraft ist also nicht nur hinreichend, zu bewirken, daß sich der Körper in einem Kreis bewegt, sondern sie nähert noch den Körper dem Mittelpunkt, so daß er *fällt*.

Aber die Achsendrehung der Erde übt doch auf die Resultate von Versuchen über den Fall der Körper einen Einfluß aus.

Wir wollen uns vorstellen, man habe irgendwo am Äquator einen vertikalen Maßstab aufgestellt und lasse einen Körper an demselben herunterfallen. In dem Augenblick, in welchem man diesen losläßt, hat er ebenso wie der Maßstab, eine Geschwindigkeit u in der Richtung der Tangente an den Äquator; diese Geschwindigkeit, welche für beide gleich groß ist, kann jedoch keinen Einfluß auf die relative Bewegung haben.

In einem Zeitelement τ bekommt nun der Körper außer dieser Geschwindigkeit noch eine andere vertikal nach unten, die die Größe $G \tau$ hat. Aber auch der Maßstab bekommt, weil er fest mit der Erde verbunden ist und also einen Kreis beschreibt, eine Geschwindigkeit nach dem Mittelpunkt der Erde; diese Geschwindigkeit ist $u^2 \tau / r$ oder, mit Rücksicht auf die Werte von u und r

$$3{,}4 \, \tau \text{ cm}.$$

Wir können nun nichts anderes beobachten als die *relative* Bewegung des fallenden Körpers in bezug auf den Maßstab, also auch die relative Geschwindigkeit, die der Körper in der Zeit τ bekommt. Diese ist die Differenz der beiden genannten Geschwindigkeiten; wir meinen also, daß der Körper in der Zeit τ die Geschwindigkeit

$$(G - 3{,}4) \, \tau$$

nach unten bekommt, mit anderen Worten, der *beobachtete* Wert der Beschleunigung der Schwerkraft ist

$$g = G - 3{,}4.$$

Da nun (§ 63) für g der Wert 978,1 gefunden wurde, ist die wahre Beschleunigung der Schwerkraft

$$G = g + 3{,}4 = 981{,}5 \text{ cm pro Sek.}$$

§ 109. Die Achsendrehung der Erde, die am Äquator die Beschleunigung eines fallenden Körpers kleiner erscheinen läßt als sie ist, hat auch denselben Einfluß auf die Kraft, mit der ein Körper auf eine horizontale Ebene drückt.

Um dies einzusehen, stellen wir uns vor, die Erde stehe still und am Äquator liege auf einer horizontalen Ebene ein Körper, der mit einer Kraft P von der Erde angezogen wird. Wenn sich dann die Erde in Bewegung setzte, so würde sich der Körper etwas vom Mittelpunkt entfernen, so daß die Ebene, auf welcher er liegt, jetzt etwas weniger eingedrückt würde. Die Kraft P', mit der diese Ebene den Körper nach oben drückt, würde also kleiner werden, und dies würde weitergehen, bis die Differenz $P - P'$ der beiden Kräfte gerade hinreicht, um zu bewirken, das sich der Körper auf einem Kreis bewegt. Da dann diese Differenz die Beschleunigung u^2/r geben muß, während durch die Kraft P die Beschleunigung G verursacht wird, muß

$$P:(P - P') = G : \frac{u^2}{r},$$

woraus man mit Hilfe der oben für u, r und G gegebenen Werte ableiten kann

$$P - P' = \frac{1}{289} P; \quad P' = \frac{288}{289} P.$$

Die Kraft P', mit der der Körper auf die Unterlage drückt, kann man das *scheinbare Gewicht* des Körpers nennen, während P das *wahre Gewicht* ist.

Da alle Punkte der Erdoberfläche mit Ausnahme der Pole Kreise beschreiben, besteht auch überall mit Ausnahme der Pole ein Einfluß der Achsendrehung wie der beschriebene, aber je größer die Entfernung vom Äquator wird, desto kleiner wird dieser Einfluß.

§ 110. **Bewegung der Körper des Sonnensystems. Allgemeine Anziehungskraft.** Ein Körper A kann um einen ruhenden Körper B als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben, wenn er von diesem mit einer Kraft von der in § 105 besprochenen Größe angezogen wird. Unter dem Einfluß einer Anziehung nach einem festen Zentrum können jedoch auch Bahnen von anderer Form beschrieben werden.

Die Beobachtung hat gelehrt, daß die Planeten sich in Ellipsen bewegen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht; dabei ist die Geschwindigkeit um so größer, je kleiner die Entfernung von der Sonne ist, so daß, wenn die Ellipse in Fig. 15 (S. 21) die Bahn eines Planeten vorstellt und F der

Ort der Sonne ist, die Geschwindigkeit in A' ein Maximum und in A ein Minimum ist. (In Wirklichkeit weichen die Planetenbahnen viel weniger von einem Kreis ab als die Ellipse in Fig. 15.)

Man hat die Änderungen der Geschwindigkeit aus der Beobachtung abgeleitet und kann daher die Kraft bestimmen, die auf den Planeten wirkt. Newton (1643—1727) fand, *daß diese Kraft nach der Sonne gerichtet ist und also eine Anziehung durch die letztere genannt werden kann, und daß sie sich während der Bewegung umgekehrt proportional der zweiten Potenz der Entfernung von der Sonne ändert.*

Auf die mathematischen Betrachtungen, durch die man zu diesem Resultat kommt, können wir nicht näher eingehen und müssen uns auf die Bemerkung beschränken, daß wirklich, wenn der Planet P (Fig. 15) von der Sonne F angezogen wird, die Bewegung von A über B nach A' beschleunigt und die Bewegung von A' über B' nach A verzögert ist. In einem Zeitelement z. B., welches auf den Augenblick folgt, in welchem der Planet in P ist, bekommt dieser zu der Geschwindigkeit, welche er bereits in der Richtung der Tangente hat, noch eine andere in der Richtung des Brennstrahls. Da nun, wie aus der Figur zu ersehen ist, die beiden Geschwindigkeiten einen spitzen Winkel miteinander bilden, so ist die Resultante größer als die zuerst in der Richtung der Tangente bestehende Geschwindigkeit.

Newton konnte dem soeben angeführten Gesetz über die Anziehung, welche die Sonne auf einen Planeten ausübt, noch ein anderes hinzufügen, indem er die Bewegungen verschiedener Planeten miteinander verglich. Er zeigte nämlich, *daß zwei Stoffteilchen von derselben Masse, von denen das erste in dem einen Planeten und das zweite in dem anderen enthalten ist, von der Sonne mit Kräften angezogen werden, die den zweiten Potenzen der Entfernungen von der Sonne umgekehrt proportional sind.*

Dies folgt aus der von Kepler entdeckten Tatsache, daß die zweiten Potenzen der Umlaufszeiten zweier Planeten sich zueinander verhalten wie die dritten Potenzen der halben großen Achsen ihrer Bahnen.

Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß sich die Planeten in Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 um die Sonne bewegen; T_1 und T_2

seien die Umlaufszeiten. Dann wirkt nach § 105 auf die Masseneinheit des einen Planeten eine Kraft

$$K_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$$

und auf die Masseneinheit des anderen eine Kraft

$$K_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}.$$

Aus der Proportion

$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3$$

folgt

$$K_1 : K_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}.$$

Übrigens ist es nicht nur die Sonne, welche andere Körper anzieht. Ebenso wie sich die Planeten um die Sonne bewegen, bewegen sich um einige Planeten Monde oder Trabanten und diese werden von dem Körper, den sie begleiten, durch eine Anziehung festgehalten, die von diesem ausgeht. Indem Newton alle Erscheinungen zusammenfaßte, kam er zu dem Schluß, *daß sich je zwei Stoffteilchen mit einer Kraft anziehen, die in der angegebenen Weise von der gegenseitigen Entfernung abhängt und sowohl der Masse des einen als auch der Masse des anderen Stoffteilchens proportional ist,* die aber von der *Natur* der Teilchen und dem Stoff im Zwischenraum unabhängig ist.

Nach dieser von Newton entwickelten Theorie der *allgemeinen Anziehungskraft* oder *Gravitation* ist die *Beschleunigung,* welche ein Körper A durch die von einem Körper B ausgehende Anziehung bekommt, proportional der Masse von B, aber unabhängig von der Masse von A. Die Gesamtkraft, welche auf A wirkt, ist nämlich proportional der Masse von A, und daher muß die Beschleunigung dieselbe sein, einerlei ob die Masse groß oder klein ist.

Die Schwerkraft, welche auf ein Stoffteilchen in der Nähe der Erdoberfläche wirkt, ist nun als die Resultante zahlloser Kräfte zu betrachten, welche von allen Teilchen der Erde ausgeübt werden und die alle von derselben Art sind wie die Anziehung zwischen den Teilchen verschiedener Himmelskörper. Dies wird durch die folgenden Erwägungen bestätigt.

a) Wird wirklich ein Körper an der Erdoberfläche von allen Teilen der Erde angezogen, sowohl von dem Teil un-

mittelbar unterhalb des Körpers, als auch von dem Stoff in der Nähe des Mittelpunktes oder an der gegenüberliegenden Seite unseres Planeten, so kann man die zahllosen Kräfte, welche auf ihn einwirken, zu einer einzigen Kraft vereinigen. Nimmt man nun an, daß die Erde eine Kugel ist und daß sich ihre Dichte nicht unregelmäßig von einem Punkt zum anderen ändert, sondern (abgesehen von kleinen Abweichungen) daß diese an allen Stellen, die gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, gleich groß ist, so lehrt eine mathematische Betrachtung, daß die Resultante nach dem Mittelpunkt hin gerichtet ist und dieselbe Größe hat, als wenn die gesamte anziehende Masse in diesem Punkt vereinigt wäre. Die Resultante ist, ebenso wie alle Kräfte, aus denen sie zusammengesetzt ist, proportional der Masse des angezogenen Körpers; daher fallen alle Körper gleich schnell.

b) Ferner müssen — wenn wirklich die Schwerkraft eine Äußerung der allgemeinen Anziehungskraft ist — die Kraft, welche auf ein Teilchen in der Nähe der Erdoberfläche wirkt, und die Anziehung, welche ein ebenso großes Teilchen des Mondes von der Erde erleidet, den Quadraten der Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde umgekehrt proportional sein. Da die Entfernung des Mondes von diesem Punkt 60 mal so groß ist als der Erdradius, so muß die erstere Kraft 3600 mal so groß sein als die letztere. Nun können wir die Beschleunigung eines fallenden Körpers gleich 980 cm pro Sekunde setzen, und man kann auch (§ 105) die Beschleunigung des Mondes berechnen. Wenn man berücksichtigt, daß die Umlaufszeit des Mondes 27 Tage und 8 Stunden ist, und wenn man den Umfang der Erde gleich 4×10^9 cm setzt, so findet man für die letztere Beschleunigung 0,27 cm und dies ist wirklich 3600 mal kleiner als 980 cm.

Wir können jetzt auch einsehen, wie es kommt, daß (§ 108) die beobachtete Beschleunigung eines fallenden Körpers, auch wenn sie von dem Einfluß der Achsendrehung befreit ist, an verschiedenen Orten nicht denselben Wert hat. Wie man weiß, ist die Erde nicht genau kugelförmig, sondern an den Polen abgeplattet, so daß ihre Oberfläche annähernd ein Rotationsellipsoid ist, wie es durch die Rotation einer Ellipse um die kleine Achse entsteht. Die Erdachse ist ungefähr $^1/_{300}$ kürzer

als der Durchmesser des Äquators. Berechnet man nun für einen solchen Körper die Resultante der Anziehungen auf einen Körper an der Oberfläche, so findet man, daß diese größer ist, wenn sich der Körper an den Polen als wenn er sich am Äquator befindet. Daher kommt es, daß man selbst bei einer stillstehenden Erde nicht überall denselben Wert von g finden würde.

Das Newtonsche Gesetz kann nicht nur in den Hauptzügen Rechenschaft von der Bewegung der Körper des Sonnensystems geben, sondern es kann auch dazu dienen, um viele Einzelheiten zu erklären, die man bei dieser Bewegung beobachtet hat. Wenn jeder Planet nur von der Sonne angezogen würde, so würde er sich auf einer stillstehenden Ellipse bewegen und seine Geschwindigkeit würde sich nach einem einfachen Gesetze ändern. In Wirklichkeit bestehen zahlreiche kleine Abweichungen von dieser Bewegungsweise und die Erscheinungen sind sehr verwickelt. Indem man jedoch berücksichtigte, daß jeder Planet nicht nur von der Sonne, sondern auch von den anderen Planeten angezogen wird, ist es gelungen, dies alles aufzuklären. Dazu waren komplizierte mathematische Theorien erforderlich, aber die Prinzipien, von denen man ausgehen mußte, sind sehr einfach. Wenn für irgend einen Augenblick die Stellungen der verschiedenen Körper des Sonnensystems bekannt sind, so kann man für jeden derselben die Kräfte angeben, welche alle übrigen auf ihn ausüben. Man kann ferner alle auf einen Körper wirkenden Kräfte zu einer einzigen vereinigen und die Wirkung von dieser muß dann in der in § 89, b angegebenen Weise bestimmt werden.

Auch wenn man sich nur mit der Physik im engeren Sinne des Wortes beschäftigen will, ist es von Wichtigkeit, von alle diesem eine Vorstellung zu haben, da bei den Versuchen, die physikalischen Erscheinungen zu erklären, die Methoden der Astronomie in vieler Hinsicht als Vorbild gedient haben.

Es verdient schließlich erwähnt zu werden, daß es gelungen ist, durch empfindliche Instrumente direkt die Anziehung nachzuweisen, die nach der Theorie von Newton ein Körper, z. B. ein Stück Blei, auf einen anderen Körper aus-

übt, obgleich diese Anziehung millionenmal kleiner ist als das Gewicht des Körpers.

§ 111. **Moleküle und Atome.** Bereits vor vielen Jahrhunderten wurde von einigen Philosophen angenommen, daß die Naturkörper, obwohl sie uns vollkommen homogen erscheinen, aus einer großen Anzahl ganz voneinander getrennter sehr kleiner Teilchen zusammengesetzt sind. Diese Vorstellung ist von großem Wert, da wir uns nun denken können, daß bei den vielfältigen Umwandlungen der Materie diese kleinen Teilchen sich nicht ändern und nur in andere Lagen kommen. Von der Volumverminderung eines Körpers durch Zusammendrückung oder Abkühlung, der Verdichtung eines Gases zu einer Flüssigkeit, der Vermischung von Gasen und Flüssigkeiten, der Auflösung eines festen Körpers in Wasser können wir uns ein befriedigendes Bild machen, sobald wir uns vorstellen, daß wegen der Zwischenräume zwischen den kleinen Teilchen eine Annäherung derselben und ein gegenseitiges Durchdringen zweier Körper möglich ist. Ebenso verliert die Verbindung von Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser viel von dem Wunderbaren, was sie anfangs für uns hat, wenn wir in unserer Vorstellung im Wasser kleine Teilchen Wasserstoff und Sauerstoff nebeneinander liegen sehen.

Daß das Bild, welches wir uns so von den Erscheinungen machen, in hohem Grade mit der Wirklichkeit übereinstimmt, geht aus den vielen bis in die Einzelheiten gehenden Erklärungen hervor, zu denen es geführt hat, sowie aus der Bestätigung verschiedener Voraussagungen der Molekulartheorien. Viele Physiker haben denn auch an der weiteren Entwickelung dieser letzteren gearbeitet; sie sind dabei sogar zu einer Schätzung der Zahl und Größe der kleinsten Teilchen der Körper gekommen. Da nach dieser Schätzung in einem Kubikmillimeter eines jeden Körpers Billionen von Teilchen enthalten sind, ist es nicht zu verwundern, daß wir diese nicht einzeln wahrnehmen können.

Als *Elemente* oder *Grundstoffe* bezeichnen die Chemiker solche Substanzen, die sie nicht in andere zerlegen können. Man kann sich vorstellen, daß ein derartiger Stoff aus einer sehr großen Anzahl gleicher Teilchen besteht; man bezeichnet diese als *Atome* und nimmt ebensoviel verschiedene Arten von

Atomen an, als es Grundstoffe gibt. Die Gruppen, zu denen sich die Atome bei der Bildung von Verbindungen vereinigen und die als die kleinsten Teilchen dieser Verbindungen zu betrachten sind, werden *Moleküle* genannt. Es ist denkbar, daß sich diese Moleküle zu größeren Gruppen zusammenfügen, die bei einigen Erscheinungen als Individuen auftreten; allein der feinere molekulare Bau ist uns bei den meisten Körpern unbekannt.

Wir werden unter Molekülen oder Teilchen der Körper die kleinsten Stoffmengen verstehen, welche bei den Erscheinungen, über die wir sprechen, einzeln eine selbständige Rolle spielen.

§ 112. Molekularkräfte. Bewegungen der kleinen Teilchen. Der *Zusammenhang* (die *Kohäsion*) zwischen den verschiedenen Teilen eines und desselben Körpers deutet auf *anziehende Kräfte,* die von *gleichartigen Molekülen* aufeinander ausgeübt werden, während aus der Erscheinung des *Anhängens* (der *Adhäsion*), die man z. B. beobachtet, wenn ein Glasstab mit Wasser befeuchtet ist, hervorgeht, daß auch zwischen *ungleichartigen Teilchen* solche Kräfte wirksam sind. Das Entstehen einer chemischen Verbindung läßt uns auf Anziehungen zwischen den *Atomen* schließen, und wir werden später sehen, daß zuweilen auch *abstoßende Kräfte* zwischen den Teilchen eines Körpers im Spiel sind.

Bei verschiedenen Erscheinungen, z. B. bei der Mischung zweier Stoffe, ist es sofort einleuchtend, daß eine *Ortsveränderung* der Moleküle stattfindet, und später werden wir Gründe kennen lernen, auch den Teilchen eines Körpers, der sich im Ganzen genommen in Ruhe befindet, Bewegungen, sogar Bewegungen mit großer Geschwindigkeit zuzuschreiben. So stellen wir uns jeden Körper als ein System von zahlreichen materiellen Punkten vor, die sich ähnlich wie die Körper des Sonnensystems unter dem Einfluß der Kräfte, mit denen sie aufeinander wirken, bewegen.

Von einer gründlichen Kenntnis dieser Bewegungen ist man jedoch in bei weitem den meisten Fällen noch weit entfernt; nur bei einigen besonders einfachen Vorgängen kann man sich von dem Verhalten der kleinsten Teilchen genauer Rechen-

schaft geben. Glücklicherweise kann man jedoch oft die Erscheinungen beschreiben und bis zu einem gewissen Grade verstehen, ohne von der Molekulartheorie Gebrauch zu machen, und es ist, auch wenn man sich derselben bedienen will, nicht immer notwendig, tief in die Einzelheiten des „Mechanismus“ der Erscheinungen einzudringen. Vieles ist bereits durch gewisse allgemeine Sätze aufgeklärt, die unabhängig von den besonderen Eigenschaften für jedes System einander anziehender oder abstoßender Teilchen gelten. Diese Sätze werden wir im folgenden Kapitel kennen lernen.

Zweites Kapitel.

Arbeit und Energie.

§ 113. **Definition der Arbeit bei einer Verschiebung in der Richtung der Kraft.** Dadurch daß wir eine Kraft auf einen Körper oder ein System von Körpern ausüben, können wir die Lage desselben, die relative Lage der Teile, aus denen er besteht, oder auch den Zustand des Systems in der verschiedensten Weise verändern. Wir können ein Gewicht heben, eine Spiralfeder, die mit dem einen Ende befestigt ist, ausdehnen, einem Schlitten eine Geschwindigkeit erteilen, ein Gas, welches in einen Zylinder eingeschlossen ist, erwärmen, indem wir einen Kolben in diesem Zylinder nach innen drücken. Alle diese Fälle haben das miteinander gemein, daß, während wir eine Kraft ausüben, sich der Angriffspunkt derselben um eine gewisse Strecke verschiebt. Dagegen wird, wenn dieser Punkt in Ruhe bleibt, keine *Veränderung* hervorgebracht, z. B. wenn wir ein Gewicht ruhig in der Hand halten oder an einem Seil ziehen, dessen Ende an einem festen Haken befestigt ist. Sobald dieses letztere die Ausdehnung bekommen hat, welche der Größe der Kraft entspricht, und welche entsteht, während sich der Punkt, den wir festhalten, verschiebt, kann die Kraft solange wir wollen, in Wirksamkeit bleiben, ohne daß sie — wenn sie immer gleich groß bleibt — eine weitere Veränderung zur Folge hat.

Derartige Erwägungen haben dazu geführt, nicht nur die Größe der Kraft, sondern namentlich auch die Verschiebung ihres Angriffspunktes zu beachten; indem man beides zusammenfaßte, ist man dazu gekommen, eine Größe einzuführen, die man als *Arbeit* bezeichnet und die in der heutigen Physik von :oßer Bedeutung ist.

Wir wollen sagen, *daß wir eine Arbeit verrichten oder eine*

Arbeit tun, und zwar „auf den Körper“, auf welchen wir einwirken, wenn sich der Angriffspunkt der von uns ausgeübten Kraft in ihrer Richtung verschiebt. Vorläufig stellen wir uns vor, daß, wie in den genannten Beispielen, in denen eine Arbeit getan wird auf ein Gewicht, welches wir heben, auf eine Spiralfeder, den Schlitten oder die Gasmasse, die Kraft fortwährend dieselbe Richtung hat und die Bewegung geradlinig ist. Auch wollen wir zunächst annehmen, daß die Kraft eine konstante Größe hat.

Die Größe der Arbeit setzen wir nun einerseits der Länge der Verschiebung und anderseits der Größe der Kraft proportional; nachdem wir dies angenommen haben, können wir in jedem Fall die Arbeit durch eine bestimmte Zahl ausdrücken, wenn wir zunächst noch die *Einheit der Arbeit* gewählt haben.

Wir wählen als solche die Arbeit, welche wir verrichten, wenn wir eine Kraft 1 ausüben und der Angriffspunkt sich um die Strecke 1 verschiebt.

Hieraus folgt unmittelbar, daß, wenn die Kraft K Einheiten und die Verschiebung s Längeneinheiten beträgt, die Arbeit durch das Produkt Ks ausgedrückt wird. Die Arbeit würde nämlich den Wert 1 haben, wenn die Kraft die Krafteinheit und der Weg des Angriffspunktes die Längeneinheit wäre. Folglich muß wegen der angenommenen Proportionalität der Arbeit mit der Kraft und dem Weg die Arbeit K Einheiten betragen, wenn die Kraft K ist und die Verschiebung $= 1$ bleibt, und Ks Einheiten, wenn die Kraft auch wieder K ist und der zurückgelegte Weg s Einheiten beträgt. Die so gefundene Formel für die Arbeit

$$A = Ks \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

drücken wir in Worten kurz so aus: *Die Arbeit ist das Produkt aus der Kraft und dem zurückgelegten Weg.*

Die Einheit der Arbeit im C-G-S-System ist diejenige Arbeit, die wir tun, wenn die Kraft 1 Dyn und die Verschiebung 1 cm beträgt; man hat dieser Einheit den Namen *Erg* gegeben.

Eine andere viel gebrauchte Einheit ist das *Meterkilogramm;* sie gehört zum Gewicht von einem Kilogramm als Krafteinheit und dem Meter als Längeneinheit.

Man wird leicht finden, daß ein Meterkilogramm gleich 981×10^5 Erg ist.

Im Anschluß an die Definition von Arbeit und die Regel

für die Berechnung der Größe derselben ist noch das Folgende zu bemerken.

a) Im alltäglichen Leben wird das Wort „Arbeit" gebraucht, um verschiedenartige körperliche und geistige Tätigkeit zu bezeichnen, meist ohne daß es möglich ist, eine bestimmte Zahl für die Größe derselben anzugeben. Dies ist nur bei einigen Tätigkeiten einfacher Art möglich. Wenn z. B. ein Arbeiter eine Last auf eine gewisse Höhe schaffen muß, so liegt es nahe, seine Arbeit dem Gewicht der Last proportional zu setzen, und ebenso kann man sie der Höhe proportional setzen, wenn die Umstände solcher Art sind, daß es immer dieselbe Anstrengung erfordert, um die Last ein Meter weiter in die Höhe zu schaffen. In solchen Fällen ist also die Arbeit im physikalischen Sinne des Wortes das Maß für die Leistung.

b) Nach der Definition wird die Arbeit durch die Größe der Kraft und die Länge des zurückgelegten Weges bestimmt. In welcher Zeit der Weg zurückgelegt wird, ist gleichgültig; *die Arbeit ist dieselbe, einerlei ob eine bestimmte Strecke mit großer oder mit kleiner Geschwindigkeit zurückgelegt wird.*

c) Ferner ist ausdrücklich die Rede von der Größe der Kraft, *welche man ausübt.* Wenn man z. B. einen Körper vom Gewicht P mit einer Kraft K hebt, die größer als P ist (so daß die Bewegung beschleunigt wird), so ist die geleistete Arbeit bei einer Höhe s nicht Ps, sondern Ks.

d) Endlich folgt aus der Definition, daß, wenn man den Weg in einige Teile teilt, die gesamte Arbeit gleich der Summe der Arbeiten ist, die jedem dieser Teile einzeln entsprechen.

Diese letzte Bemerkung zeigt uns, wie wir unsere Definition auf diejenigen Fälle ausdehnen können, in denen die Kraft, welche wir ausüben, zwar fortwährend die Richtung der Verschiebung hat, aber diese Richtung und vielleicht auch die Größe der Kraft sich fortwährend ändert. Man teilt den Weg des Angriffspunktes in unendlich kleine Teile und verfährt so, als ob beim Durchlaufen eines jeden Teilchens die Kraft unverändert bliebe. Man multipliziert also die Kraft, wie sie im Anfangspunkt eines Wegelementes ist, mit der Länge dieses Elementes und addiert sämtliche so erhaltenen Produkte.

Man sieht leicht ein, daß im Falle einer konstanten Kraft das Resultat gefunden werden kann, indem man die Größe

der Kraft mit der gesamten Länge des Weges multipliziert. Wenn man z. B. eine Maschine durch Drehen einer Kurbel in Bewegung setzt, und zwar mit einer in der Richtung des beschriebenen Kreises wirkenden Kraft K, so ist, wenn r der Radius des Kreises ist, die bei einer Umdrehung geleistete Arbeit $2\pi Kr$.

§ 114. **Energie.** Bis jetzt sprachen wir nur von der Arbeit, die wir selbst in verschiedenen Fällen verrichten. Auf einen Körper kann aber auch eine Kraft anstatt durch einen Arbeiter oder einen Experimentator durch einen anderen Körper ausgeübt werden, der auf ihn drückt oder an ihm zieht. Verschiebt sich dann der Angriffspunkt in der Richtung der ausgeübten Kraft, so sagen wir, *daß der letztere Körper eine Arbeit auf den ersteren tut, deren Größe wir nach der Regel des vorigen Paragraphen berechnen.*

So kann eine ausgedehnte Spiralfeder, die an dem einen Ende befestigt ist, eine Arbeit verrichten, wenn sie sich zusammenzieht und dabei einen Körper fortzieht. Der Dampf tut Arbeit auf den Kolben, den er in einer Dampfmaschine vor sich hintreibt, ein Wasserstrom auf die Schaufeln eines Rades, das er in Bewegung setzt.

Zur Vereinfachung lassen wir Fälle, in denen drei oder mehr Körper Kräfte aufeinander ausüben, zunächst außer Betracht; wir nehmen an, daß wir es mit zwei Körpern zu tun haben, von denen der eine auf den anderen Arbeit tut, und zwischen denen also ein solcher Gegensatz besteht, daß der eine, der „arbeitende“, eine aktive Rolle, der andere, der „bearbeitete“, eine passive Rolle spielt.

Die aufmerksame Betrachtung der Erscheinungen, welche dann eintreten, hat zu einem wichtigen Ergebnis geführt. *Ein Körper kann niemals eine Arbeit leisten, ohne daß er eine Veränderung erleidet, und zwar ist diese Veränderung so, daß der Körper immer weniger geeignet wird, um noch weiter Arbeit zu tun.* Die erwähnte Spiralfeder kann nur dann eine Arbeit leisten, wenn sie sich wirklich zusammenzieht; ebenso ist es einleuchtend, daß das Vermögen, Arbeit zu tun, abnimmt, wenn ein zusammengedrücktes Gas, welches sich in einem durch einen Kolben geschlossenen Zylinder befindet, den Kolben ein Stück nach außen treibt.

Es ist denn auch unmöglich, daß ein Körper, nachdem er eine Zeitlang eine Arbeit verrichtet hat, sich wieder in seinem ursprünglichen Zustand befindet. Wenn dies der Fall wäre, so könnte er von vorn anfangen und also, indem er immer wieder die Reihe von Veränderungen durchläuft, die ihn in den ursprünglichen Zustand zurückbringt, so viel Arbeit tun als man will. Man würde dann einen Apparat haben, der, ohne daß von uns selbst oder auf andere Weise Arbeit auf ihn getan wird, fortwährend Gewichte heben könnte. Nach diesem sogenannten „Perpetuum mobile" hat man in früherer Zeit oft gesucht und die Möglichkeit eines solchen konnte nicht in Abrede gestellt werden, solange viele Naturerscheinungen noch wenig untersucht waren. Beim gegenwärtigen Stande der Physik können wir es jedoch ruhig für ein Hirngespinst erklären.

Wir können gegenwärtig versichert sein, daß nicht nur in einfachen Fällen wie die oben erwähnten, sondern auch in komplizierteren, wenn z. B. elektrische, magnetische oder chemische Wirkungen stattfinden, *ein Körper nicht mehr als eine Arbeit von beschränkter Größe verrichten kann.* Wir drücken dies dadurch aus, daß wir sagen, *daß er in einem bestimmten Zustand auch ein bestimmtes Arbeitsvermögen hat. Verrichtet er wirklich eine Arbeit, so nimmt sein Arbeitsvermögen oder seine Energie, wie man auch sagt, um einen Betrag ab, der gleich dieser Arbeit ist.*

§ 115. **Erhaltung der Energie.** Wir wollen jetzt die Veränderungen betrachten, die ein Körper erleidet, *wenn Arbeit auf ihn getan wird.* In einfachen Fällen ist es augenfällig, daß diese Veränderungen gerade derjenigen entgegengesetzt sind, die der Körper erleidet, wenn er selbst eine Arbeit verrichtet; er kommt jetzt in einen Zustand, in welchem er besser als ursprünglich imstande ist Arbeit zu tun. Die Energie einer Spiralfeder — die kleiner wird, wenn sie sich zusammenzieht — nimmt zu, wenn wir sie, indem wir Arbeit auf sie tun, ausdehnen, und dasselbe gilt von einem Gas, welches wir komprimieren, indem wir einen Kolben nach innen drücken. Bei näherer Betrachtung zeigt es sich nun, daß die Arbeit, welche es uns kostet, um die Feder ein Stück auszudehnen, ebenso groß ist wie die Arbeit, die die Feder nachher selbst verrichten kann, wenn sie sich wieder auf die ursprüngliche Länge zusammen-

zieht, d. h. ebenso groß wie das Arbeitsvermögen, welches die Feder bei der Ausdehnung erhält. Wir können überhaupt sagen, *daß, wenn Arbeit auf einen Körper getan wird, die Energie dieses Körpers um einen Betrag zunimmt, der gleich dieser Arbeit ist.*

Um das Gesagte zu erläutern, stellen wir uns zunächst vor, daß bei der Zusammenziehung einer Spiralfeder, die mit dem einen Ende befestigt ist, sich das andere um eine gegegebene Strecke, z. B. von A nach B fortbewegt. Da sich die Spannung im Laufe der Zusammenziehung ändert, müssen wir (§ 113) den Weg AB in unendlich kleine Teile teilen und die Länge eines jeden derselben mit der Spannung multiplizieren, wie sie beim Durchlaufen dieses Teiles ist. Indem wir alle diese Produkte addieren, finden wir die Arbeit, welche die Feder auf irgend einen Körper verrichtet, mit dem das bewegliche Ende verbunden ist.

Sodann betrachten wir den Fall, daß wir durch Ziehen mit der Hand das Ende von B nach A zurückbringen. Die Spannung durchläuft dabei in umgekehrter Reihenfolge dieselbe Reihe von Werten wie soeben, und wenn wir uns jetzt vorstellen, daß die Kraft, die wir für das Ausdehnen ausüben müssen, in jedem Augenblick gleich der Spannung der Feder ist, so ist klar, daß die Arbeit, welche wir jetzt bei der Verschiebung über einen unendlich kleinen Teil des Weges verrichten, ebenso groß ist als die Arbeit der Spannung, welche vorher demselben Teil entsprach. Also muß auch die gesamte Arbeit, welche wir auf die Verschiebung von B nach A verwenden, gleich der Arbeit sein, welche die Feder bei der Zusammenziehung von A nach B verrichtete.

Eine ähnliche Schlußfolgerung ist auch auf ein Gas anwendbar, welches wir in dem einen Falle zusammendrücken und das in einem anderen Falle selbst, während es sich ausdehnt, eine Arbeit tut.

Auf die soeben angenommene Gleichheit der durch uns ausgeübten Kraft und der Spannung der Feder kommen wir noch zurück.

Zu einem wichtigen Resultat kommen wir nun, wenn wir die Sätze des vorigen und dieses Paragraphen miteinander verbinden. Wir nehmen an, daß ein Körper P eine gewisse Arbeit A auf einen Körper Q tut. Dann nimmt das Arbeits-

vermögen von P um einen Betrag A ab und das von Q nimmt um denselben Betrag zu; *die Summe des Arbeitsvermögens des einen und des anderen Körpers* oder, wie man sagt, *das Arbeitsvermögen, welches die beiden Körper zusammen haben, bleibt unverändert.* Mit einer naheliegenden bildlichen Ausdrucksweise können wir sagen, *daß eine gewisse Menge Arbeitsvermögen* von *der Größe A vom Körper P auf Q übergegangen ist. Es kommt auf dasselbe hinaus, ob wir sagen, daß ein Körper eine Arbeit A auf einen anderen tut, oder daß er eine Menge Arbeitsvermögen vom Betrage A an den anderen Körper abgibt.* Zur Erläuterung kann eine Spiralfeder dienen, die, während sie sich zusammenzieht, eine andere Feder ausdehnt, oder auch ein vollkommen geschlossener Zylinder, dessen Innenraum durch einen beweglichen Kolben in zwei Teile geteilt ist und der anfangs in den beiden Teilen Gasmassen enthält, die in verschiedenem Grade zusammengedrückt sind. Der Kolben wird dann durch den Unterschied der Kräfte, die beiderseits auf ihn wirken, in Bewegung gesetzt, und dabei nimmt das Arbeitsvermögen auf der einen Seite zu und auf der anderen Seite ab.

Ein anderes Beispiel hat man in zwei Körpern, welche zusammenstoßen. Wir wollen annehmen, eine Elfenbeinkugel A bewege sich mit einer gewissen Geschwindigkeit nach rechts und stoße gegen eine gleich große Kugel B aus demselben Stoffe, die anfangs in Ruhe ist und deren Mittelpunkt sich auf der Linie befindet, auf welcher sich der Mittelpunkt der ersteren bewegt. Es zeigt sich dann, daß A nach dem Stoß beinahe in Ruhe bleibt, während B eine Geschwindigkeit annimmt, die nur wenig kleiner ist als die ursprüngliche Geschwindigkeit von A.

Daß die Kugel A hierbei eine Arbeit auf B tut, ist einleuchtend; sie übt während der kurzen Zeit der Berührung eine Kraft nach rechts auf diesen Körper aus, und während dies geschieht, geht der Berührungspunkt ein wenig nach derselben Seite. Das Vermögen, auf diese Weise Arbeit zu verrichten, hat die Kugel A offenbar ihrer Bewegung zu verdanken, und zugleich mit ihrer Geschwindigkeit verliert sie auch diese Energie, während B nach dem Stoß imstande ist auf einen anderen Körper Arbeit zu tun.

Von solchen einfachen Fällen ausgehend ist man nach

und nach zu dem Satze gekommen, *daß bei allen Naturerscheinungen, welcher Art und wie kompliziert sie auch sind, die Summe des Arbeitsvermögens der aufeinander wirkenden Körper unverändert bleibt.* Es wird uns im Laufe unserer Betrachtungen klarer werden, aus welchen Gründen man dieses *Gesetz der Erhaltung der Energie*, welches zuerst von Robert Mayer (1842) und kurz nachher in strengerer Form von Helmholtz ausgesprochen wurde, annehmen darf; auch werden wir verschiedene Einschränkungen, die wir jetzt gemacht haben, fallen lassen. Zunächst muß jetzt aber das Arbeitsvermögen in bestimmten Fällen näher betrachtet werden.

§ 116. **Kinetische Energie.** Es wurde bereits vom Arbeitsvermögen gesprochen, welches ein Körper hat, der sich bewegt; dieses Arbeitsvermögen wollen wir zur Unterscheidung *Arbeitsvermögen der Bewegung* oder *kinetische Energie* nennen. Um den Betrag desselben zu bestimmen, denken wir uns einen Körper P mit der Masse m, der, ohne fortwährend einer bewegenden Kraft unterworfen zu sein, sich mit einer Geschwindigkeit v auf einer horizontalen Ebene bewegt. Wir können ihn dazu benutzen, um einen zweiten Körper Q, den wir mit ihm durch eine Schnur verbinden, fortzuziehen, und dies ist selbst dann möglich, wenn der Bewegung von Q dieser oder jener Widerstand entgegenwirkt.

Um nun die Arbeit zu berechnen, welche P verrichten kann, nehmen wir an, daß die auf Q ausgeübte Kraft fortwährend dieselbe Größe K hat. Dann wirkt auf P eine ebenso große Kraft in der entgegengesetzten Richtung; infolgedessen wird die Geschwindigkeit dieses Körpers in jeder Sekunde um K/m abnehmen und in

$$v : \frac{K}{m} = \frac{m v}{K} \text{ Sekunden}$$

vollständig erschöpft sein. Hieraus folgt, da die Bewegung gleichförmig verzögert ist, für die Entfernung, welche zurückgelegt wird, während die Kraft K besteht (§ 92)

$$\tfrac{1}{2} v \cdot \frac{m v}{K} = \frac{m v^2}{2 K},$$

und für die gesuchte Arbeit das Produkt aus diesem Ausdruck und K, d. h.

$$A = \tfrac{1}{2} m v^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Größe der kinetischen Energie wird also durch den Ausdruck $\frac{1}{2} m v^2$ bestimmt.

Wir werden jetzt beweisen, daß die Arbeit, welche der Körper tut, wenn die Bewegung nicht vollständig erschöpft, sondern nur die Geschwindigkeit auf v' vermindert wird, durch die Differenz

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v'^2$$

bestimmt wird, daß also diese Arbeit gleich der Verminderung der kinetischen Energie ist, was mit dem Satze von § 114 in Einklang steht. Den Beweis führen wir zunächst unter der Annahme einer konstanten Kraft K und dann für eine veränderliche Kraft.

Im ersteren Falle wird die Geschwindigkeit in

$$(v - v'): \frac{K}{m} = \frac{m(v - v')}{K} \text{ Sekunden}$$

auf v' sinken; der in dieser Zeit zurückgelegte Weg ist (§ 92)

$$\frac{1}{2}(v + v') \cdot \frac{m(v - v')}{K} = \frac{m(v^2 - v'^2)}{2K},$$

und folglich die Arbeit

$$A = \frac{1}{2} m (v^2 - v'^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ändert sich die Kraft von Augenblick zu Augenblick, so können wir die Zeit in unendlich kleine Teile teilen und dann auf jeden die Formel (3) anwenden. Durch Addition findet man dann wieder, daß die Gesamtarbeit in einer gewissen Zeit gleich der gesamten Verminderung der kinetischen Energie ist.

Auch der erste Satz von § 115 wird jetzt bestätigt. Üben wir nämlich auf einen Körper, der bereits eine Geschwindigkeit v hat, in der Richtung der Bewegung während t Sekunden e konstante Kraft K aus, so wird, da die Beschleunigung ist, die Endgeschwindigkeit

$$v' = v + \frac{K}{m} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zurückgelegte Weg ist

$$s = \frac{1}{2}(v' + v) t$$

id die Arbeit, die wir verrichten,

$$A = K s = \frac{1}{2}(v' + v) K t,$$

oder, wenn wir für Kt den aus (4) folgenden Wert $m(v' - v)$ einsetzen,

$$A = \frac{1}{2} m (v' + v)(v' - v) = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2,$$

und dieses Resultat ist wieder leicht auf den Fall auszudehnen, daß sich die Kraft im Laufe der Zeit t ändert.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, daß es auf den Wert der kinetischen Energie in einem bestimmten Augenblick keinen Einfluß hat, wenn in diesem Augenblick eine Kraft auf den Körper wirkt. Man sieht dies am leichtesten ein, wenn man sich vorstellt, daß der Körper die Arbeit, die er leisten kann, in so kurzer Zeit verrichtet, daß die betreffende Kraft in dieser Zeit keine nennenswerte Geschwindigkeitsänderung bewirken kann. Wir können z. B. das Arbeitsvermögen eines Körpers nach der Dicke einer Platte beurteilen, die er zertrümmern kann. Legt man die Platte horizontal und läßt eine Kugel auf sie fallen, so wird es nur von der Geschwindigkeit der Kugel abhängen, mit der die Platte getroffen wird, ob die letztere zertrümmert wird oder nicht, nicht aber von der Wirkung der Schwerkraft während der kurzen Zeit, in welcher der Vorgang verläuft.

Etwas anderes ist es natürlich, daß die kinetische Energie in einem bestimmten Augenblick von den Kräften abhängig ist, die *vor* diesem Augenblick auf den Körper gewirkt und also Einfluß auf die Geschwindigkeit gehabt haben.

Wir weisen endlich darauf hin, *daß die kinetische Energie unabhängig von der Richtung der Bewegung ist.*

Eine Kugel, die eine bestimmte Geschwindigkeit hat, übt z. B. dieselbe Wirkung auf eine Platte aus, einerlei ob sie sich in der einen oder der anderen Richtung bewegt, wenn wir immer die Platte so halten, daß sie senkrecht getroffen wird.

Wir können jetzt die Formel (2) auch auf den Fall eines *Systems von Körpern oder materiellen Punkten* ausdehnen, deren jeder sich mit seiner eignen Geschwindigkeit bewegt. Wenn die Massen m_1, m_2 usw. und die Geschwindigkeiten, die beliebig verschiedene Richtungen haben können, v_1, v_2 usw. sind, so kann der erste materielle Punkt, bis seine Bewegung erschöpft ist, eine Arbeit $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ verrichten, der zweite eine Arbeit $\frac{1}{2} m_2 v_2^2$, usw. Die Summe

$$A = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \text{usw.},$$

wofür wir schreiben können

$$A = \sum \tfrac{1}{2} m v^2, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

stellt also die kinetische Energie des ganzen Systems vor.

§ 117. **Energie elastischer fester Körper.** Es wurde bereits wiederholt von der Arbeit gesprochen, die ein ausgedehnter Draht oder eine ausgedehnte Spiralfeder verrichten kann. Im allgemeinen werden die Teilchen eines festen Körpers, nachdem sie in bezug aufeinander verschoben worden sind, wobei der Körper in der Regel in der Form verändert oder „deformiert" wird, Kräfte aufeinander ausüben, durch die sie in die ursprünglichen Lagen zurückgetrieben werden. Infolgedessen kann der Körper andere Gegenstände, die mit ihm verbunden sind, verschieben und also eine Arbeit auf diese Gegenstände tun. Wir wollen annehmen, daß der Körper das Vermögen, dies zu tun, erst dann verloren hat, wenn er wieder vollständig in den ursprünglichen Zustand zurückgekehrt ist, was man dadurch ausdrückt, daß man den Körper *vollkommen elastisch* nennt. Die Arbeit, welche er dabei im ganzen verrichtet, ist das Maß für die Energie, welche er im deformierten Zustand hatte, und solange die Deformation noch nicht vollständig verschwunden ist und der Körper also noch einige Energie besitzt, ist die Verminderung der Energie, welche bereits stattgefunden hat, gleich der Arbeit, die der Körper bis zu dem betreffenden Augenblick verrichtet hat. Umgekehrt ist, wenn wir die Formveränderung durch Kräfte, die wir ausüben, bewirken, die Arbeit, die wir dabei auf den Körper tun, gleich der Zunahme der Energie desselben.

Bei vielen Uhrwerken macht man von der Energie eines elastischen Körpers Gebrauch, um das Räderwerk zu treiben. Eine Uhrfeder ist ein plattes dünnes Stahlband von ziemlich großer Länge, das so bearbeitet ist, daß es in seinem natürlichen Zustand die Form einer ebenen Spirale (Fig. 91) hat. Sie ist in einer Dose B, der sogenannten Trommel, eingeschlossen, die die Form eines Zylinders von geringer Höhe hat und sich um ihre geometrische Achse, also um eine auf der Ebene der Figur senkrecht stehende Linie drehen kann. Das eine Ende der Feder ist an der Innenwand der Trommel, das andere Ende an einem dünnen Zylinder A befestigt, dessen

Achse mit derjenigen der Dose zusammenfällt. Dieser Zylinder geht mit geringer Reibung durch die ebenen Seitenflächen der Trommel und kann unabhängig von dieser gedreht werden; durch eine Vorrichtung, die wir später kennen lernen werden, wird der Achse *A* nur eine Drehung in *einer* Richtung gestattet, die in der Figur so gedacht werden muß, daß sie derjenigen entgegengesetzt ist, in welcher sich die Zeiger einer Uhr bewegen.

Beim Aufziehen des Uhrwerkes wird die Achse gedreht; die Feder nimmt dann die in Fig. 92 angegebene Gestalt an, wobei sie sich in engeren Windungen als in Fig. 91 um *A*

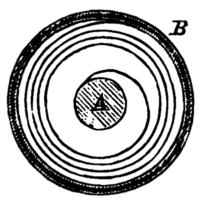


Fig. 91.

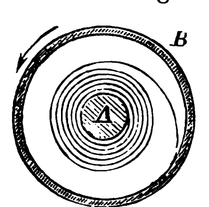


Fig. 92.

legt. Durch ihre Elastizität strebt sie nun die Achse *A* zurückzudrehen, was sie nicht kann, aber sie strebt auch die Dose in der durch den Pfeil angegebenen Richtung in Bewegung zu setzen. Die Drehung, welche die Dose auf diese Weise bekommt, wird auf das Räderwerk übertragen.

Infolge der Widerstände im Räderwerk kann die Trommel nur eine langsame Bewegung annehmen, und auch ohne daß man sie absichtlich festhält, ist das Aufziehen möglich; die Energie, welche man während einer kurzen Zeit der Feder mitteilt, dient dazu, um während einer viel längeren Zeit Arbeit zu verrichten.

§ 118. **Stoß vollkommen elastischer Körper.** Wir nehmen an, daß die Kugeln, von denen in § 100 die Rede war, vollkommen elastisch sind; dann ist die gegenseitige Einwirkung noch nicht in dem Augenblick abgelaufen, in welchem die in jenem Paragraphen berechnete Geschwindigkeit erreicht ist. Da sich nämlich bis zu diesem Augenblick die Mittelpunkte fortwährend genähert haben, sind die Kugeln in der Nähe der Berührungspunkte eingedrückt; die durch die Elastizität verursachte Abstoßung ist noch nicht zu Ende gekommen und die

Geschwindigkeiten erleiden noch weitere Veränderungen. *Die Endgeschwindigkeiten können berechnet werden, wenn wir außer dem bereits in § 100 angewandten Prinzip vom Gesetz der Erhaltung der Energie Gebrauch machen.* Hat nämlich die Berührung der Kugeln aufgehört, so haben sie wieder die ursprüngliche Gestalt angenommen; nur die Geschwindigkeit und also auch die kinetische Energie beider Körper hat sich geändert, aber *die gesamte kinetische Energie* ist nach dem Stoß wieder ebenso groß wie vor demselben.

Mit m_1, m_2, v_1 und v_2 sollen dieselben Größen bezeichnet werden wie in § 100, aber x_1 und x_2 sollen jetzt die Endgeschwindigkeiten der ersten und der zweiten Kugel sein. Diese Geschwindigkeiten sollen ebenso wie v_1 und v_2 je nach der Richtung, die sie haben, positiv oder negativ genannt werden.

Die erste Kugel hat durch den Stoß eine Geschwindigkeit $x_1 - v_1$, die zweite eine Geschwindigkeit $x_2 - v_2$ zu derjenigen hinzubekommen, welche sie bereits hatte. Diese Geschwindigkeitsänderungen haben entgegengesetzte Vorzeichen und ihr Betrag muß den Massen umgekehrt proportional sein. Man hat also

$$m_1 (x_1 - v_1) = m_2 (v_2 - x_2), \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Außerdem muß nach dem Gesagten

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 x_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 x_2^2,$$

oder

$$\tfrac{1}{2} m_1 (x_1^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2} m_2 (v_2^2 - x_2^2) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

sein. Um nun x_1 und x_2 zu berechnen, dividieren wir zunächst (7) durch (6). Dies gibt, wenn wir zugleich mit 2 multiplizieren,

$$x_1 + v_1 = x_2 + v_2,$$

und man findet dann weiter leicht aus dieser Gleichung und (6)

$$x_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad x_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Besondere Fälle. a) Es sei $v_2 = 0$ und v_1 positiv. Dann ist $x_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ und $x_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$. Hieraus ergibt sich, daß, wenn die Massen gleich sind, die erste Kugel in Ruhe bleibt. Dagegen geht diese Kugel in der Richtung, in der sie sich ursprünglich bewegte, weiter, wenn die zweite Kugel eine kleinere Masse hat, kehrt aber zurück, wenn diese eine größere Masse

hat. Ist m_2 sehr groß in bezug auf m_1, dann ist nahezu $x_1 = - v_1$.

b) Ist $m_1 = m_2$, so wird $x_1 = v_2$, $x_2 = v_1$, so daß die Kugeln ihre Geschwindigkeiten vertauschen.

§ 119. **Stoß einer elastischen Kugel gegen eine Ebene.** Sehr einfach ist der Fall, daß eine Kugel *in senkrechter Richtung* gegen eine Platte stößt. Wir nehmen an, daß beide Körper vollkommen elastisch sind und daß die Ränder der Platte unbeweglich festgehalten werden. Während wir dies tun, verrichten wir keine Arbeit (§ 113); die gesamte Energie der Platte und der Kugel bleibt infolgedessen unverändert. Hieraus schließen wir, daß, wenn beide Körper schließlich wieder ihre ursprüngliche Gestalt haben, und wenn wir annehmen dürfen, daß die Platte gar keine Bewegung bekommen hat, die Kugel wieder ebensoviel kinetische Energie hat als anfangs. Sie springt mit einer Geschwindigkeit gleich der ursprünglichen, natürlich in senkrechter Richtung, von der Platte zurück.

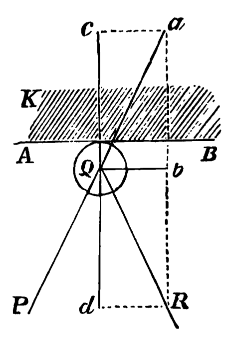


Fig. 93.

Es ist nun weiter leicht zu verstehen, was geschieht, wenn die Kugel *in schiefer Richtung*, z. B. in der Richtung PQ (Fig. 93) eine unbewegliche elastische Platte K trifft. Wir nehmen an, daß diese durch die Ebene begrenzt wird, die durch AB geht und auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht. Die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel Qa können wir in Qb parallel zu AB und Qc senkrecht zu AB zerlegen.

Durch dieselbe Schlußfolgerung wie oben kann man beweisen, daß die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß gleich der Anfangsgeschwindigkeit ist. Dazu kommt nun noch, daß die Geschwindigkeit Qb in der Richtung AB unverändert bleibt, und zwar deshalb, weil die Platte, die wir als vollkommen glatt betrachten, nur in der Richtung der Normalen, aber nicht in einer Richtung längs der Platte auf die Kugel eine Kraft ausüben kann. Bringt man beides in Verbindung, so ergibt sich, daß die Geschwindigkeit senkrecht zur Platte übergeht in Qd, gleich und entgegengesetzt Qc, und daß die neue Bewegungs-

richtung QR einen ebenso großen Winkel mit der Normalen auf AB bildet wie PQ.

§ 120. **Allgemeine Definition der Arbeit einer Kraft.** Die Art und Weise, wie ein Körper in Bewegung gesetzt wird, ist oft viel weniger deutlich als in den Fällen, die bis jetzt in in diesem Kapitel besprochen wurden. Wir haben z. B. gute Gründe uns vorzustellen, daß elektrisierte Körper, die sich einander „anziehen", durch einen im Zwischenraum vorhandenen, für uns unsichtbaren Stoff in Bewegung gesetzt werden, der sich in einem eigentümlichen Zustand befindet und infolgedessen auf die Körper Kräfte ausübt und der in gewissem Grade mit einer gespannten Feder verglichen werden kann. Ebenso liegt es nahe, die allgemeine Anziehungskraft, sowohl bei fallenden Körpern als bei Himmelskörpern, als die Wirkung eines „Mittels" oder „Mediums" aufzufassen und zu sagen, daß dieses auf einen fallenden Stein Arbeit tut und dadurch nach dem Satz von § 115 das Arbeitsvermögen desselben vergrößert. Die Veränderungen in derartigen unsichtbaren Medien sind jedoch für uns viel weniger zugänglich als der Zustand von wahrnehmbaren elastischen Körpern, und man zieht es daher oft vor, die Erscheinungen zu beschreiben, ohne von den Medien zu sprechen. Man richtet dann seine Aufmerksamkeit nur auf die Kräfte, welche im Spiel sind, läßt sich aber nicht über den Mechanismus aus, der diesen Kräften zugrunde liegt.

Im Zusammenhang hiermit sagt man nun auch, daß auf den Körper, der sich bewegt, eine Arbeit getan wird, *nicht durch das Medium, welches eine Kraft auf ihn ausübt, sondern durch die Kraft selbst*, eine Redeweise, die man übrigens auch bei den einfacheren Erscheinungen, mit denen wir uns bis jetzt beschäftigt haben, anwenden kann.

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, können wir dazu übergehen, die Definition der Arbeit, die in § 113 nur für eine Verschiebung in der Richtung der Kraft gegeben wurde, so zu erweitern, daß sie allgemein anwendbar ist. Dazu ist es nötig, die Arbeit je nach Umständen positiv oder negativ zu rechnen.

Positiv wird die Arbeit genannt, wenn die Verschiebung die Richtung der Kraft hat.

a) *Bewegt sich dagegen der Angriffspunkt in einer Richtung, die der Kraft entgegengesetzt ist, so spricht man von einer negativen Arbeit. Die Größe derselben wird wieder durch das Produkt aus der Kraft und dem zurückgelegten Weg angegeben.* Ist also die Kraft K und die Verschiebung s, so ist in diesem Fall die Arbeit

$$-Ks.$$

Nachdem wir in dieser Weise zu dem Begriff einer *negativen Arbeit* gekommen sind, können wir auch in denjenigen Fällen, in denen wir früher von einer *Arbeit* sprachen, *die ein Körper tut*, ebensogut (wenn es auch etwas gekünstelt ist) *von einer ebenso großen negativen Arbeit* sprechen, *die auf ihn getan wird.* Übt nämlich der Körper auf einen anderen, gegen den er drückt, eine Kraft K aus und verschiebt sich der Angriffspunkt in der Richtung dieser Kraft um eine Strecke s, so verrichtet, während der Körper eine Arbeit $+Ks$ leistet, die Kraft, die auf den Körper wirkt und die gleich und entgegengesetzt K ist, eine Arbeit $-Ks$.

b) *Wenn ein Punkt, auf den die nach Richtung und Größe konstante Kraft K wirkt, eine beliebige Verschiebung AB (Fig. 94*

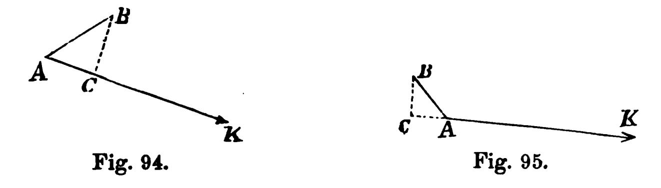


Fig. 94. Fig. 95.

und 95) erleidet, so versteht man unter der Arbeit das Produkt aus der Kraft und der Projektion AC der Verschiebung auf ihre Richtung, und zwar wird die Arbeit positiv gerechnet, wenn eine Verschiebung von A nach C mit der Richtung der Kraft übereinstimmt, und negativ, wenn sie derselben entgegengesetzt ist.

In dem Falle von Fig. 94 ist also die Arbeit

$$+K \times AC,$$

und im Falle von Fig. 95

$$-K \times AC.$$

Beide Ausdrücke können in der Form

$$K \times AB \cos \vartheta$$

zusammengefaßt werden, in welcher ϑ der Winkel ist, den die Verschiebung mit der Richtung der Kraft bildet.

Man kann das Gesagte auch anders einkleiden. Die Arbeit wird nämlich auch gefunden, wenn man die Verschiebung mit der Projektion der Kraft auf die Richtung der Verschiebung multipliziert und das Produkt mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versieht, je nachdem die Projektion dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie die Verschiebung.

c) Aus dem unter b) Gesagten folgt:

Die Arbeit einer Kraft ist Null, wenn sich der Angriffspunkt senkrecht zu ihrer Richtung bewegt.

d) Wir wollen endlich annehmen, daß sich die Kraft fortwährend in Richtung oder Größe oder in Richtung und Größe zugleich ändert und daß der Angriffspunkt eine beliebige gerade oder krumme Bahn beschreibt. Wir können dann diese in unendlich kleine Teile teilen, auf jedem dieser Teile die Kraft als unveränderlich in Richtung und Größe betrachten und die von ihr geleistete Arbeit nach der soeben gegebenen Regel bestimmen; dabei müssen für jedes Element der Bahn die Richtung und die Größe der Kraft so genommen werden wie sie am Anfang des Elementes sind. *Unter Arbeit der Kraft versteht man die algebraische Summe der Resultate, die man in dieser Weise für die verschiedenen Elemente der Bahn bekommt.*

Wenn z. B. (Fig. 38, S. 61) der Körper von B nach A geht, während er von einem unbeweglichen Körper in O mit einer Kraft angezogen wird, die von der Entfernung von O abhängt, so muß man für das Element DC der Bahn die Anziehung, wie sie in der Entfernung OD ist, mit der Projektion DE von DC auf OD multiplizieren, und ebenso muß man mit den in der Figur angedeuteten Projektionen der anderen Bahnelemente verfahren.

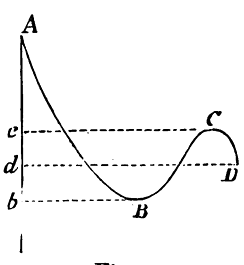


Fig. 96.

Das Resultat der Berechnung wird einfach, wenn die Kraft fortwährend dieselbe Richtung und Größe behält. Wir wollen z. B. annehmen, Ab (Fig. 96) sei die Richtung der Kraft K und $ABCD$ die Bahn des Angriffspunktes. Man findet dann für die Arbeit

auf dem Weg $AB: + K \times Ab$,

„ „ „ $BC: - K \times bc$,

„ „ „ $CD: + K \times cd$,

also

„ „ „ $ABC: + K \times Ac$

und

„ „ „ $BCD: + K \times bd$.

Bei einer beliebigen Bewegung eines materiellen Punktes ist z. B. die Arbeit der Schwerkraft gleich dem Gewicht multipliziert mit der Höhendifferenz zwischen der Anfangs- und der Endlage, und zwar muß diese Differenz mit dem positiven oder negativen Vorzeichen genommen werden, je nachdem die Endlage tiefer oder höher liegt als die Anfangslage.

Das Gesagte gibt noch Veranlassung zu einigen Bemerkungen.

Zunächst ist es jetzt klar, daß „Arbeit" nicht gleichbedeutend mit „Wirkung einer Kraft" ist. Die Zentripetalkraft, welche auf einen Körper wirken muß, damit er mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreis beschreibt, verrichtet keine Arbeit, weil jedes Bahnelement senkrecht auf der Richtung der Kraft steht. Die Zentripetalkraft ist indes nicht ohne „Wirkung" sie gibt nämlich in jedem kleinen Zeitteil dem Körper eine Geschwindigkeit zu derjenigen, welche er bereits hatte.

Sodann gilt im allgemeinen der Satz (vgl. § 113, d) daß, wenn der Weg eines materiellen Punktes in verschiedene Teile zerlegt wird, die Arbeit dadurch gefunden wird, daß man für jeden einzelnen Teil die Arbeit berechnet und die Resultate zueinander addiert.

Endlich bemerken wir, daß in den Definitionen nur von der Kraft und der Bewegung ihres Angriffspunktes die Rede ist, aber nicht gesagt wird, daß diese Bewegung durch die Kraft selbst hervorgebracht wird. Der Punkt kann, unabhängig von der betrachteten Kraft, eine Anfangsgeschwindigkeit haben, und außer der betrachteten Kraft können noch andere Kräfte wirken, die ebenfalls Einfluß auf die Bewegung haben. In einem solchen Fall kann *von jeder einzelnen Kraft* die Arbeit nach den gegebenen Regeln ermittelt werden.

§ 121. **Arbeit der Resultante mehrerer Kräfte.** In Fig. 35 oder 36 (S. 44) sei AC die Resultante zweier Kräfte AB

und AD, die auf den Punkt A wirken, und dieser erleide eine unendlich kleine Verschiebung δ in der Richtung von AX. In § 30 wurde gezeigt, daß die Projektion von AC auf diese Richtung die algebraische Summe der Projektionen von AB und AD ist. Multipliziert man die Gleichung, welche dies ausdrückt, mit δ, so kommt man zu dem Satze:

Die Arbeit der Resultante ist die algebraische Summe der Arbeit der einen und der Arbeit der anderen Kraft.

Man kann diesen Satz auf mehr als zwei Kräfte ausdehnen und er gilt für jede Bewegung, da man immer die Bahn in unendlich kleine Stücke teilen und für jedes Stück das, was wir soeben gefunden haben, anwenden kann.

Wir wollen z. B. annehmen, daß ein materieller Punkt unter dem Einfluß der Anziehung von zwei festen Zentren eine krumme Linie beschreibt. Die Anziehung K_1 von dem ersten Zentrum soll sich dabei in Richtung und Größe unaufhörlich ändern, und die Anziehung K_2 vom zweiten Zentrum ebenfalls. Wenn man weiß, wie es sich hiermit verhält, so kann man in jedem Punkt der Bahn die Resultante R von K_1 und K_2 bestimmen. Berechnet man nun in der in § 120, d angegebenen Weise für einen beliebigen Teil der Bahn

1. die Arbeit A_{K_1} von K_1,
2. „ „ A_{K_2} „ K_2,
3. „ „ A_R „ R,

so ist

$$A_R = A_{K_1} + A_{K_2}.$$

§ 122. **Zusammenhang zwischen der Arbeit und der kinetischen Energie.** Wenn ein materieller Punkt sich unter dem Einfluß einer einzigen Kraft bewegt, *so ist während eines beliebigen Zeitraumes die Arbeit der Kraft gleich der Zunahme der kinetischen Energie des Punktes.* Diesen Satz haben wir bereits in § 116 für den Fall bewiesen, daß die Richtung der Bewegung mit der Richtung der Kraft zusammenfällt; wir können jetzt einsehen, daß er allgemein gilt. Die Sache ist einfach, wenn eine konstante Kraft K, die der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist, die Geschwindigkeit vermindert. Wir können dann schließen wie auf S. 172, nur muß die Formel (4) durch

$$v' = v - \frac{K}{m}t$$

ersetzt werden, während die Arbeit der Kraft gegeben ist durch

$$A = -Ks = -\tfrac{1}{2}(v' + v)Kt.$$

Auch hier ergibt sich wieder

$$A = \tfrac{1}{2}mv'^2 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Diese Gleichung, in welcher jetzt beide Seiten negativ sind, drückt den zu beweisenden Satz aus, der übrigens in engem Zusammenhang steht mit dem Satz von S. 172, daß die Verminderung der kinetischen Energie gleich der Arbeit ist, welche der Körper selbst verrichtet.

Auch in dem Falle einer Bewegung, die von der Richtung der Kraft abweicht, beginnen wir mit dem Fall einer Kraft von konstanter Richtung und Größe. Die Bahn ist dann, wie wir wissen, eine Parabel (Fig. 97); die Projektion des materiellen Punktes auf eine Linie LL', die der Kraft K parallel läuft, hat eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bewegung, während die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zu LL' einen konstanten Wert w hat. Legt nun während der Zeit t der Punkt den Teil AB der Bahn zurück und bezeichnet man mit v und v' die Geschwindigkeiten in A und B und mit u und u' die Geschwindigkeiten, welche die Projektion in den Punkten a und b hat, so ist

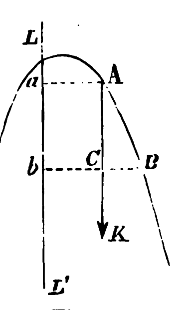


Fig. 97.

$$ab = \tfrac{1}{2}(u' + u)t,$$

und da $u' - u$ die Geschwindigkeit ist, welche der Punkt in der Zeit t zu der bereits vorhandenen hinzubekommen hat,

$$K = \frac{m(u' - u)}{t}.$$

Die Arbeit der Kraft ist nun (§ 120, d)

$$A = K \times ab,$$

wofür man schreiben kann

$$A = \tfrac{1}{2}m(u'^2 - u^2),$$

oder, da

$$v^2 = u^2 + w^2 \quad \text{und} \quad v'^2 = u'^2 + w^2$$

ist,

$$A = \tfrac{1}{2} m v'^2 - \tfrac{1}{2} m v^2.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dies auch so ist, wenn der Punkt während des betrachteten Zeitraumes der Wirkung der Kraft entgegen in der Parabel „steigt"; nur sind dann beide Seiten der Gleichung negativ.

Wir können nun schließlich den Satz auf die Bewegung unter dem Einfluß einer Kraft ausdehnen, die sich in beliebiger Weise nach Richtung und Größe ändert. Man kann nämlich den betrachteten Zeitraum in unendlich kleine Teile zerlegen und annehmen, daß sich während jedes dieser Teile die Richtung und die Größe der Kraft nicht ändert. Zugleich mit der Geschwindigkeit v ändert sich auch die kinetische Energie $\frac{1}{2} m v^2$ von Augenblick zu Augenblick, und man kann nach der gefundenen Formel sagen: die (positive oder negative) Arbeit der Kraft während des ersten Zeitelements ist gleich der (positiven oder negativen) Zunahme von $\frac{1}{2} m v^2$.

Eine solche Gleichung kann für jedes Element aufgestellt werden. Addiert man alle diese Gleichungen, so kommt man zu dem Satze:

Die gesamte Arbeit der Kraft ist gleich der gesamten Zunahme von $\frac{1}{2} m v^2$.

§ 123. **Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einfluß von mehr als einer Kraft.** Man kann für jeden Augenblick die sämtlichen wirkenden Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen, und die Arbeit dieser letzteren ist dann gleich der Änderung der kinetischen Energie. Mit Rücksicht auf das in § 121 Bewiesene kann man aber auch sagen:

Die Zunahme der kinetischen Energie ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der verschiedenen Kräfte, die auf den materiellen Punkt wirken, oder, wie man auch zu sagen pflegt, *gleich der gesamten Arbeit aller dieser Kräfte.*

Man braucht daher bei der Anwendung des Satzes die Kräfte nicht erst zusammenzusetzen.

In vielen Fällen wird die Sache noch dadurch vereinfacht, daß eine der Kräfte fortwährend senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht und also keine Arbeit verrichtet.

§ 124. **Anwendungen.** a) Es seien A und B zwei horizontale Ebenen, von denen die erstere im Abstand h über der letzteren liegt. Wenn dann ein materieller Punkt, auf den die Schwerkraft wirkt, in beliebiger Richtung mit der Geschwindigkeit v von einem Punkt in A ausgeht, so kann man leicht die Geschwindigkeit v' berechnen, mit der er die Ebene B erreicht. Ist nämlich m die Masse des Punktes, also mg sein Gewicht, so ist die Arbeit der Schwerkraft mgh, woraus folgt:

$$\tfrac{1}{2} m v'^2 - \tfrac{1}{2} m v^2 = m g h,$$

also

$$v' = \sqrt{v^2 + 2 g h}.$$

Wenn dagegen der Punkt mit einer Geschwindigkeit v von der unteren Ebene ausgeht, so erreicht er die obere Ebene, wenn dies überhaupt eintritt, mit der Geschwindigkeit

$$v' = \sqrt{v^2 - 2 g h}.$$

Bei diesen Gleichungen ist es einerlei, in welcher Richtung die Bewegung anfängt und welcher Punkt der zweiten Ebene getroffen wird. Man kann z. B. den Punkt mit der Anfangsgeschwindigkeit v von der Ebene B in vertikaler oder auch in einer solchen schiefen Richtung nach A steigen lassen, daß der Scheitel der beschriebenen Parabel gerade in A liegt. In beiden Fällen wird diese Ebene mit derselben Geschwindigkeit v' erreicht, aber in dem einen Fall ist diese Geschwindigkeit vertikal und im anderen Fall horizontal gerichtet.

Bei der parabolischen Bewegung hat der Körper in zwei Punkten, die auf verschiedenen Seiten des Scheitels der Bahn in gleicher Höhe liegen, dieselbe Geschwindigkeit.

b) Es soll die Endgeschwindigkeit eines Körpers ermittelt werden, der auf einer vollkommen glatten schiefen Ebene eine Strecke s herabfällt. Man kann zu diesem Zwecke zunächst die Dauer t der Bewegung bestimmen. Ist nämlich der Neigungswinkel α, so ist die Beschleunigung $g \sin \alpha$, und man hat

$$s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2, \quad \text{also} \quad t = \sqrt{\frac{2 s}{g \sin \alpha}}.$$

Hieraus folgt für die Endgeschwindigkeit

$$v = g \sin \alpha \,.\, t = \sqrt{2 g s \sin \alpha} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Dieses Resultat findet man leichter mit Hilfe des Satzes des vorhergehenden Paragraphen. Auf den Körper wirkt nämlich die Schwerkraft und der Widerstand der Ebene, aber die letztere Kraft verrichtet keine Arbeit, da sie senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht. Ist m die Masse, so ist das Gewicht mg und die Arbeit der Schwerkraft mgh, wenn man mit h die Fallhöhe in vertikaler Richtung bezeichnet. Folglich ist

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h$$

und

$$v = \sqrt{2 g h}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

was in die Formel (8) übergeht, wenn man $h = s \sin \alpha$ setzt.

c) Die zuletzt befolgte Methode hat den Vorzug, daß sie auf einen Körper angewandt werden kann, der auf einer beliebig gekrümmten vollkommen glatten Fläche eine vertikale Höhe h herabfällt. Auch in diesem Falle verrichtet nämlich der Widerstand der Fläche keine Arbeit. Man kommt wieder zu der Formel (9) und sieht also, daß die Endgeschwindigkeit unabhängig von der Gestalt der Fläche ist, obgleich ihre Richtung und die für die Bewegung erforderliche Zeit sehr verschieden sein kann. *Immer ist v ebenso groß wie beim freien Fall von einer Höhe h.* Dies ist auch der Fall, wenn der Körper an einem undehnbaren Faden befestigt ist (mathematisches Pendel). Die Spannung des Fadens verrichtet nämlich keine Arbeit, weil sie senkrecht auf dem Kreisbogen steht, den der Körper beschreibt.

d) Hat ein solcher an einem Faden aufgehängter Körper oder ein Körper, der auf einer gekrümmten Fläche bleiben muß, in einer seiner Lagen die Geschwindigkeit v, so hat er in einer beliebigen tieferen Lage, wenn der Höhenunterschied h ist, die Geschwindigkeit

$$v' = \sqrt{v^2 + 2 g h}.$$

Dagegen ist in einem Punkt, in welchem die vertikale Höhe um h größer ist als im Ausgangspunkt, die Geschwindigkeit

$$\sqrt{v^2 - 2 g h}.$$

Ist $h = 0$, so wird $v' = v$. Ein mathematisches Pendel hat also dieselbe Geschwindigkeit in zwei Lagen, die auf beiden Seiten gleichweit von der Gleichgewichtslage entfernt sind. Beim Übergang aus der einen Lage in die andere hat nämlich

› Schwerkraft erst eine positive und dann eine ebenso große gative Arbeit geleistet.

Man wird nun einsehen, daß, wenn die Bewegung keinen iderstand zu überwinden hat, ein mathematisches Pendel ›hts und links von der Gleichgewichtslage immer denselben ısschlag erreichen muß.

e) Wird dem Körper eines solchen Pendels, während er h in der Gleichgewichtslage befindet, durch einen plötzlichen ›ß eine kleine horizontale Geschwindigkeit erteilt, so steigt auf dieselbe vertikale Höhe wie ein Körper, der mit der-lben Anfangsgeschwindigkeit vertikal in die Höhe geworfen wird.

§ 125. **System materieller Punkte.** Wenn man den Satz n § 122 auf jeden einzelnen Punkt anwendet und dann diert, kommt man zu dem Schluß, daß bei einer beliebigen ›wegung des Systems *die Zunahme der gesamten kinetischen ıergie* (§ 116) *gleich der algebraischen Summe der Arbeiten aller ·äfte ist, die auf die Punkte wirken.*

Bei der Berechnung kann man die Kräfte in beliebiger 'eise in Gruppen verteilen und zunächst für jede Gruppe die rbeit bestimmen. Man kann z. B. mit den *äußeren Kräften* fangen, d. h. mit denjenigen, die von außen auf das System rken, und dann die *inneren Kräfte* betrachten, welche die ateriellen Punkte aufeinander ausüben. Man muß dabei be-ınken, daß, wenn K die Kraft ist, die der Punkt P' auf den ınkt P ausübt, und K' die Kraft, mit der P auf P' wirkt, › *Arbeit beider* in Rechnung gebracht werden muß. Die Arbeit n K hängt von der Verschiebung von P, die Arbeit von K' ıgegen von der Verschiebung von P' ab.

§ 126. **Energie der Lage im Fall der Schwerkraft.** Wir ›llen annehmen, man habe es bei irgend einer Erscheinung it einem Körper vom Gewicht P zu tun, der bei seiner Be-›gung immer über einer gewissen horizontalen Ebene V, z. B. ner Tischplatte bleibt. Befindet er sich in einer bestimmten ıge, die wir mit dem Buchstaben A bezeichnen wollen, einer Höhe h über dieser Ebene, so kann das Medium, ›lchem wir die auf den Körper wirkende Kraft zuschreiben, ne Arbeit Ph auf den Körper tun, wenn sich dieser nach ır Ebene V bewegt Wir drücken dies dadurch aus, daß

wir sagen, *daß das Medium bei der Lage A des Körpers das Arbeitsvermögen oder die Energie*

$$U = Ph \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

hat.

Da diese Größe von der Lage des Körpers abhängt, hat man ihr den Namen *Energie der Lage* gegeben. Man sagt auch oft, der Körper selbst besitze diese Energie. Zu dieser nicht ganz richtigen Redeweise ist man gekommen, weil man das Medium außer Betracht lassen wollte.

Es gilt jetzt wieder die Regel von § 114; wenn der Körper fällt, aber nicht ganz bis in die Ebene V, so ist die Arbeit, welche das Medium tut, gleich der Verminderung seiner Energie. Ist nämlich die Höhe erst h und dann h', so ist die Fallhöhe in vertikaler Richtung $h - h'$, und also (§ 120, d) die Arbeit $P(h - h')$, einerlei, auf welcher Linie der Körper aus der einen Lage in die andere übergegangen ist. Da die Energie der Lage erst durch Ph und später durch Ph' ausgedrückt wird, so ist wirklich *die Arbeit der Schwerkraft gleich der Verminderung der Energie der Lage.*

Daß diese Regel auch gilt, wenn $h' > h$ ist, in welchem Falle sowohl die Arbeit als auch die Verminderung der Energie der Lage negativ wird, braucht kaum gesagt zu werden.

Es sind jetzt noch einige Bemerkungen zu machen, zu denen früher weniger Veranlassung vorhanden war. Wir haben am Anfang dieses Kapitels den Satz ausgesprochen, daß die Arbeit, welche ein Körper beim Übergang aus einem gewissen Anfangszustand in einen gewissen Endzustand verrichtet, gleich der Verminderung seiner Energie ist; dabei stellten wir uns vor, daß die Energie in jedem Zustand einen *bestimmten* Wert hat. Nun kann es vorkommen, daß der Übergang aus dem einen Zustand in den anderen in verschiedener Weise stattfinden kann, nämlich mit verschiedenen Zwischenzuständen, was wir dadurch ausdrücken wollen, daß wir sagen, der Übergang könne *auf verschiedenen Wegen* geschehen. Der soeben genannte Satz hat nur dann Sinn, wenn die Arbeit des Körpers bei jeder Reihe von Veränderungen, in welcher Anfangs- und Endzustand dieselben sind, denselben Wert hat. Wäre dies nicht der Fall und hätte die Arbeit auf dem einen Wege den Wert A und auf dem anderen Wege den davon verschiedenen

Wert A', so würde man nicht wissen, ob man den Unterschied der Energie im Anfangs- und Endzustand gleich A oder gleich A' zu setzen hätte. Von einem bestimmten Arbeitsvermögen könnte dann keine Rede sein und ebensowenig von einem Gesetz der Erhaltung des Arbeitsvermögens. *Dieses Gesetz ist denn auch nicht selbstverständlich, sondern beruht auf dem aus der Beobachtung abgeleiteten Satz, daß die Arbeit, welche ein Körper beim Übergang aus dem einen Zustand in den anderen verrichtet, stets unabhängig von den durchlaufenen Zwischenzuständen ist.*

Von verschiedenen Wegen, auf denen der Übergang stattfinden kann, war bei einer Spiralfeder, die sich zusammenzieht, oder einem Gas, welches sich ausdehnt, keine Rede, wohl aber bei der Verschiebung eines Körpers, auf den die Schwerkraft wirkt. Deshalb wurde ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es es bei der Bestimmung der Arbeit gleichgültig ist, welche Zwischenlagen der Körper einnimmt und welche Zustände das Medium durchläuft. Was das letztere betrifft, so bemerken wir, daß man sich die Sache so vorstellen muß, daß jeder Lage des Körpers ein bestimmter Zustand des Mediums entspricht.

Ein anderer Punkt, der Beachtung verdient, ist die Wahl der Ebene V, bis in welche wir den Körper fallen ließen. Da die Wahl unbestimmt ist und man z. B. anstatt der Tischplatte, über der ein Versuch ausgeführt wird, auch den Fußboden des Zimmers oder eine noch tiefer liegende Ebene wählen kann, so besteht auch eine Unbestimmtheit in dem Werte der Energie U. Dies ist auch natürlich, da diese Größe die Arbeit ausdrückt, die das Medium bei der Bewegung bis zur festgesetzten Grenze verrichten kann, ebenso wie man auch bei einer Spiralfeder jedesmal die Arbeit ins Auge fassen könnte, die bei der Zusammenziehung bis auf eine bestimmte festgesetzte Länge, nicht bis zur vollständigen Entspannung verrichtet wird.

Man könnte die Ebene V selbst so wählen, daß der Körper unter sie kommen kann. In diesem Falle müßte man den Abstand des Körpers von der Ebene als eine negative Größe betrachten und unter der Energie der Lage das Produkt aus dem Gewicht und diesem negativen Abstand verstehen. Daß jetzt der Betrag des „Arbeitsvermögens" negativ ist, mag etwas seltsam klingen, aber es ist insofern nichts dagegen einzu-

werden, als wirklich, wenn der Körper unter der Ebene ist, die Schwerkraft bei der Verschiebung in diese Ebene eine negative Arbeit tun kann. Auch bleibt bei der letzteren Wahl der Ebene der Satz bestehen, daß bei jeder Verschiebung nach oben oder nach unten, die Arbeit der Schwerkraft gleich der (nach den Regeln der Algebra berechneten) Verminderung der Energie der Lage ist.

In den folgenden Paragraphen wird der Begriff der *Energie der Lage* oder, wie man sie auch nennt, der *potentiellen Energie* noch auf einige andere Fälle ausgedehnt werden; daß dabei viel von dem Vorhergehenden mit geringer Abänderung wiederholt werden könnte, wird man leicht einsehen. Jetzt weisen wir noch darauf hin, wie man im Anschluß an das soeben Gesagte im allgemeinen die Energie eines Systems von Körpern definieren kann. Man muß zu diesem Zwecke damit beginnen, unter allen Zuständen, die das System annehmen kann, einen bestimmten Zustand zu wählen, mit dem alle anderen verglichen werden sollen, den man den „Nullzustand" nennen und mit dem Buchstaben N bezeichnen kann. Die Energie des Systems in einem beliebigen Zustand A wird dann durch die Arbeit bestimmt, die es verrichtet, wenn es aus diesem Zustand in den Nullzustand übergeht. Ist ferner U diese Energie und ist U' die Energie in einem anderen Zustand A', dann ist $U - U'$ die Arbeit beim Übergang von A nach A'. Denn U ist die Arbeit des Systems bei *jedem* Übergang von A nach N, also auch, wenn es erst von A nach A' und dann von A' nach N übergeht. Die Arbeit beim Übergang von A nach A' wird also gefunden, wenn man die Größe U um die Arbeit vermindert, die das System noch beim Übergang von A' nach N verrichtet, d. h. um U'.

§ 127. **Energie der Lage bei einem Körper, der von einem festen Punkt angezogen wird.** Es sei O (Fig. 98) der feste Punkt, und die Größe der Anziehung hänge von der Entfernung von O ab. Man kann beweisen, daß die Arbeit bei einer Verschiebung z. B. von A nach B vollkommen bestimmt ist, sobald die Lage dieser Punkte gegeben ist; die Arbeit ist nämlich dieselbe für alle Wege zwischen A und B, von denen in der Figur zwei angegeben sind.

Man kann sogar beweisen, daß die Arbeit nur von den Entfernungen von O am Anfang und am Ende der Verschie-

bung abhängt. Geht der Körper einmal auf einem der Wege AB und ein andermal auf dem Weg $A'B'$, so ist in beiden Fällen die Arbeit der Anziehung dieselbe, wenn $OA = OA'$ und $OB = OB'$ ist.

Wir wählen nun eine beliebige Stelle C, am besten so nahe bei O gelegen, daß die Entfernung von O bei den betrachteten Bewegungen niemals kleiner als OC wird, und an der, wenn sie einmal gewählt ist, im Laufe eines Problems nichts geändert wird. *Unter der Energie der Lage, die der Körper in einer beliebigen Lage P hat, verstehen wir dann die Arbeit, welche die Anziehung bei einer Verschiebung von P nach C verrichten kann.*

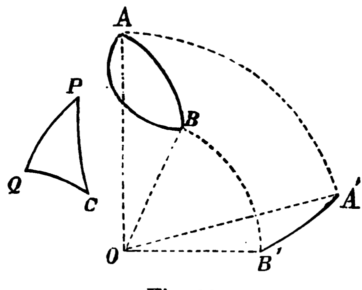


Fig. 98.

Da die Anziehung eine *positive* Arbeit bei *Annäherung* an O verrichtet, ist die Energie der Lage um so größer, je weiter der Körper von O entfernt ist; sie ist für alle Lagen gleich groß, die gleiche Entfernung von O haben.

Es sei U_p der Wert der potentiellen Energie des Körpers in P, U_q der Wert derselben in Q; dann ist $U_p - U_q$ die Arbeit der Anziehung bei einer Verschiebung von P nach Q. Man kann nämlich den Körper erst von P nach Q und dann nach C gehen lassen. Die Arbeit für den ganzen Weg PQC ist dann U_p, die für den Weg QC hat den Wert U_q und die Arbeit für den Weg PQ wird aus diesen Werten durch Subtraktion gefunden.

Fig. 99.

Bei abstoßenden Kräften gilt mit geringen Abänderungen alles hier Gesagte. Man wählt jedoch jetzt den Punkt am besten so, daß die Entfernung des Körpers bei seiner Bewegung niemals größer als OC wird.

Beweis des oben erwähnten Satzes. Der Körper bewege sich von A nach B (Fig. 99), und ein zweiter Körper, der von O nach demselben Gesetz angezogen wird, bewege sich auf der geraden Linie AO so, daß er in jedem Augenblick ebensoweit wie der erste von O entfernt ist.

CD sei ein Element von AB und es sei $Oc = OC$, $Od = OD$, $Ob = OB$. Man beweist leicht, daß die Arbeit für den Weg CD dieselbe ist wie für den Weg cd, und schließt hieraus, daß auch für den ganzen Weg AB die Arbeit ebenso groß ist wie für Ab. Die Arbeit für den letzteren Weg kann nur von den Entfernungen OA und $Ob = OB$ abhängen.

Bei dieser Betrachtung braucht die Linie AB nicht in einer Ebene zu liegen.

§ 128. **Anziehung oder Abstoßung durch ein beliebiges festes System. Kraftfeld. Kraftlinien und Niveauflächen.** Wir stellen uns jetzt vor, daß ein materieller Punkt nicht, wie in Fig. 98, durch einen einzelnen Punkt O, sondern durch eine beliebige Anzahl von Punkten angezogen wird, die zusammen ein System M (Fig. 100) bilden. Bei einer Verschiebung des Punktes findet man dann die Arbeit der gesamten auf ihn wirkenden Kraft (§ 126) dadurch, daß man die Arbeit jeder Anziehung besonders berechnet und die algebraische Summe bildet. Man kann daher, nachdem man eine gewisse Lage (entsprechend der Lage C in Fig. 98) angenommen hat, nach welcher man sich vorstellt, daß sich der Punkt hinbewegen *kann*, sagen, daß der Punkt in jeder Lage, die er wirklich einnimmt, eine Energie der Lage hat, die man findet, indem man die potentielle Energie nimmt, die er in bezug auf jeden der anziehenden Punkte besitzt, und dann addiert. Bei jeder Verschiebung ist die Arbeit der Kraft wieder gleich der Verminderung der Energie der Lage.

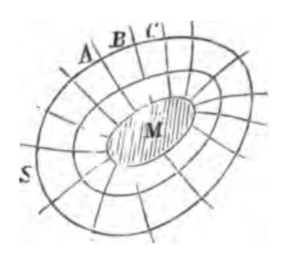


Fig. 100.

Ist für jede Lage, die ein materieller Punkt in einem gewissen Raum haben kann, die Kraft, welche auf ihn wirkt, gegeben, so kann man eine Linie ziehen, die überall die Richtung dieser Kraft hat. Man kann nämlich an einer beliebigen Stelle den beweglichen Punkt einen unendlich kleinen Weg in der Richtung der Kraft zurücklegen lassen, die im Ausgangspunkt auf ihn wirkte. Er erreicht dann eine Lage, in welcher eine etwas andere Kraft auf ihn wirkt als anfangs; man kann ihm nun eine zweite unendlich kleine Verschiebung in der Richtung *dieser* Kraft geben. Eine dritte Verschiebung kann in der Richtung der von neuem veränderten Kraft erfolgen; fährt man so fort, so bekommt man die betreffende Linie, die

eine *Kraftlinie* genannt wird. Der Raum selbst, in welchem derartige Linien gezogen werden können, heißt ein *Kraftfeld.*

In Fig. 100 stellen die verschiedenen nach M gezogenen Linien Kraftlinien vor.

Läßt man den beweglichen Punkt von A aus einen unendlich kleinen Weg senkrecht zur Kraftlinie durchlaufen, so verrichtet die Kraft keine Arbeit; die Energie der Lage bleibt also unverändert. Da man einer solchen Verschiebung senkrecht zur Kraftlinie verschiedene Richtungen geben kann, so existiert eine unendlich kleine Ebene, in welcher die potentielle Energie überall denselben Wert hat wie in A. Nachdem der bewegliche Punkt dieses Element durchlaufen hat, kann er immer in einer Richtung senkrecht zur Kraftlinie, auf der er sich gerade befindet, weitergehen. Es kann also, wie man sieht, eine Fläche angegeben werden, welche die Kraftlinien überall rechtwinklig schneidet und welche die Eigenschaft hat, daß in jedem ihrer Punkte die Energie der Lage denselben Wert hat.

In Fig. 100 sind zwei dieser Flächen, die die anziehende Masse umgeben, gezeichnet; auf der äußeren ist natürlich die potentielle Energie am größten.

Wäre eine dieser Flächen aus einem festen Stoff verfertigt und würde der bewegliche Punkt auf die Fläche gelegt, so würde er durch die Kraft, welche auf ihn wirkt, nicht verschoben werden. Daher nennt man diese Flächen *Gleichgewichtsflächen.* Sie werden auch *Niveauflächen* genannt, und zwar weil eine Flüssigkeit, die den betrachteten Kräften unterworfen ist, von einer solchen Fläche begrenzt sein kann.

In dem Raum um einen einzelnen anziehenden Punkt O sind diese Flächen Kugeln mit dem Mittelpunkt O; die Kraftlinien sind gerade Linien und nach O gerichtet.

Dasselbe gilt, wenn man von kleinen Abweichungen absieht, vom Kraftfeld der Schwerkraft, welches die Erde umgibt. Für einen Raum von geringen Dimensionen, wie z. B. ein Zimmer, in welchem wir unsere Versuche ausführen, kann man jedoch die Kraftlinien als parallele gerade Linien, die Niveauflächen als Ebenen senkrecht zu diesen Linien und die Kraft als überall gleichgroß betrachten.

Ein Kraftfeld von diesen Eigenschaften heißt *homogen.*

Mit geringen Abänderungen gilt das hier Gesagte auch dann, wenn abstoßende Kräfte wirken.

§ 129. **Energie der Lage bei einem System materieller Punkte, die sich einander anziehen oder abstoßen.** Wenn wir von der *Lage* eines solchen Systems sprechen, so wollen wir dabei an die Lage *aller* Punkte denken, so daß man die Lage eines jeden Punktes angeben muß, um die Lage des Systems zu bestimmen. Man kann nun wieder beweisen, daß die Arbeit der Kräfte nur von der Anfangslage und der Endlage abhängt.

Unter allen möglichen Lagen können wir eine auswählen, die wir mit dem Buchstaben N bezeichnen und mit welcher wir alle anderen vergleichen wollen. *Die Arbeit, welche die Kräfte verrichten können, wenn das System aus einer beliebigen Lage A in die Lage N übergeht, wird die potentielle Energie in der Lage A genannt.*

Ist nun A' eine zweite beliebige Lage, so hat das System auch in dieser eine bestimmte potentielle Energie, und *die Arbeit, welche die Kräfte beim Übergang von A nach A' verrichten, ist gleich der Verminderung der potentiellen Energie.*

Ziehen sich die materiellen Punkte an, so ist die Energie der Lage um so größer, je weiter die Punkte voneinander entfernt sind; sind die Kräfte abstoßend, so nimmt die potentielle Energie mit der Entfernung ab.

Im allgemeinen wird jeder Punkt des Systems von allen anderen oder wenigstens von einigen anderen angezogen oder abgestoßen, man braucht aber (§ 121) bei der Bestimmung der Arbeit die verschiedenen Kräfte, die auf ein und denselben Punkt wirken, nicht erst zusammenzusetzen. Man kann ferner von dem Umstand Gebrauch machen, daß zwei Punkte gleiche und entgegengesetzte Kräfte aufeinander ausüben; man kann bei der Bestimmung der Arbeit sofort jedes Paar derartiger Kräfte zusammenfassen. Wir wollen annehmen, daß während einer unendlich kleinen Zeit zwei Punkte die Verschiebungen AA' und BB' (Fig. 101) erleiden und daß die Anziehung, die für die Dauer dieser Zeit als unveränderlich betrachtet wird, den Wert F hat. Zieht man $A'C$ und $B'D$ senkrecht zu AB, so ist die Arbeit der Kraft, mit der B auf A wirkt, $F \times AC$, und diejenige der Kraft, mit der A auf B wirkt, $F \times BD$. Die Summe dieser Ausdrücke ist

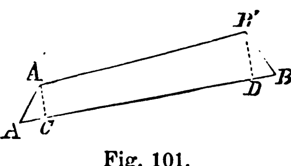


Fig. 101.

$$F \times (AC + BD) = F \times (AB - CD).$$

Wenn man unendlich kleine Verschiebungen betrachtet, so ist der Unterschied zwischen CD und $A'B'$ viel kleiner als AC und BD und kann daher vernachlässigt werden. Folglich ist die Arbeit

$$F \times (AB - A'B').$$

Die Arbeit während eines Zeitelementes hängt also nur von der Kraft ab und von der unendlich kleinen Änderung, die der Abstand der Punkte erleidet; sie würde ebenso groß sein, wenn der eine Punkt A stillstände und der andere sich ihm auf einer geraden Linie so näherte, daß vor und nach dem Zeitelement der Abstand derselbe wäre wie bei der wirklichen Bewegung.

Wenn man nun von unendlich kleinen zu endlichen Zeiten übergeht, so kann man weiter sagen, daß, wie sich auch die Punkte A und B verschieben, die Arbeit ihrer gegenseitigen Kräfte dieselbe ist wie bei einer geradlinigen Bewegung von B nach A hin oder von A fort, wenn dabei A festgehalten würde und der Abstand dieselbe Änderung erlitte wie bei der wirklichen Bewegung. Auch bei dieser letzteren kann also die Arbeit der zwischen A und B wirkenden Kräfte nur von dem Anfangswert und dem Endwert des Abstandes AB abhängen. Hieraus folgt unmittelbar, daß in dem ganzen System die Arbeit aller Kräfte nur von der Anfangslage und der Endlage des Systems abhängt.

Hierdurch wird die Definition, welche für die potentielle Energie gegeben wurde, *ermöglicht*. Die Arbeit A beim Übergang aus der Lage P in die Lage Q, in welchen Lagen die potentielle Energie die Werte U_p und U_q hat, wird dann gefunden, wenn man berücksichtigt, daß bei einer Bewegung zuerst von P nach Q und dann von Q in die Lage, mit der alle anderen verglichen werden, die Arbeit sowohl durch $A + U_q$ als auch durch U_p ausgedrückt werden kann. Hieraus folgt, daß $A = U_p - U_q$.

§ 130. **Weitere Beispiele von der Erhaltung der Energie.** Zur weiteren Erläuterung wird es gut sein, noch einige besondere Fälle näher zu betrachten.

a) Wir nehmen an, daß wir auf einen Körper von der Masse m und dem Gewicht P, der bereits eine Geschwindigkeit v vertikal nach oben hat, eine Kraft K, die größer als das Gewicht ist, in dieser Richtung ausüben. Der Körper bekommt dann eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, und wenn nach dem Steigen auf die Höhe h die Geschwindigkeit v' geworden ist, hat man, da die resultierende Kraft $K - P$ ist,

$$(K - P)h = \tfrac{1}{2}mv'^2 - \tfrac{1}{2}mv^2$$

oder

$$Kh = Ph + (\tfrac{1}{2}mv'^2 - \tfrac{1}{2}mv^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

In dieser Gleichung stellt Kh die Arbeit dar, die durch den Experimentator verrichtet wird und der eine Verminderung

seiner Energie entspricht. Man sieht, daß diese Arbeit der Zunahme Ph der Energie der Lage (mit anderen Worten der Energie des Mediums) vermehrt um die Zunahme der kinetischen Energie gleich ist.

Bleibt während des Steigens die Geschwindigkeit unverändert oder ist sie in jedem Augenblick so klein, daß von dem letzten Glied in (11) abgesehen werden darf, so kann man sagen, daß die für das Steigen erforderliche Arbeit gleich dem Produkt Ph ist. Es geht dies auch daraus hervor, daß in diesem Fall für jeden Augenblick $K = P$ gesetzt werden kann.

Ähnliche Bemerkungen gelten auch in anderen Fällen. Wenn wir z. B. sagen, daß die Kraft, welche erforderlich ist, um eine Spiralfeder auszudehnen (§ 115), in jedem Augenblick gleich der Spannung ist, so ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß die Ausdehnung sehr langsam erfolgt. Ist die Feder zuerst in Ruhe, so muß man streng genommen eine Kraft ausüben, die etwas größer als die Spannung ist. Die Arbeit, welche man verrichtet, übertrifft dann die Energie, welche die Feder infolge ihrer Verlängerung bekommt, um einen Betrag, welcher der kinetischen Energie entspricht, die man den Teilchen des Metalls erteilt.

b) Bei dem Versuch mit der Atwoodschen Fallmaschine ist, wie wir in § 94 sahen, die Beschleunigung

$$\frac{P' - P}{P' + P} g.$$

Dauert nun die Bewegung t Sekunden, so ist, wenn die Gewichte keine Anfangsgeschwindigkeit haben, die Endgeschwindigkeit

$$\frac{P' - P}{P' + P} g t,$$

folglich die kinetische Energie der beiden Gewichte

$$\tfrac{1}{2}(m + m')\left(\frac{P' - P}{P' + P}\right)^2 g^2 t^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Der zurückgelegte Weg ist

$$h = \tfrac{1}{2}\frac{P' - P}{P' + P} g t^2$$

und man darf also statt (12) schreiben

$$(P' - P) h.$$

Dieser Ausdruck gibt wirklich an, wie es der Fall sein muß, um wieviel die potentielle Energie des einen Gewichtes mehr abnimmt als die des anderen zunimmt.

c) Bei einem Körper, der sich frei unter der Einwirkung der Schwerkraft bewegt oder der auf einer unbeweglichen glatten Fläche fällt oder steigt, ist die Summe der kinetischen und potentiellen Energie konstant. Dasselbe gilt von einem Körper, der durch einen Faden von unveränderlicher Länge mit einem festen Punkt verbunden ist; die Energie des Fadens ändert sich nämlich nicht. *Bei einem Pendel hat man es mit einem fortwährenden Übergang von potentieller Energie in kinetische Energie und umgekehrt zu tun.*

Dasselbe gilt von einem Planeten, der sich in einer Ellipse um die Sonne bewegt. Jedesmal, wenn derjenige Punkt der Bahn erreicht ist, welcher der Sonne am nächsten liegt, hat die potentielle Energie den kleinsten und die kinetische Energie den größten Wert.

d) Wir lassen ein einfaches Pendel in einer gewissen Höhe los und bringen einen Stab senkrecht zur Schwingungsebene in eine solche Lage, daß der Faden in dem Augenblick, in welchem er die Gleichgewichtslage erreicht, auf den Stab trifft. Ist der Stab unbeweglich, so steigt die Kugel des Pendels in einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der Punkt ist, in welchem der Faden den Stab trifft, auf die ursprüngliche Höhe. Dies muß der Fall sein, da das Pendel keine Arbeit auf den Stab tut und also dieselbe Energie behält.

Weicht dagegen der Stab, wenn er vom Faden getroffen wird, zurück, so sieht man die Kugel weniger hoch steigen. Umgekehrt steigt sie höher als soeben, wenn man den Stab gegen die Bewegung des Fadens hin verschiebt. Dann tut man Arbeit auf das Pendel und vergrößert also seine Energie.

e) Werden die Teilchen eines elastischen Körpers aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht und dann losgelassen, so kehren sie mit beschleunigter Bewegung zurück; sie überschreiten infolgedessen die ursprünglichen Lagen, bis durch die jetzt in entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte die Bewegungsrichtung umgekehrt wird. Der Körper führt also Schwingungen aus. *Dabei bleibt der Betrag der Energie unverändert, aber während der Körper, wenn er durch die Gleichgewichts-*

lage geht, kinetische Energie hat, hat er in den äußersten Lagen Energie, die der Deformation entspricht.

Später werden wir einige dieser schwingenden Bewegungen ausführlicher behandeln; jetzt heben wir nur hervor, wie in einem Uhrwerk die sogenannte Unruhe durch eine Spiralfeder eine hin- und hergehende Bewegung bekommt.

Ein kleines Rädchen *a* (Fig. 102) kann sich um die Achse *b* drehen; an diesem Rädchen ist das innere Ende der Feder befestigt, während das äußere Ende in *c* befestigt ist. Wird das Rädchen durch Drehung um einen gewissen Winkel aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, so führt es unter dem Einfluß der Elastizität der Feder drehende Schwingungen aus.

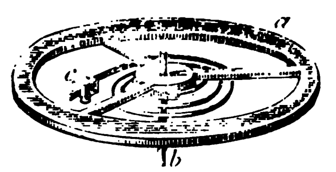


Fig. 102.

f) Wenn zwei gleiche vollkommen elastische Kugeln mit gleichen und entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten zusammenstoßen, bleibt während der Berührung der Berührungspunkt an derselben Stelle. Die eine Kugel tut keine Arbeit auf die andere, und jede Kugel behält also die Energie, welche sie hatte. Nur wird vorübergehend, solange eine Deformation besteht, die ursprüngliche kinetische Energie durch die Energie der Deformation ersetzt.

§ 131. **Wärme als eine Art von Energie.** Die Ausdehnung eines Gases, bei der eine gewisse Arbeit verrichtet wird, kann dadurch hervorgebracht werden, daß wir das Gas mit einem erwärmten Körper in Berührung bringen; wir können dann in dem Zustand dieses letzteren den Grund der Arbeitsverrichtung erblicken. Anderseits besteht oft die Zustandsänderung, welche ein Körper erleidet, wenn Arbeit auf ihn getan wird, in einer Erwärmung. Es wurde bereits erwähnt, daß dies der Fall ist, wenn wir ein Gas zusammendrücken; ein anderes Beispiel hat man in der bekannten Erscheinung, daß zwei Körper, die man aneinander reibt, warm werden. Endlich kommt es oft vor, daß ein Körper, der eine der bis jetzt besprochenen Arten von Energie besitzt, diese bei der einen oder anderen Erscheinung verliert, aber dann zugleich warm wird. Man beobachtet dies jedesmal, wenn zwei zu-

sammenstoßende Körper, weil sie nicht „vollkommen elastisch“ (§ 117) sind, nach dem Stoß geringere Geschwindigkeiten haben als die früher (§ 118) berechneten, z. B. wenn man einen Hammer wiederholt auf ein Stück Metall fallen läßt, oder wenn eine Kugel mit großer Geschwindigkeit gegen eine Metallplatte geschossen wird.

So gibt es eine Menge Erscheinungen, die uns bereits bei oberflächlicher Betrachtung auf die Idee bringen, *daß ein Körper eine um so größere Energie besitzt, je wärmer er ist,* und die es wahrscheinlich machen, daß diese Auffassung dazu führen kann, das Gesetz von der Erhaltung der Energie als allgemeingültig zu erkennen. Auch die Tatsache, daß ein hinreichend erhitzter Körper Licht ausstrahlt, bestärkt uns in dieser Ansicht. Die Untersuchung der Lichterscheinungen hat nämlich gelehrt, daß dabei eine schwingende Bewegung von dem Körper ausgeht, und es liegt nahe, sich vorzustellen, daß diese durch Schwingungen unsichtbarer Teilchen in dem Körper selbst erregt werden, daß also in dem Körper die kinetische Energie dieser Schwingungen anwesend ist.

Die Theorie, *daß die Wärme eine Form von Energie ist,* gewöhnlich die „mechanische“ Wärmetheorie genannt, wurde bereits vor langer Zeit von einigen Physikern aufgestellt. Die Ansicht, daß die Wärme ein *Stoff* sei, ist jedoch erst im 19. Jahrhundert endgültig von der neuen Auffassung verdrängt worden, und zwar, nachdem man bewiesen hatte, daß das Verschwinden oder das Entstehen von mechanischer Energie, wie wir die bis jetzt besprochene Energie nennen können, mit der Entwickelung oder der Vernichtung einer *proportionalen* Wärmemenge verbunden ist. Die Versuche, durch welche dies nachgewiesen worden ist, werden wir alsbald kennen lernen.

§ 132. **Temperatur. Thermometer.** *Die Beobachtung lehrt, daß ein Körper in der Regel ein um so größeres Volum einnimmt, je wärmer er ist.* Ein *Thermometer* ist ein Körper, bei dem die durch die Wärme bewirkten kleinen Volumänderungen beobachtet werden können. Wir wollen hier das gewöhnliche Quecksilberthermometer als bekannt voraussetzen und annehmen, daß an demselben die Skala nach *Celsius* angebracht ist, d. h. daß die Zahlen 0 und 100 an diejenigen Punkte gesetzt sind, die das Quecksilber erreicht, wenn das Thermometer in schmelzendes

Eis oder in den Dampf von Wasser eingetaucht wird, welches unter dem normalen Luftdruck (760 mm Quecksilber) siedet. Nötigenfalls kann man, wenn man den Thermometerstand angeben will, durch den Buchstaben *C* hinter der Anzahl der Grade daran erinnern, daß die Skala von *Celsius* benutzt wird.

Der Stand des Quecksilbers in der Thermometerröhre gibt den *Wärmegrad* oder die *Temperatur* des Thermometers selbst an, und in derselben Weise würde man bei jedem anderen Körper die Temperatur nach dem Volum beurteilen können, Man kann jedoch auch die Temperaturen verschiedener Körper miteinander vergleichen. Wenn nämlich zwei Körper *A* und *B* miteinander in Berührung gebracht werden, so sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Zuweilen wird sich *A* zusammenziehen und *B* ausdehnen, so daß es keinem Zweifel unterliegen kann, daß *A* Wärme an *B* abgegeben hat; wir sagen dann, daß *A* eine höhere Temperatur hatte als *B*. Auch das Entgegengesetzte ist möglich. Und drittens kann es vorkommen, daß die Körper nach der Berührung in demselben Zustand bleiben, in dem sie sich befanden, dann sagt man, daß sie dieselbe Temperatur hatten.

Ist eine beliebige Anzahl von Körpern gegeben, so kann man diese zu je zweien in der angegebenen Weise untersuchen. So kommt man dazu, sie alle nach ihrer Temperatur in eine Reihe anzuordnen, so daß jeder Körper, wenn er mit einem anderen, der in der Reihe tiefer steht, in Berührung gebracht wird, an diesen Wärme abgibt. Es kann der Fall eintreten, daß eine gewisse Gruppe von Körpern die Eigentümlichkeit zeigt, daß zwei von ihnen, miteinander in Berührung gebracht, keine Wärme austauschen; dann müssen alle Körper dieser Gruppe dieselbe Stelle in der Reihe einnehmen.

Um nun die Temperatur aller Körper nach einer festen Skala anzugeben, genügt es, jeden derselben mit dem Quecksilberthermometer in Berührung zu bringen. Sobald dieses einen festen Stand angenommen hat, ist seine Temperatur dieselbe wie die des Körpers. Streng genommen muß man, wenn der Körper nicht sehr groß ist, beachten, daß seine Temperatur gerade durch die Berührung mit dem Thermometer etwas verändert sein kann.

Daß die Angaben verschiedener Thermometer unter den-

selben Umständen ungleich sein können, ist von untergeordneter Bedeutung und soll in diesem Kapitel in der Regel außer Betracht gelassen werden.

§ 133. **Wärmemengen. Wärmeeinheit.** *Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Temperatur eines Körpers eine Größe ist, die bestimmt, ob er, mit einem anderen zusammengebracht, an diesen Wärme abgibt oder umgekehrt Wärme von ihm empfängt.* Eine andere Frage ist, *wieviel* Wärme er verliert oder aufnimmt. Es liegt nämlich nahe, auch ohne daß man über das Wesen der Wärme irgend eine Annahme macht, von großen und kleinen Wärmemengen zu sprechen. Es ist ohne weiteres klar, *daß man einem Körper um so mehr Wärme zuführen muß, je mehr man die Temperatur erhöhen will, und daß die Wärmemengen, welche verschiedene Mengen desselben Stoffes für dieselbe Temperaturerhöhung erfordern, den Massen proportional sind.*

Als Wärmeeinheit wählen wir diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um ein Gramm Wasser von 15° auf 16° zu erwärmen. Wir nennen diese Wärmemenge eine *Kalorie.* Zuweilen wird eine Einheit benutzt, die das Tausendfache derselben ist (große Kalorie).

§ 134. **Wärmemengen, die für verschiedene Temperaturerhöhungen einer Menge Wasser erforderlich sind.** Wir wollen uns nun zunächst vorstellen, daß ein Körper, dem eine gewisse Menge Wärme zugeführt werden muß, damit er eine bestimmte Temperaturerhöhung erfährt, eine ebenso große Wärmemenge abgeben muß, wenn er auf die ursprüngliche Temperatur zurückkehren soll, und daß bei der Berührung zweier Körper von verschiedener Temperatur die gesamte Wärmemenge unverändert bleibt, d. h. daß der eine Körper ebensoviel Wärme empfängt als der andere verliert. Wir wollen ferner annehmen, daß m_1 Gramm Wasser von der Temperatur $t_1{}^0$ und m_2 Gramm von der Temperatur $t_2{}^0$ miteinander vermischt werden; die Endtemperatur des Gemisches sei t, und es sei $t_1 > t_2$.

Wir können durch w_{t, t_1} diejenige Wärmemenge bezeichnen, welche erforderlich ist, um 1 g Wasser von t^0 auf $t_1{}^0$ zu erwärmen, also auch die Wärmemenge, welche 1 g abgeben muß, wenn die Temperatur von $t_1{}^0$ auf t^0 sinken soll. Ebenso können wir die Wärmemenge, die 1 g zur Erwärmung von $t_2{}^0$ auf t^0

erfordert, mit $w_{t_2, t}$ bezeichnen. Wenn man nun ausdrückt, daß das warme Wasser ebensoviel Wärme verloren als das kalte gewonnen hat, so erhält man

$$m_1 w_{t, t_1} = m_2 w_{t_2, t},$$

oder

$$w_{t_2, t} : w_{t, t_1} = m_1 : m_2.$$

Man kann daher aus dem Versuch das Verhältnis der Wärmemengen ableiten, die 1 g Wasser für verschiedene Temperaturerhöhungen erfordert.

Versuche, die nach diesem Prinzip ausgeführt worden sind, und auch andere Untersuchungen haben gelehrt, daß einem Gramm Wasser für aufeinander folgende gleiche Temperaturerhöhungen nahezu gleich große Wärmemengen zugeführt werden müssen. Dasselbe gilt auch für andere Stoffe. Wären die für die genannten gleichen Temperaturerhöhungen erforderlichen Wärmemengen genau gleich, so würde in dem angeführten Fale das warme Wasser $m_1 (t_1 - t)$ Kalorien abgegeben und das kalte $m_2 (t - t_2)$ Kalorien aufgenommen haben. Setzt man die beiden Ausdrücke gleich, so findet man für die Endtemperatur

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2},$$

und wenn $m_1 = m_2$ ist

$$t = \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2).$$

Die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Temperatur von 1 g Wasser um 1° zu erhöhen, ist in Wirklichkeit von der Anfangstemperatur abhängig. Sie ist ein Minimum zwischen 20° und 30°. Nach den neuesten Untersuchungen sind, wenn die Kalorie wie oben definiert wird, für die Erwärmung von 0° auf 1° ungefähr 1,01 cal. und für die Erwärmung von 99° auf 100° ungefähr 1,04 cal. erforderlich.

In der Folge werden wir sowohl für Wasser als auch für andere Körper annehmen, daß für gleiche aufeinander folgende Temperaturerhöhungen jedesmal gleich viel Wärme zugeführt werden muß.

§ 135. **Kalorimeter.** So nennt man ein Gefäß mit einer abgewogenen Menge Wasser, in welches ein empfindliches Thermometer (in zehntel oder fünfzigstel Grad geteilt) eingetaucht ist, und welches dazu dient, Wärmemengen zu messen. Man muß zu diesem Zwecke die Wärme dem Wasser mitteilen und die Temperaturerhöhung ermitteln. Auf diese

Weise kann z. B. die Wärme gemessen werden, die durch einen elektrischen Strom in einem Metalldraht entwickelt wird, der in das Wasser des Kalorimeters eingetaucht ist, die Wärme, welche durch mechanische Arbeit erzeugt wird, oder, wenn in das Wasser eine spiralförmig gewundene Röhre eingetaucht ist, durch die irgend ein Dampf geleitet wird, die Wärme, welche bei der Verdichtung dieses Dampfes zu einer Flüssigkeit entsteht.

Man kann auch Versuche ausführen, bei denen dem Kalorimeter Wärme entzogen wird; der Betrag derselben wird aus der Wassermenge und der Temperaturerniedrigung derselben gefunden.

Als Beispiel eines solchen Versuches kann die Bestimmung der Wärmemenge dienen, welche erforderlich ist, um die Masseneinheit Eis zu schmelzen.

§ 136. **Schmelzwärme des Eises.** Man denke sich, in einem Gefäß befinde sich eine gewisse Menge Eis, dessen Temperatur unter 0^0 liegt. Wird diesem Gefäß Wärme zugeführt und gleichmäßig über die ganze Masse verteilt, so wird kein Eis schmelzen, bevor die Temperatur auf 0^0 gestiegen ist. Sobald dies geschehen ist, beginnt bei fortdauernder Wärmezufuhr das Schmelzen, *aber die Temperatur bleibt 0^0, bis alles Eis geschmolzen ist.*

Ähnliche Erscheinungen werden bei allen schmelzenden Körpern beobachtet. *Die Wärmemenge, welche man einem Gramm eines festen Körpers zuführen muß, um den Körper, nachdem er bereits bis auf den Schmelzpunkt erhitzt ist, in eine Flüssigkeit von derselben Temperatur zu verwandeln, wird die Schmelzwärme des Körpers genannt.*

Um diese Wärmemenge für Eis zu ermitteln, bringt man in das Kalorimeter ein Stück trockenes Eis von 0^0, welches klein genug ist, um vollständig in Wasser überzugehen. Aus der Endtemperatur des Kalorimeters, dem Gewicht des Wassers und dem Gewicht des Eises kann man die Schmelzwärme ableiten.

Man hat gefunden, daß sie gleich 79,2 Kalorien ist.

Sobald man diese Zahl kennt, kann man Wärmemengen auch dadurch messen, daß man sie einer Eismasse von 0^0 mitteilt und ermittelt, wieviel Eis dadurch geschmolzen wird (Eiskalorimeter). Wir wollen jedoch annehmen, daß das im vorigen Paragraphen genannte Kalorimeter gebraucht wird.

§ 137. **Spezifische Wärme.** Wir bringen eine abgewogene Menge eines festen oder flüssigen Stoffes, der auf eine Temperatur t_1 erwärmt ist, die über der Anfangstemperatur t_2 des Kalorimeters liegt, in das letztere und lesen den Stand t des Thermometers in dem Augenblicke ab, in welchem der Wärmeaustausch zwischen dem Wasser und dem zu untersuchenden Stoffe aufgehört hat. Wiegt das Wasser im Kalorimeter m_2 Gramm, so hat dieses, da seine Temperatur von t_2 auf t gestiegen ist, $m_2(t-t_2)$ Kalorien aufgenommen. Ebensoviel Wärme ist daher von dem untersuchten Körper, dessen Gewicht m_1 Gramm sein möge, abgegeben worden, während die Temperatur von t_1 auf t gesunken ist; ebensoviel Wärme würde man auch dem Körper zuführen müssen, um ihn umgekehrt von t^0 auf $t_1{}^0$ zu erwärmen. Man schließt hieraus, daß

$$c = \frac{m_2(t-t_2)}{m_1(t_1-t)} \text{ Kalorien}$$

erforderlich sind, damit die Temperatur eines Gramms des untersuchten Stoffes sich um 1° erhöht. Diese Zahl c wird die *spezifische Wärme* des Körpers genannt.

Man kann auch sagen, daß die spezifische Wärme eines Stoffes das Verhältnis ist zwischen der Wärmemenge, die erforderlich ist, um ein gewisses Gewicht dieses Stoffes zu erwärmen, und derjenigen, welche erfordert wird, um ein gleiches Gewicht Wasser um ebensoviel in der Temperatur zu erhöhen.

Die spezifische Wärme ist für alle untersuchten festen und flüssigen Körper kleiner als die Einheit. Eine gewisse Menge Quecksilber z. B. erfordert für eine bestimmte Temperaturerhöhung ungefähr 30 mal weniger Wärme als ein gleiches Gewicht Wasser.

Anstatt der Bezeichnung „spezifische Wärme“ gebraucht man zuweilen das Wort *Wärmekapazität.* Dies Wort wird auch gebraucht, um die Wärmemenge zu bezeichnen, die ein Körper, auch wenn er nicht gerade 1 g wiegt und selbst wenn er nicht aus einem homogenen Stoff besteht, aufnehmen muß, damit sich seine Temperatur um 1° erhöht. Ist der Körper homogen und wiegt er m Gramm, und ist die spezifisische Wärme des Stoffes, aus dem er besteht, c, so ist die Wärmekapazität mc. Besteht der Körper aus m_1 Gramm eines Stoffes, der die spezifische Wärme

c_1 hat, m_2 Gramm eines Stoffes mit der spezifischen Wärme c_2 usw., so ist die Wärmekapazität $m_1 c_1 + m_2 c_2 +$ usw.

Dieser Ausdruck gibt auch die Menge Wasser an, die für dieselbe Temperaturerhöhung ebensoviel Wärme erfordert wie der Körper, also die Menge Wasser, mit welcher dieser letztere in dieser Hinsicht übereinstimmt. Man nennt daher den Ausdruck auch den *Wasserwert* des Körpers.

Bei jedem Versuch mit dem Kalorimeter ändert sich nicht nur die Temperatur des Wassers, sondern in demselben Grade die des Gefäßes, in welchem es sich befindet und das in der Regel aus Messingblech oder Platinblech besteht, ebenso die des Thermometers und des Rührers, den man nötig hat, um dafür zu sorgen, daß überall in der Wassermenge dieselbe Temperatur herrscht.

Man kann diesen Umstand in Rechnung bringen, wenn man den Wasserwert des ganzen Kalorimeters kennt; man ersetzt nämlich bei der Berechnung der Versuche das Gewicht des Wassers durch diesen Wasserwert.

Der Wasserwert kann berechnet werden, wenn man von den verschiedenen Körpern, die in Betracht kommen, das Gewicht und die spezifische Wärme kennt; er kann auch experimentell bestimmt werden. Der Leser wird leicht ein Verfahren ersinnen können.

Ebenso ist leicht einzusehen, daß man in dem Kalorimeter, wenn es wünschenswert ist, eine andere Flüssigkeit als Wasser benutzen kann, vorausgesetzt, daß die spezifische Wärme derselben bekannt ist. Wir werden später Fälle kennen lernen, in denen ein Gas als kalorimetrischer Körper benutzt wird.

§ 138. **Wärmeaustausch zwischen dem Kalorimeter und der Umgebung. Gesetz der Abkühlung.** *Eine wichtige Fehlerquelle bei kalorimetrischen Bestimmungen liegt in dem Umstand, daß ein Körper an die ihn umgebenden Körper Wärme abgibt oder von ihnen aufnimmt, sobald die Temperatur des ersteren von der Temperatur der letzteren verschieden ist.* Die Art und Weise, wie die Wärme von warmen auf kalte Körper übergeht, wird alsbald besprochen werden; jetzt erwähnen wir nur, *daß die Wärmemenge, die unter gleichen Umständen in der Zeiteinheit übergeht, dem Temperaturunterschied proportional ist, solange dieser letztere hinreichend klein ist* (Gesetz von Newton). Wie groß die

Wärmemenge ist, die ein Körper während einer gewissen Zeit an die Umgebung abgibt oder von ihr aufnimmt, kann experimentell bestimmt werden, wenn in dem Körper keine Wirkungen stattfinden, durch die Wärme entsteht oder verschwindet; für diesen Zweck genügt es, die Temperatur des Körpers von Zeit zu Zeit abzulesen.

Wenn man dies bei einem Kalorimeter vor oder nach Ausführung des Versuches tut, für den es bestimmt ist, so kann man ermitteln, wieviel Kalorien es, z. B. während einer Minute, an die Umgebung abgibt, wenn seine Temperatur bald diese, bald jene Höhe über der Temperatur der letzteren hat. Von diesen Ergebnissen kann man Gebrauch machen, um sich ein Urteil über die Wärmemenge zu bilden, die der Apparat während des Versuches selbst verloren oder aufgenommen hat; dabei ist es natürlich nötig, auf die Zeit zu achten, welche die Ausführung des Versuches beansprucht hat.

Obgleich der Einfluß der Umgebung in dieser Weise in Rechnung gebracht werden kann, ist es für die Genauigkeit der Resultate von Wichtigkeit, daß die Korrektion, in der ein ziemlich großer relativer Fehler enthalten sein kann, geringfügig ist; man muß deshalb den Wärmeaustausch mit der Umgebung soviel als möglich verhindern. Außerdem ist zu bemerken, daß die Erscheinung nur bei kleinen Temperaturunterschieden einen einfachen Verlauf hat; man arbeite daher niemals mit Unterschieden von einer großen Anzahl von Graden.

Ein Kunstgriff, um die Korrektion klein zu machen, besteht darin, daß man die Temperatur des Kalorimeters während der einen Hälfte des Versuches niedriger und während der anderen Hälfte höher als die Temperatur der Umgebung sein läßt. Ist der Temperaturunterschied dabei während der beiden Hälften gleich groß, so kann die Korrektion unterbleiben.

§ 139. **Mechanisches Äquivalent der Wärmeeinheit.** So *nennt man die Menge mechanischer Energie, welche entsteht, wenn eine Wärmeeinheit verschwindet, oder die umgekehrt verbraucht werden muß, um eine Kalorie zu erzeugen.* Die am Schlusse von § 13[illegible] erwähnten Versuche, mit denen wir uns jetzt bekannt machen können, *haben gezeigt, daß diese Menge unter allen Umstände[n]*

gleich groß ist. Dem englischen Physiker Joule verdanken wir eine jahrelange Reihe von Untersuchungen über das mechanische Wärmeäquivalent (1840—1850).

Wir wollen eine der von ihm befolgten Methoden näher besprechen.

In einem Gefäß aus Messingblech, welches als Kalorimeter diente, befand sich eine vertikale Achse von Messing, an welcher 16 Schaufeln in acht verschiedenen vertikalen Ebenen angebracht waren. Die Achse war durch den Deckel des Kalorimeters verlängert; das obere Ende bestand aus einem dickeren Zylinder, um den zwei Schnüre gewickelt waren, die durch zwei fallende Gewichte in einer Weise, auf die wir nicht im einzelnen einzugehen brauchen, abgewickelt wurden. Die Achse und mit dieser das ganze Schaufelrad bekam auf diese Weise eine drehende Bewegung, die kurze Zeit nach dem Loslassen der Gewichte infolge der Reibung im Wasser eine konstante Geschwindigkeit annahm. Um diesen Widerstand zu vergrößern, waren in dem Kalorimeter einige feste Scheidewände mit Einschnitten angebracht, durch welche sich die Schaufeln nur mit geringem Spielraum hindurchbewegen konnten. Der Zweck der Untersuchung war, den Verlust an potentieller Energie, den die Gewichte erleiden, mit der Wärmeentwickelung im Kalorimeter zu vergleichen.

In das Wasser war ein empfindliches Thermometer mit einer willkürlichen Skalenteilung eingetaucht. Die Vergleichung desselben mit einem Normalthermometer mit der Fahrenheitschen Skala (Gefrierpunkt 32°, Siedepunkt 212°) lehrte, daß 12,95 Skalenteile mit 1° F. übereinstimmten. Da bei der Ablesung Zwanzigstel von Skalenteilen geschätzt wurden, konnte man bis auf $^1/_{200}$° F. beobachten.

Ließ man die Gewichte *einmal* von der verfügbaren Höhe herabfallen, so entstand nur eine geringe Temperaturerhöhung; Joule ließ daher bei jedem Versuch die Gewichte 20mal fallen. Die Verbindung des Zylinders, um den die Schnüre gewickelt waren, mit der Achse des Schaufelrades konnte nämlich aufgehoben werden; dadurch, daß man ihn dann vermittelst einer Kurbel in Drehung versetzte, konnte man die Schnüre aufwickeln, ohne daß die Schaufeln mitbewegt wurden.

Joule traf alle Vorsichtsmaßregeln, um den Wärme-

austausch zwischen dem Kalorimeter und der Umgebung so klein wie möglich zumachen. Der ganze Apparat war in einem Keller aufgestellt, in welchem sich die Temperatur der Luft wenig änderte; das Kalorimeter hatte mit dem hölzernen Tisch, auf dem es stand, wenig Berührungspunkte, und die Achse bestand aus zwei durch ein Stück Holz verbundenen Teilen, so daß die Wärmeleitung zwischen diesen Teilen sehr gering war. Endlich war das Kalorimeter durch einen großen hölzernen Schirm gegen die Wärmestrahlung des Körpers des Beobachters geschützt.

Trotz all dieser Vorsichtsmaßregeln war es nötig, den Einfluß der Wärmestrahlung und Wärmeleitung zu bestimmen. Zu diesem Zwecke überließ Joule vor oder nach jedem Versuch, der, wie gesagt, aus einem zwanzigmal wiederholten Fallen der Gewichte bestand, das Kalorimeter sich selbst und bestimmte die Veränderung, welche seine Temperatur in einer ebenso großen Zeit erlitt als diejenige, welche der Versuch selbst erforderte, eine Zeit, die 35 Minuten betrug.

Joule führte 40 Versuche aus. Aus seinen Resultaten kann man ableiten, daß die Wärmemenge, welche man einem Gramm Wasser zuführen muß, um seine Temperatur von 15° auf 16° C. zu erhöhen, einer Energie von $415{,}8 \times 10^5$ Erg entspricht.

§ 140. **Andere Versuche von Joule.** Ähnliche Versuche wie die eben beschriebenen wurden mit einem eisernen Gefäß ausgeführt, welches mit Quecksilber gefüllt war und in welchem ein eisernes Schaufelrad gedreht wurde. Eine erste Reihe dieser Versuche ergibt anstatt der genannten Zahl $415{,}9 \times 10^5$, eine zweite Reihe $417{,}3 \times 10^5$.

Endlich wurde noch von der Reibung von Eisen auf Eisen in einem mit Quecksilber gefüllten Kalorimeter Gebrauch gemacht. Hierdurch wurden bei verschiedenen Versuchen Resultate erzielt, die in unseren Einheiten $417{,}6 \times 10^5$ und $416{,}5 \times 10^5$ betragen.

Aus der Übereinstimmung der auf verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate kann man den Schluß ziehen, *daß, wie man die Versuche auch anordnet, für jede Einheit mechanischer Energie, welche verschwindet, immer gleich viel Wärme zum Vorschein kommt.* Man kann also in der Tat ganz gut sagen, daß mechanische Energie in Wärme *umgesetzt* wird.

Diese Schlußfolgerung wurde noch durch andere Versuche Joules bestätigt, die zwar eine geringere Genauigkeit zu-

ließen, aber doch erwähnt zu werden verdienen, weil sie nach ganz anderen Methoden ausgeführt wurden. Aus den Versuchen über die Temperaturerhöhung beim Zusammendrücken von Luft findet man $435,4 \times 10^5$ und aus den Versuchen über die Wärmeentwickelung beim Strömen von Wasser durch enge Röhren $414,4 \times 10^5$.

§ 141. **Apparat von Puluj.** Dieser einfache Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes besteht aus zwei kleinen eisernen Bechern von der Form abgestumpfter Kegel, von denen der eine in den anderen paßt. Der äußere Kegel A ist in vertikaler Stellung auf der Spitze einer vertikalen Achse befestigt und kann also schnell um seine geometrische Achse gedreht werden. Er würde dabei durch die Reibung den inneren Kegels B mitreissen, aber dieser wird durch eine Kraft, welche man messen kann, festgehalten. An seinem oberen Ende, welches etwas über A hervorragt, ist nämlich in der Verlängerung eines Radius ein horizontaler hölzerner Arm befestigt; am Ende desselben ist eine Schnur befestigt, welche in horizontaler Richtung, und zwar senkrecht zum zum Arm, nach einer Rolle läuft, um die sie herumgeschlagen ist, so daß das freie Ende nach unten hängt. Dieses Ende trägt ein Gewicht P, welches so reguliert wird, daß B beim Drehen von A so gut wie möglich in Ruhe bleibt. Der innere Kegel enthält eine gewisse Menge Quecksilber und in dieses taucht das Gefäß eines Thermometers ein. Da man schnell und beliebig lange drehen kann, ist es leicht, eine Temperaturerhöhung von einigen Graden zu bekommen. (Bei den Versuchen von Joule betrüg die Temperaturerhöhung nicht viel mehr als einen halben Grad F.)

Der äußere Kegel ist von der Achse, auf der er sitzt, durch eine Substanz getrennt, welche die Wärme langsam hinwegführt, aber es ist doch nötig, durch geeignete Beobachtungen zu ermitteln, wieviel Wärme an die Umgebung abgegeben wird.

Aus der in dieser Hinsicht korrigierten Temperaturerhöhung, in Verbindung mit dem Wasserwert der eisernen Kegel und des Quecksilbers findet man die Menge der entwickelten Wärme. Was die verrichtete Arbeit betrifft, so ist zu bemerken, daß man nicht die Arbeit bestimmt, welche wirk-

lich im ganzen verrichtet worden ist. Dies würde auch nicht zweckmäßig sein, da diese Arbeit dazu dient, nicht nur die Reibung zwischen den Kegeln, sondern auch die an den Stellen, wo die vertikale Achse unterstützt ist, zu überwinden. Wieviel Wärme hier entwickelt wird, kann nicht gemessen werden. Was man in Wirklichkeit aus den Daten des Versuches ableiten kann, ist die Arbeit, welche erforderlich sein würde, um den äußeren Kegel zu bewegen, wenn allein die Reibung zwischen den Kegeln zu überwinden wäre; dies ist gerade die Arbeit, welche der gemessenen Wärmemenge entspricht.

Wenn auf einen Körper, der sich um eine Achse dreht, eine Kraft wirkt, die senkrecht auf der Ebene steht, in welcher ihr Angriffspunkt und die Achse liegt, wollen wir den Abstand des Angriffspunktes von der Achse den *Hebelarm* nennen, an welchem die Kraft wirkt. Ferner wollen wir derartige Kräfte, welche auf einen der beiden Kegel wirken, positiv oder negativ nennen, je nachdem sie eine Drehung in der Richtung der Bewegung des äußeren Kegels oder in der entgegengesetzten Richtung hervorzubringen streben.

Auf den inneren Kegel wirken nun infolge der Reibung eine große Zahl von Kräften in der positiven Richtung, aber diese werden im Gleichgewicht gehalten durch die Spannung der Schnur, die in negativer Richtung an einem Hebelarm wirkt, den man leicht messen kann und dessen Länge wir mit a bezeichnen wollen. Daraus folgt, daß alle aus der Reibung entspringenden Kräfte einer Kraft P, die in positiver Richtung am Hebelarm a wirkt, äquivalent sind. Nach dem Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung müssen nun die Kräfte, welche der innere Kegel auf den äußeren ausübt, einer negativen Kraft P, die an demselben Hebelarm wirkt, äquivalent sein. Wenn also der innere Kegel entfernt, der hölzerne Arm aber an dem äußeren befestigt würde und wenn während des Drehens auf das Ende des Armes in senkrechter und zwar negativer Richtung ein Widerstand P wirkte, so würde der äußere Kegel ebenso stark zurückgehalten werden, wie jetzt durch den inneren Kegel. Um diesen Widerstand zu überwinden, würde eine positive Kraft P an demselben Ende hinreichend sein, mit anderen Worten, wenn nur die Reibung zwischen den Kegeln im Spiel wäre, so würde der äußere

durch eine positive Kraft P am Hebelarm a bewegt werden können. Bei *einer* Umdrehung würde der Angriffspunkt der Kraft den Weg $2\pi a$ durchlaufen, und die Größe der Arbeit würde also $2\pi a P$ sein. Zählt man nun noch die Anzahl der Umdrehungen n, so ist die gesuchte Arkeit $2\pi n a P$.

§ 142. **Versuche von Rowland.** Nach demselben Prinzip wie Puluj hat der amerikanische Physiker Rowland eine Untersuchung in großem Maßstab über das mechanische Wärmeäquivalent ausgeführt. Er benutzte dabei ein Kalorimeter, welches ungefähr 8 kg Wasser enthielt und ähnlich eingerichtet war, wie das von Joule. Das Schaufelrad wurde jedoch durch eine Dampfmaschine in Bewegung gesetzt, und das Kalorimeter selbst, welches an einem Draht aufgehängt war, wurde in derselben Weise wie der innere Kegel von Puluj verhindert, an dieser Bewegung teilzunehmen. Diese mit großer Sorgfalt ausgeführten Messungen führen zu dem Resultat, daß die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 g Wasser von 15^0 auf 16^0 zu erwärmen, einer mechanischen Energie von 419×10^5 Erg äquivalent ist. Diese Zahl ist größer als die von Joule gefundene, aber es gelang Rowland, die Ursachen dieser Abweichung anzugeben. Während er selbst die Temperaturen in Graden eines Thermometers angibt, welches auf der Ausdehnung der Luft beruht, was aus später anzuführenden Gründen bei genauen Untersuchungen den Vorzug verdient, machte Joule von den Angaben eines Quecksilberthermometers Gebrauch. Eine eingehende Untersuchung von Thermometern lehrte, daß die Abweichung, wenigstens zu einem erheblichen Teil, diesem Umstand zugeschrieben werden muß, während es scheint, daß der Rest der Abweichung einer geringeren Genauigkeit der Beobachtungen Joules zugeschrieben werden kann.

Das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit kann daher gleich 419×10^5 Erg gesetzt werden.

§ 143. **Umsetzung von Wärme in mechanische Energie.** Bei allen vorhergehenden Versuchen ließ man Wärme aus anderer Energie entstehen. Das Umgekehrte findet in den Dampfmaschinen statt. Hirn hat über die betreffenden Erscheinungen ausführliche Untersuchungen ausgeführt; er hat die Arbeit gemessen, die durch den Dampf verrichtet wird, während er den Kolben bewegt, und die nötigen Daten gesammelt, um sowohl diejenige Wärme-

menge, die im Dampfkessel von dem Wasser aufgenommen wird, als auch diejenige, welche bei der Verdichtung des Dampfes zu Wasser entsteht, zu bestimmen. Er fand, daß die letztere Menge wirklich kleiner ist als die erstere; dadurch, daß man den Unterschied beider mit der Arbeit vergleicht, würde man das mechanische Wärmeäquivalent berechnen können, wenn man die komplizierten Erscheinungen in einer großen Dampfmaschine mit derselben Genauigkeit studieren könnte, wie diejenigen, welche wir unter absichtlich vereinfachten Umständen in einem Laboratorium hervorrufen. Die Zahlen, welche Hirn aus seinen Versuchen ableitete, weichen denn auch beträchtlich von dem in § 142 mitgeteilten Resultat ab.

Wir werden später aus den Eigenschaften gasförmiger Körper eine Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes ableiten, die weniger direct ist als die von Joule und Rowland ausgeführte. Sie wird einen neuen Beweis dafür liefern, daß aus Erscheinungen, bei denen Wärme verschwindet, derselbe Wert gefunden wird wie aus denjenigen, bei denen Wärme entsteht.

§ 144. **Allgemeine Gültigkeit des Gesetzes von der Erhaltung der Energie. Verschiedene Auffassungen.** Die Untersuchung anderer physikalischer Erscheinungen hat ebenso wie das Studium der Wärmeerscheinungen stets das Gesetz der Erhaltung der Energie bestätigt. Wir müssen uns vorstellen, wie bereits in § 114 gesagt wurde, daß jeder Körper eine bestimmte Energie besitzt, deren Wert von dem Volum, der Temperatur und überhaupt von allen Größen, die den Zustand des Körpers bestimmen, abhängt. Bei einem System von Körpern haben wir es mit der Energie zu tun, die jedem derselben eigen ist, wozu dann noch die potentielle Energie kommt, welche den Kräften entspricht, mit denen ein Medium auf die Körper wirkt, und die streng genommen als Energie des Mediums aufgefaßt werden muß. Ist ein System äußeren Einflüssen entzogen, so bleibt die gesamte Energie unverändert. Dagegen nimmt diese zu oder ab, wenn Arbeit auf oder durch das System getan wird oder ihm Energie mitgeteilt oder entzogen wird, wobei dann die Zunahme oder Abnahme mit der verrichteten Arbeit oder mit dem Betrag der zugeführten oder entzogenen Energie übereinstimmt.

Im Laufe unserer Betrachtungen werden wir noch verschiedene „Formen“ von Energie kennen lernen; jetzt bemerken wir noch folgendes.

a) Wenn man die Veränderungen der Energie eines Systems verfolgen will, muß man immer einen bestimmten Zeitraum oder einen bestimmten Vorgang ins Auge fassen. Auch muß man bedenken, *daß in der Gleichung, die das Gesetz der Energie ausdrückt, jedes Glied eine Arbeit oder eine Energie bedeuten muß.* Eine Spannung, ein Widerstand, eine Elektrizitätsmenge (wie sich später zeigen wird) können nicht als Glieder in der Gleichung vorkommen, wohl aber die *Arbeit* einer Spannung oder eines Widerstandes, eine Wärmemenge oder die Energie eines elektrisierten Körpers.

b) Im Gegensatz zu der kinetischen Energie, die ein Körper besitzt, wenn er sich als Ganzes bewegt, und zu der potentiellen Energie, die äußeren Kräften wie die Schwerkraft entspricht, nennt man die Energie, welche ein Körper außerdem noch besitzt, oft die innere Energie desselben. Man kann sich nun zuweilen mit der Einsicht begnügen, daß jeder Körper eine bestimmte innere Energie hat, und mit dem, was uns die Beobachtungen über den Betrag derselben lehren. Will man aber in den Mechanismus der Erscheinungen eindringen und diese aus den Bewegungen und gegenseitigen Wirkungen der kleinsten Teilchen (Moleküle, Atome) erklären, so muß man sich vorstellen, daß die innere Energie zusammengesetzt ist aus der potentiellen Energie der einander anziehenden und abstoßenden Teilchen (welche Energie eigentlich in dem Medium zwischen diesen Teilchen gesucht werden muß) und der kinetischen Energie der molekularen Bewegungen.

Um welchen Betrag sich nun bei irgend einer Erscheinung die einzelnen Teile der inneren Energie ändern, kann man aus dem Gesetz der Energie allein nicht ableiten; dazu sind andere Betrachtungen erforderlich, die uns aber oft mehr oder weniger im unsicheren lassen. Es liegt z. B. nahe, anzunehmen, daß, wenn ein elastischer Körper ausgedehnt oder gebogen wird, sich vor allem die Energie der Lage der aufeinander wirkenden Moleküle ändert, aber vielleicht ist hierbei doch auch die kinetische Energie der Teilchen nicht ganz dieselbe geblieben. Ebenso dürfen wir, da alles für die Annahme spricht, daß

die Wärme in einer molekularen Bewegung besteht, uns zwar vorstellen, daß bei einer Temperaturerhöhung vor allem die kinetische Energie der Teilchen zunimmt, aber wir dürfen dabei doch nicht vergessen, daß infolge der Ausdehnung des Körpers die sich gegenseitig anziehenden Moleküle auch eine größere Energie der Lage bekommen haben.

c) Mit Rücksicht auf die verschiedenen Auffassungen, deren man sich bedienen kann, richten wir unsere Aufmerksamkeit noch einmal auf einen Körper A, der sich auf einer rauhen, horizontalen Ebene B bewegt und durch die Reibung zu Ruhe kommt. Achtet man nur auf die Bewegung des Körpers als Ganzes, ohne an die entwickelte Wärme zu denken, so kann man sagen, daß sich die kinetische Energie des Körpers um einen Betrag ändert, welcher gleich der negativen Arbeit der Reibung ist, die von der Ebene ausgeübt wird. Dagegen bekommt die Ebene B, wenn wir sie festhalten, keine kinetische Energie, und die Kraft, welche der Körper A auf sie ausübt, tut denn auch keine Arbeit, da die Punkte, in denen diese Kraft angreift (nämlich die Punkte von B) sich nicht verschieben. Bei dieser Auffassung müßte man also sagen, daß die gesamte Energie kleiner wird, und dies hängt damit zusammen, daß die Körper zwar gleiche und entgegengesetzte Kräfte aufeinander ausüben, diese Kräfte aber jetzt keine gleiche und entgegengesetzte Arbeit verrichten, und zwar deshalb nicht, weil sich nur die Angriffspunkte der einen Kraft, aber nicht die der anderen Kraft verschieben.

Daß in Wirklichkeit keine Energie verloren geht, sieht man erst ein, wenn man auf die entwickelte Wärme achtet. Will man sich diese nun als eine molekulare Bewegung vorstellen und sich klar machen, in welcher Weise diese Bewegung an Intensität zunimmt, so muß man nicht an *eine* Kraft, die Reibung denken, die der eine Körper auf den anderen ausübt, sondern man muß diese als Resultante von zahllosen Kräften auffassen, mit denen die Moleküle des einen Körpers auf die des anderen wirken.

§ 145. **Nähere Betrachtung der Wärmebewegung.** Wenn man annimmt, daß es nur die kinetische Energie ist, die bei einer Temperaturerhöhung zunimmt, so kann man zu einer Schätzung der Geschwindigkeiten kommen, die bei der moleku-

laren Bewegung vorkommen. Um z. B. 1 g Quecksilber von 0° auf 100° zu erwärmen, sind, da die spezifische Wärme 0,031 ist, 3,1 Kalorien erforderlich, die einer Energie von beinahe 13×10^7 Erg entsprechen. Bezeichnen wir die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle, in Centimetern pro Sekunde ausgedrückt, bei 0° mit v_0 und bei 100° mit v_{100}, so ist die kinetische Energie bei der ersteren Temperatur $\frac{1}{2} v_0^2$ und bei der letzteren $\frac{1}{2} v_{100}^2$. Da nämlich die kinetische Energie nicht von der Richtung der Bewegung abhängt, so ist sie, wenn die Moleküle mit einer gewissen mittleren Geschwindigkeit in unregelmäßiger Weise hin- und hergehen, ebensogroß, als wenn sie sich alle mit derselben Geschwindigkeit in derselben Richtung bewegten.

Nun ist

$$\frac{1}{2} v_{100}^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = 13 \times 10^7,$$

woraus folgt

$$v_{100}^2 > 26 \times 10^7$$

oder

$$v_{100} > 1\,6000 \text{ cm pro Sek.}$$

Allerdings beruht dieses Resultat auf einer Annahme, die nicht ganz richtig ist, aber eine ganz falsche Vorstellung von den molekularen Geschwindigkeiten gibt sie doch sicher nicht.

Wir knüpfen an diese Betrachtung noch das Folgende an. Da jeder sagen wird, daß ein warmer Körper mehr „Wärme" enthält als ein kalter Körper, so liegt es nahe, den Namen „Wärme" auf die innere Energie anzuwenden, die durch Temperaturerhöhung zunimmt. Sollen wir nun aber diesen Namen auch für die Energie gebrauchen, die das Wasser von 0° mehr enthält als Eis von 0° — welche erhöhte Energie der Stoff durch Zufuhr von Wärme bekommen hat (§ 136) — obgleich hier die Temperatur in beiden Fällen dieselbe ist, oder für die Energie einer gleichzeitig erwärmten und gespannten Feder, obgleich wir hier nicht ganz entscheiden können, wieviel davon der Formveränderung und wieviel der Temperaturerhöhung entspricht?

Wenn man sich genau ausdrücken will, ist dieser Gebrauch des Wortes „Wärme" nicht zu empfehlen, und man tut besser, von „innerer Energie" zu sprechen. Dies schließt nicht aus, daß man auch den Namen „Wärme", wenn kein Mißverständnis

zu befürchten ist, wohl einmal gebrauchen kann, und zwar entweder für die gesamte innere Energie oder für die kinetische Energie oder auch, etwas unbestimmter, für die molekulare Bewegung selbst.

Die Benennung „Wärme" ist sehr geeignet, um die Energie zu bezeichnen, die ein Körper A infolge seiner höheren Temperatur einem Körper B bei der Berührung mitteilt; diese Energie kann in der Tat scharf unterschieden werden von der Energie, welche durch gewöhnliche mechanische Wirkung (§ 115) übertragen werden kann. Im Grunde genommen kommen jedoch nach der Molekulartheorie diese beiden Arten des Übergangs auf dasselbe hinaus. Die Energie, welche A an B durch mechanische Wirkungen abgibt, stimmt überein mit der Arbeit, welche die von A auf B ausgeübten Kräfte verrichten. Ebenso ist die Energie, welche bei einer Berührung als Wärme übergeht, gleich der Arbeit der zahllosen molekularen Kräfte, welche die Teilchen des einen Körpers auf die des anderen ausüben. Wir können jedoch die Wirkung jeder dieser Kräfte einzeln nicht erforschen; nur ihre gesamte Arbeit ist der Beobachtung zugänglich.

§ 146. **Mitteilung und Fortpflanzung der Wärme.** Der Übergang von Wärme kann in verschiedener Weise stattfinden. Bei der unmittelbaren Berührung zweier Körper von verschiedener Temperatur teilen die Teilchen des einen ihre Geschwindigkeit denjenigen des anderen mit, die in ihrer unmittelbaren Nähe liegen. In derselben Weise kann ein Übergang von Wärme zwischen den Molekülen eines und desselben Körpers stattfinden; ist an *einer* Stelle die Temperatur höher als an anderen, so geht von dem warmen Teil Wärme an die unmittelbar anstoßenden Teile über, von diesen auf weiter entfernte usw., bis schließlich die Wärmebewegung sich über den ganzen Körper ausgebreitet hat. Diese Erscheinung, welche man *Wärmeleitung* nennt, findet in verschiedenen Stoffen in sehr ungleichem Maße statt; bei demselben Temperaturunterschied zwischen zwei Teilen des Körpers geht je nach seinem *Leitungsvermögen* in derselben Zeit mehr oder weniger Wärme über. Gute Leiter sind die Metalle, weniger gute Holz, Glas, Tier- und Pflanzengewebe, schlechte Leiter Gase und Flüssigkeiten mit Ausnahme der flüssigen Metalle.

In ganz anderer Weise pflanzt sich die Wärme durch *Strahlung* fort. Diese kann in einem luftleeren Raume stattfinden, und während die Wärmeleitung bereits für Entfernungen von einigen Zentimetern eine merkliche Zeit braucht, pflanzt sich die strahlende Wärme mit sehr großer Geschwindigkeit fort. Man hat gefunden, daß die Erscheinung in engem Zusammenhang mit dem Licht steht, was man begreiflich finden wird, wenn man beobachtet, daß ein Körper, der unter 500° nur Wärme ausstrahlt, bei dieser Temperatur auch Licht auszustrahlen beginnt, während es doch nicht wahrscheinlich ist, daß die Art der molekularen Bewegungen sich plötzlich vollständig ändert.

Wenn ein warmer Körper sich in einer Flüssigkeit oder einem Gas befindet, bemerkt man außer der Wärmestrahlung und der direkten Leitung noch eine *dritte* Erscheinung. Zunächst werden die Teile des umgebenden Stoffes, welche mit dem warmen Körper in Berührung sind, erwärmt, sie dehnen sich dabei aus, werden leichter und steigen infolgedessen in die Höhe. Neue Teile des Stoffes nehmen ihren Platz ein, um ebenfalls erwärmt zu werden, und so verbreitet sich die Wärme durch die ganze Stoffmenge, weil sie von dem Stoff selbst, durch den sie aufgenommen wurde, *mitgeführt* wird.

§ 147. **Bestimmung des Unterschiedes der inneren Energie in zwei Zuständen eines Körpers oder eines Systems von Körpern.** Wir bezeichnen zwei Zustände eines Körpers oder eines Systems von Körpern mit den Buchstaben P und Q und nennen U_p und U_q die Werte der inneren Energie in diesen Zuständen. Wir nehmen an, daß wir den ersten Zustand wirklich in den zweiten überführen können und daß wir zu diesem Zwecke w Kalorien zuführen müssen. Außerdem mögen äußere Kräfte wirken, die eine Arbeit von A Erg verrichten. Da sowohl durch diese Arbeit (§ 115), als durch die zugeführte Wärme die innere Energie des Körpers vergrößert wird, haben wir, wenn wir die innere Energie in Erg ausdrücken,

$$U_q - U_p = Ew + A, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

und wenn sie in Kalorien angegeben wird,

$$U_q - U_p = w + \frac{A}{E}.$$

Diese Gleichungen, in denen E das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet, gelten auch, wenn entweder w oder A oder beide negativ sind; man kann sie dann aber etwas anders in Worten ausdrücken. Ist z. B. die Arbeit der äußeren Kräfte $-A$, so daß die erste Gleichung in

$$U_q - U_p = Ew - A \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

übergeht, so kann man sagen, *daß die zugeführte Wärme teils zur Überwindung des äußeren Widerstandes gedient hat, der sich der Zustandsänderung entgegensetzt, um also den Körper eine Arbeit A verrichten zu lassen, teils zur Vergrößerung der inneren Energie.*

Es ist zweckmäßig, die Bedeutung dieser Gleichungen bereits jetzt durch einige Beispiele zu erläutern, obgleich wir auf einige der Erscheinungen, denen wir sie entlehnen, später ausführlicher zurückkommen werden.

a) *Wenn eine Flüssigkeit in einem offenen Gefäß bis zum Siedepunkt erwärmt ist, so steigt bei weiterer Wärmezufuhr die Temperatur nicht; die Flüssigkeit geht in Dampf von derselben Temperatur über. Die Wärmemenge, welche man zuführen muß, um die Masseneinheit der Flüssigkeit in Dampf von derselben Temperatur zu verwandeln, wird die Verdampfungswärme genannt;* ihr Betrag kann aus den Beobachtungen abgeleitet werden.

Wir stellen uns der Einfachheit halber vor, daß sich die Flüssigkeit in einem Zylinder unter einem Kolben befindet, der während der Verdampfung nach außen geschoben wird. *Da der Dampf einen Druck auf den Kolben ausübt, verrichtet er bei der Verschiebung eine Arbeit, die man aus der Größe des Druckes und der Verschiebung des Kolbens ableiten kann.* Setzt man in der Gleichung (14) diese Arbeit an Stelle von A ein, und für w die Wärme, die man bei der Verdampfung zuführen mußte, so lehrt uns die Formel, wieviel die innere Energie des Dampfes größer ist als die der Flüssigkeit. Es wird sich später zeigen, daß Ew größer als A ist, und daß also wirklich $U_q > U_p$ ist. Dies ist auch begreiflich, wenn man bedenkt, daß sich die Flüssigkeitsmoleküle einander anziehen, wie wir aus vielen Erscheinungen wissen, und daß sie also bei der Verdampfung, bei der die gegenseitigen Entfernungen vergrößert werden, eine größere Energie der Lage bekommen. Was die kinetische Energie betrifft, so kann man über diese nicht mit

derselben Sicherheit sprechen. Der Dampf hat, wie gesagt, dieselbe Temperatur wie die Flüssigkeit, und vieles spricht dafür, daß unter diesen Umständen die molekularen Geschwindigkeiten in beiden gleich groß sind. Es ist in der Tat nicht unannehmbar, daß der Übergang von Wärme von einem Körper an einen anderen vollständig durch die Geschwindigkeit der Moleküle bestimmt wird, und daß also der Dampf und die Flüssigkeit, wenn diese Geschwindigkeiten gleich groß sind, ein Thermometer auf denselben Grad erwärmen können. Nimmt man vollkommene Gleichheit der Geschwindigkeiten in Dampf und Flüssigkeit an, so kommt man zu dem Schluß, daß sich die kinetische Energie bei der Verdampfung nicht ändert und daß also die zugeführte Wärme dazu gedient hat, um die innere Arbeit zu verrichten und um die anziehenden Kräfte zu überwinden.

b) Durch Zusammendrückung und Abkühlung können wir einen Dampf zu einer Flüssigkeit verdichten. Was vorhin mit dem Zylinder geschah, kann z. B. auch umgekehrt stattfinden; der Kolben wird nach unten getrieben und eine ebenso große Menge Wärme wie vorhin zugeführt wurde, wird dem Zylinder entzogen. *Diese Wärme ist jetzt zum Teil der Arbeit der Kraft, die von außen auf den Kolben wirkte, zum Teil der Verminderung der inneren Energie zu verdanken.*

Man kann sagen, daß die betreffende Wärme *bei der Verdichtung des Dampfes zu Flüssigkeit entstanden ist.* Sie wurde jetzt dem System entzogen, sie kann aber auch in demselben gelassen werden. Stellen wir uns vor, um zugleich ein Beispiel zu haben, in welchem das Glied A in der Gleichung verschwindet, daß eine Dampfmasse, die in einem Raum von unveränderlichem Volum enthalten ist, sich ohne irgend einen Einfluß von außen zum Teil zu Flüssigkeit verdichtet. Auch dann wird Wärme entwickelt, die jetzt aber eine Temperaturerhöhung zur Folge hat. Die Energie des Systems von Molekülen bleibt unter diesen Umständen unverändert, aber es ist eine andere Form von Energie entstanden. *Bei der Annäherung der einander anziehenden Teilchen sind die Geschwindigkeiten vergrößert worden; für die verlorene Energie der Lage ist kinetische Energie, die Wärme, aufgetreten.*

c) Die Wärmeentwicklung bei dem Entstehen einer che-

mischen Verbindung muß einer ähnlichen Ursache zugeschrieben werden. Die Teilchen, welche in die Verbindung eintreten, nähern sich einander mit beschleunigter Bewegung; *die entwickelte Wärme oder kinetische Energie ist das Äquivalent der Energie der Lage, welche die Teilchen hatten, bevor sie ihrer Anziehung Folge geleistet hatten.* Wir können die letztere Energie *„chemische Energie der Lage“* nennen. *Bei der chemischen Zersetzung nimmt sie auf Kosten der Wärme zu.*

Es verdient jedoch bemerkt zu werden, daß bei Versuchen über die Wärmeentwicklung bei chemischen Prozessen (thermochemische Bestimmungen) gewöhnlich Wärme dem System entzogen (oder zugeführt) wird und auch äußere Kräfte eine Arbeit verrichten können; so muß dann wieder eine der Gleichungen (13) und (14) angewandt werden. Man denke sich z. B., in einem Kalorimeter ein System von Körpern, welches durch dünne Platinwände vom Wasser getrennt ist; durch einen chemischen Prozeß möge es aus dem Zustand P in den Zustand Q übergehen. Aus der Temperaturveränderung kann abgeleitet werden, wieviel Wärme dem System durch das Wasser mitgeteilt oder entzogen worden ist, und also auch, wenn nötigenfalls auf die Arbeit äußerer Kräfte geachtet wird, um wieviel die innere Energie nach dem chemischen Prozeß größer oder kleiner ist als vor demselben.

Man muß bei dem Gesagten berücksichtigen, daß man bei zwei Körpern, die sich einander anziehen, sehr gut von einer Energie der Lage sprechen kann, auch wenn sie so weit voneinander entfernt sind, daß die Anziehung unmerklich ist. [...]tzt man z. B. fest, daß ein Stein in bezug auf die Erde eine [...]tentielle Energie Null haben soll, wenn er auf dem Boden [...] dann hat die potentielle Energie einen positiven Wert, wenn [...] eine gewisse Höhe gehoben ist. Stellt man sich nun [...]ß die Anziehung unmerklich wird, wenn der Abstand [...]r Erde einen gewissen Wert l übersteigt, so wird bei [...]nung bis zu diesem Abstand die Energie der Lage des [...] fortwährend zunehmen und wird bei noch weiterer [...]nung von der Erde den Wert A beibehalten, den sie [...]bstand l hatte. Wenn man für einen beliebigen größeren [...]tand der Energie immer noch diesen Wert beilegt, so meint [...] damit weiter nichts, als daß, wenn der Stein auf die Erd-

oberfläche herabfällt, auf ihn (wenn auch nicht sofort) eine Kraft wirkt, die eine Arbeit *A* verrichtet. Ebenso kann man sehr gut sagen, daß ein Atom Wasserstoff und ein Atom Chlor, auch wenn sie noch keine Anziehung aufeinander ausüben, eine gewisse potentielle Energie besitzen.

Wie groß die chemische Energie der Lage ist, ergibt sich aus einer einfachen Berechnung. Ein Gramm Chlor entwickelt bei der Verbindung mit Wasserstoff 600 Kalorien. Hieraus folgt, daß es dem Wasserstoff gegenüber, mit dem es sich verbinden kann, eine ebenso große Energie besitzt wie ein Gewicht von 1000 g in bezug auf die Erde haben würde, wenn es sich in einer Höhe von 250 m befände.

d) Ähnliche Bemerkungen, wie wir sie über das Verdampfen machten, gelten auch für das *Schmelzen.* Die Wärmemenge, welche während der Änderung des Aggregatzustandes zugeführt werden muß, die Schmelzwärme (§ 136) dient, *da beim Schmelzen keine nennenswerte äußere Arbeit verrichtet wird,* zur Erhöhung der inneren Energie. Nimmt man an, daß wegen der Gleichheit der Temperatur die kinetische Energie nicht verändert ist, so kommt man zu dem Schluß, *daß die Flüssigkeit eine größere potentielle Energie hat als der feste Körper.* Dies ist, da sich die Teilchen einander anziehen, sehr begreiflich in denjenigen Fällen, in denen beim Schmelzen das Volum größer wird. Weniger einfach ist die Sache bei einem Körper wie Eis, das sich beim Schmelzen zusammenzieht. Vielleicht enthält das Eis Gruppen von Teilchen, die, wenn auch das Gesamtvolum kleiner wird, sich selbst ausdehnen uud daher eine größere potentielle Energie bekommen.

e) Schließlich weisen wir noch darauf hin, *daß eine Angabe über die innere Energie eines Systems vor und nach einer physikalischen oder chemischen Umwandlung nur dann Sinn hat, wenn hinzugefügt wird, in welchem Zustand sich die Körper vor und nach der Umwandlung befinden und welche Temperatur sie jedesmal haben.*

Man hat z. B. bestimmt, wieviel die innere Energie eines Gramms Wasserdampf von 15° C. weniger beträgt als die Energie des darin enthaltenen Sauerstoffs und Wasserstoffs, wenn diese Gase bei derselben Temperatur miteinander vermischt sind. Will man nun flüssiges Wasser von 15° mit dem Gemisch

vergleichen, so findet man einen etwas größeren Energieunterschied, da die Energie des Wassers kleiner ist als die des Wasserdampfes. Hat man eine Untersuchung ausgeführt über die Energie des Wassers in verschiedenen Zuständen und über die des Sauerstoffs und des Wasserstoffs bei verschiedenen Temperaturen, so kann man auch sagen, wieviel die Energie von z. B. einem Gramm Eis kleiner ist als die eines Gramms Knallgas von 0°.

Eine chemische Umwandlungswärme kann oft dadurch bestimmt werden, daß man die Zustände der Körper vor und nach der Umwandlung beide mit einem dritten Zustand vergleicht.

Aus der Verbrennungswärme des Phosphors z. B. kann man ableiten, um wieviel die innere Energie des Systems 1 g Phosphor + dem freien Sauerstoff, mit dem er sich verbinden kann, größer ist als die Energie der durch die Verbrennung gebildeten Phosphorsäure bei derselben Temperatur. Das Resultat ist für gelben Phosphor um 600 Kalorien größer als für roten; um diesen Betrag übertrifft also die innere Energie eines Grammes Phosphor in dem ersteren Zustand die in dem zweiten, und diese Wärmemenge muß entwickelt werden, wenn der gelbe Phosphor in den roten übergeht.

§ 148. **Energie in der Natur.** In der Natur finden wir viele Beispiele von Umwandlungen von Energie in großem Maßstab. Die Pflanzen haben ihr Wachsen der Energie der Sonnenstrahlen zu verdanken, durch die sie in den Stand gesetzt werden, aus Stoffen wie Kohlensäure und Wasser die Substanzen zu bilden, aus denen ihr Körper aufgebaut ist.
s starke Band, welches in der Kohlensäure und im Wasser
Elemente vereinigt, wird durch das Sonnenlicht gelöst
d macht unter Austritt von Sauerstoff Platz für eine minder
Verkettung der Atome.

Dienen später die Pflanzen als Nahrung für die Tierwelt,
chaffen sie dieser auch Wärme und mechanische Energie.
omplizierten chemischen Umwandlungen im tierischen
r bestehen in der Hauptsache in der Verbindung der in
ahrung enthaltenen Stoffe mit dem Sauerstoff, der bei
Atmung aufgenommen wird: es ist die potentielle Energie
er Stoffe gegenüber dem Sauerstoff, die dem Tier zugute

kommt. So hat auch der Mensch seine Energie direkt oder auf einem Umweg von der Pflanzenwelt bekommen.

Außer über diese Energie verfügen wir auch über die Energie, welche uns von der Natur geboten wird, über die kinetische Energie des Windes und des strömenden Wassers, die potentielle Energie des Wassers, bevor es von einer Höhe herabstürzt, die chemische Energie, welche die Steinkohlen dem Sauerstoff gegenüber haben. Gibt man sich Rechenschaft von den Umwandlungen, welche diese Energie erlitten hat, bevor wir unsere Maschinen mit ihr treiben, so kommt man zu dem Schluß, daß sie in allen Fällen von der Sonne herkommt. Diese hat das Wasser verdampft und auf die Spitzen der Berge geführt; sie hat, da sie die Erdoberfläche ungleich erwärmt, die Winde hervorgerufen; sie hat endlich die Pflanzen beschienen, deren Überreste in den Steinkohlen für uns aufbewahrt worden sind. Die Wärme und das Licht eines Steinkohlenfeuers können als ein Teil des Sonnenlichtes betrachtet werden, welches in längst vergangenen Zeiten die Erde bestrahlt hat und dessen Energie in den Steinkohlenlagern aufgespeichert wurde.

Drittes Kapitel.

Feste Körper von unveränderlicher Form.

§ 149. **Translation und Rotation.** Der Zusammenhang zwischen den Teilchen eines festen Körpers ist in vielen Fällen im Vergleich mit den äußeren Kräften, die auf ihn wirken, groß genug, um jede merkbare Formveränderung durch diese Kräfte zu verhindern. Man drückt dies dadurch aus, daß man von einem *starren* Körper spricht. Die Bewegung und das Gleichgewicht eines solchen sollen in diesem Kapitel besprochen werden.

Unter einer *Translation* oder *Verschiebung* eines Körpers versteht man eine Bewegung, bei welcher alle Punkte gleiche Wege in derselben Richtung zurücklegen.

Eine *Rotation* oder *Drehung* ist eine Bewegung, bei welcher jeder Punkt einen Kreisbogen in einer Ebene beschreibt, die senkrecht auf einer festen Linie, der *Achse*, steht, in welcher der Mittelpunkt des Kreises liegt; dabei haben alle in derselben Zeit beschriebenen Kreisbogen gleiche Zentriwinkel. Die Achse kann sowohl innerhalb als außerhalb des Körpers liegen.

Bei einer Translation haben alle Punkte des Körpers dieselbe Geschwindigkeit. Bei einer Rotation ist die Geschwindigkeit proportional der Entfernung des betreffenden Punktes von der Achse.

Ebenso wie man bei der Bewegung eines materiellen Punktes von der Geschwindigkeit spricht, spricht man bei der Rotation eines Körpers von der *Winkelgeschwindigkeit.*

Die Rotation heißt gleichförmig, wenn sich der Körper in beliebig gewählten gleichen Zeiten um gleich große Winkel dreht. Die Winkelgeschwindigkeit wird in diesem Fall durch den in der Zeiteinheit beschriebenen Winkel gemessen und also durch die Zahl ausgedrückt, welche man erhält, wenn man den in

einer beliebigen Zeit beschriebenen Winkel durch diese Zeit dividiert. Bei einer nicht gleichförmigen Rotation wird die Winkelgeschwindigkeit gefunden, wenn man den Winkel, um den sich der Körper in einer unendlich kleinen Zeit dreht, durch diese letztere dividiert (vgl. § 61). Bei Angabe der Winkelgeschwindigkeit werden wir den Winkel in Bogenmaß (§ 19) ausdrücken. Demgemäß steht die Winkelgeschwindigkeit in einem einfachen Zusammenhang mit den Geschwindigkeiten im gewöhnlichen Sinne des Wortes (lineare Geschwindigkeiten) der Punkte des Körpers. Ist nämlich ω die Winkelgeschwindigkeit, so bedeutet dies, daß ein Punkt im Abstand 1 von der Achse pro Zeiteinheit einen Kreisbogen ω durchläuft; ω ist also auch die lineare Geschwindigkeit dieses Punktes, und für einen Punkt im Abstand r von der Achse ist die Geschwindigkeit bestimmt durch die Gleichung

$$v = \omega r.$$

§ 150. **Bewegung von Figuren in einer Ebene.** Bei einer Figur von unveränderlicher Gestalt und Größe, die sich in einer Ebene bewegen kann, sind eine Translation und eine Rotation um einen festen Punkt die einfachsten Bewegungen. Kompliziertere Bewegungen können auf diese zurückgeführt werden. Die Figur kann z. B. nacheinander um verschiedene Punkte rotieren; man kann dies bei einem Vieleck beobachten, welches auf einer geraden Linie „fortgekantelt“ wird. Es ist sogar möglich, daß die Rotation jedesmal nur während eines Zeitelementes um denselben Punkt stattfindet, der dann sofort durch einen neuen Rotationsmittelpunkt ersetzt wird.

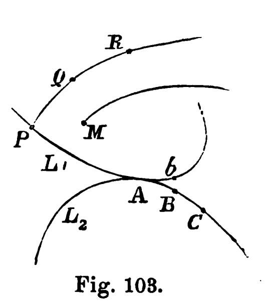


Fig. 103.

Dies ist der Fall, wenn eine krumme Linie L_1 (Fig. 103) auf einer geraden oder krummen Linie L_2 rollt. Der Berührungspunkt A ist dabei der Rotationsmittelpunkt, aber sobald ein unendlich kleiner Winkel durchlaufen ist, ist ein anderer Punkt b von L_1 in einem anderen Punkt B von L_2 angekommen, die Rotation findet dann während eines zweiten Zeitelementes um den letzteren Punkt statt. Ein Punkt P der

Linie L_1 beschreibt nun eine Bahn, die als eine Aneinanderreihung von unendlich kleinen Kreisbogen PQ, QR usw. aufgefaßt werden kann, die die Punkte A, B, C usw. von L_2 zu Mittelpunkten haben. Mit der rollenden Linie L_1 kann dabei eine beliebige Figur fest verbunden sein; ein Punkt dieser letzteren, der sich z. B. in der Lage M befindet, wenn A der Berührungs- punkt ist, beschreibt dann ebenfalls unendlich kleine Kreisbogen mit den Mittelpunkten A, B, C usw.

Man wird sich leicht eine Vorstellung von den Bahnen machen können, die beschrieben werden, wenn ein Kreis auf einer geraden Linie oder auf einem anderen Kreis, entweder auf der Außenseite oder auf der Innenseite des letzteren, rollt.

Wenn zwei Lagen einer Figur in einer Ebene gegeben sind, so sind zahllose Bewegungen denkbar, durch die sie aus der einen Lage in die andere übergehen kann. Angenommen, F_1 und F_2 (Fig. 104) seien die beiden Lagen, und die Punkte, die in der ersten Lage in A_1 und B_1 liegen, seien in der zweiten Lage nach A_2 und B_2 gekommen. Dabei sei $A_2 B_2$ nicht parallel zu $A_1 B_1$. Man könnte, um die Figur aus der ersten Lage in die zweite zu bringen, die Figur erst verschieben, so daß A_1 nach A_2 kommt, und sie dann um A_2 drehen; oder man könnte durch Verschiebung B_1 mit B_2 zusammenfallen und dann eine Drehung um den letzteren Punkt folgen lassen. Auch durch mehr als zwei Verschiebungen oder Drehungen kann man das Ziel erreichen, ebenso *durch eine einzige Drehung*. Errichtet man nämlich in der Mitte von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ Senkrechte und ist O der Durchschnittspunkt derselben, so kann man beweisen, daß die Winkel $A_1 O A_2$ und $B_1 O B_2$ gleich sind; daraus folgt, daß eine Drehung um O um den Winkel $A_1 O A_2$ gleichzeitig A_1 nach A_2 und B_1 nach B_2, folglich die ganze Figur in die Lage F_2 bringt.

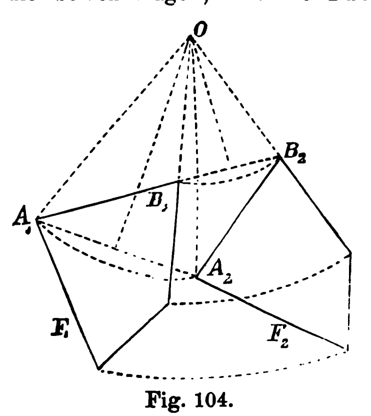


Fig. 104.

Sobald in irgend einer Weise ein Punkt gefunden ist, der in den Lagen F_1 und F_2 dieselbe Stelle einnimmt, so ist dies natürlich der Punkt, um den die gesuchte Drehung stattfinden muß.

§ 151. Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. **Ein Körper**, von dem *ein* Punkt O festgehalten wird, der aber sonst in seinen Bewegungen ganz frei ist, kann um jede Linie

rotieren, die durch diesen Punkt gezogen wird. Er kann sich auch nacheinander um verschiedene durch O gehende Achsen drehen, und wenn sich die Richtung der Achse fortwährend ändert, so daß sich der Körper nur während einer unendlich kleinen Zeit um dieselbe Linie dreht, so hat die Bewegung Ähnlichkeit mit der im vorigen Paragraphen besprochenen rollenden Bewegung von Linien.

Man denke sich nämlich eine Kegelfläche K_1 (Fig. 105) mit der Spitze O, die mit dem beweglichen Körper verbunden ist, und eine zweite Kegelfläche K_2 mit derselben Spitze, die eine unveränderliche Lage im Raum hat. Nachdem, wie die Figur angibt, K_1 mit einer der erzeugenden Linien auf K_2 gelegt ist, kann man den ersten Kegel auf dem zweiten rollen lassen, so daß sich die beiden Flächen immer längs einer erzeugenden Linie berühren. Der mit K_1 verbundene Körper nimmt an dieser Bewegung teil, die in jedem Augenblick in einer Rotation um die Linie besteht, längs der gerade die Berührung stattfindet.

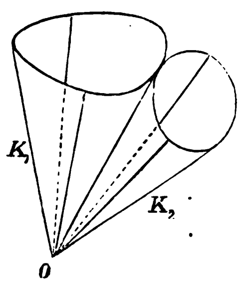


Fig. 105.

Die bekannte Bewegung eines schnell rotierenden Kreisels, dessen geneigte Achse eine Kegelfläche beschreibt, kann in dieser Weise als das Rollen eines mit dem Kreisel verbundenen Kegels mit kleinem Winkel an der Spitze über einen festen Kegel aufgefaßt werden. Ja, man kann beweisen, daß jede Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt von der beschriebenen Art ist; nur muß man berücksichtigen, daß an Stelle der Kegel vielflächige Ecken vorkommen können, die übereinander „kanteln“, daß einer der beiden Kegel durch eine Ebene ersetzt sein kann und daß sich der eine Kegel auf der Innenseite des anderen befinden kann.

Ebensowenig wie bei einer Figur in einer Ebene, ist bei einem Körper mit einem festen Punkt eine Bewegung durch die Anfangslage und die Endlage bestimmt; der Übergang aus der einen Lage in die andere kann nämlich wieder in verschiedener Weise stattfinden.

Um dies zu erläutern, wollen wir uns vorstellen, von dem festen Punkt O aus seien drei aufeinander senkrechte Linien gezogen, die fest mit dem Körper verbunden sind und die wir die erste, die zweite und die

dritte Achse nennen wollen. Der Übergang aus den Lagen $O X_1$, $O Y_1$, $O Z_1$ (Fig. 106) in die Lagen $O X_2$, $O Y_2$, $O Z_2$ kann dann u. a. in den folgenden verschiedenen Weisen stattfinden.

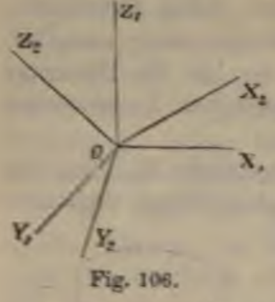


Fig. 106.

a) Man dreht den Körper um die erste Achse, bis die zweite aus der Lage $O Y_1$ in die Ebene $O X_2 Y_2$ gekommen ist; dann wird durch eine Drehung um die zweite Achse auch die erste in diese Ebene gebracht. Die dritte Achse hat hierdurch bereits die auf der Ebene $O X_2 Y_2$ senkrechte Stellung $O Z_2$ angenommen; eine Drehung um diese Linie bewirkt, daß die erste und zweite Achse mit $O X_2$ und $O Y_2$ zusammenfallen.

Man kann auch Drehungen um die Achsen in anderer Reihenfolge aufeinander folgen lassen; man kann z. B. zuerst um die dritte, dann um die erste und zuletzt um die zweite Achse drehen. Der Winkel, um den sich der Körper jedesmal um eine der Achsen drehen muß, ist dann nicht derselbe wie bei der zuerst genannten Reihenfolge. Man kann daher nicht sagen, daß die gewünschte Änderung der Lage nur durch Drehungen von ganz bestimmter Größe um die drei Achsen erhalten werden kann.

b) Durch eine einzige Drehung, die übrigens noch um verschiedene Achsen stattfinden kann, wird der dritten Achse die Lage $O Z_2$ gegeben; eine Drehung um $O Z_2$ bringt dann die anderen Achsen in die gewünschte Richtung.

c) Die gesamte Änderung der Lage kann auch *durch eine einzige Drehung* erhalten werden; allein diese muß um *eine bestimmte Linie* stattfinden. Da sich nämlich beim Drehen um eine Achse der Winkel, den eine beliebige Linie des Körpers mit derselben bildet, nicht ändert, muß die betreffende Linie gleiche Winkel mit $O X_1$ und $O X_2$ und ebenso mit $O Y_1$ und $O Y_2$ bilden. Sie ist daher der Durchschnitt zweier durch O gehenden Ebenen, von denen die eine senkrecht auf der Ebene $X_1 O X_2$ ... $O X_1$ und $O X_2$ gleiche Winkel bildet, während die andere ... Lage in bezug auf den Winkel $Y_1 O Y_2$ befindet. Aus ... der gebildeten dreiflächigen Ecken ist leicht abzu... ...iel wirklich durch eine Drehung um die in dieser ...chse erreicht werden kann.

...nsetzung von Drehungen und Winkelgeschwin-

... $O A$ und $O B$ zwei feste Linien im Raum (Fig. 107) ... Körper zuerst um $O A$ um einen Winkel α und dann ... Winkel β. Die Richtung dieser Drehungen wollen ... bestimmter Weise angeben. Wir wollen jede Achse ... einer Seite ziehen, und zwar nach derjenigen Seite, ... Beschauer stellen muß, um die Richtung der Drehung ... sich die Zeiger der Uhr bewegen.

Wir legen nun durch OA zwei Ebenen AOD und AOC, die an der Vorderseite und der Hinterseite der Ebene AOB mit dieser einen Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ bilden; ebenso zwei Ebenen durch OB, die mit AOB Winkel $\frac{1}{2}\beta$ bilden. Die beiden Ebenen auf der Vorderseite von AOB schneiden sich in der Linie OD, die beiden anderen in der Linie OC.

Auf jeder Seite von AOB entsteht nun eine dreiflächige Ecke und diese beiden Figuren sind kongruent, so daß $\angle AOD = \angle AOC$ und $\angle BOD = \angle BOC$ ist. Daraus folgt, daß die Linie des Körpers, die zuerst mit OC zusammenfällt, nach der ersten Drehung die Lage OD annimmt, aber bei der zweiten Drehung wieder nach OC zurückkehrt. Da also diese Linie nach Verlauf der beiden Drehungen wieder ihre ursprüngliche Lage hat, muß die gesamte Änderung der Lage des Körpers auch durch eine einzige Drehung um OC erhalten werden können.

In derselben Weise sieht man ein, daß, wenn zuerst die Drehung um OB und dann die um OA stattfände, die Linie OD in ihre Lage zurückkehren würde. Die Reihenfolge, in welcher die beiden Drehungen stattfinden, ist also nicht gleichgültig.

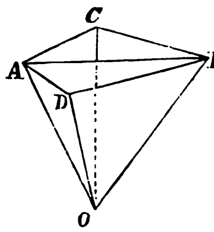


Fig. 107.

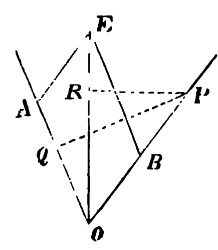


Fig. 108.

Wir stellen uns nun vor, daß die Winkel α und β immer kleiner gewählt werden; die Linien OC und OD nähern sich dann *einer und derselben* Linie OE (Fig. 108), die in der Ebene AOB liegt. Bei *unendlich kleinen* Drehungen um die Achsen OA und OB ist daher die Reihenfolge, in welcher die Drehungen stattfinden, gleichgültig; sie können in jedem Fall durch eine Drehung um die Linie OE ersetzt werden.

Um die Lage dieser Linie zu bestimmen, beachten wir, daß in Fig. 107

$$\sin AOC : \sin BOC = \sin \tfrac{1}{2}\beta : \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

ist, daß also auch in Fig. 108

$$\sin AOE : \sin BOE = \sin \tfrac{1}{2}\beta : \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

sein muß. Wenn aber α und β unendlich klein sind, kann man hierfür schreiben

$$\sin AOE : \sin BOE = \beta : \alpha .$$

Die Linie OE, welche dieser Bedingung genügt, wird gefunden, indem man die Strecken OA und OB so groß macht, daß sie die Drehungen α und β vorstellen können, und dann über diesen Strecken als Seiten ein

Parallelogramm beschreibt. Die Diagonale OE desselben ist die Achse, um welche die mit den Drehungen α und β *äquivalente* Drehung, d. h. diejenige Drehung stattfinden muß, welche den Körper in dieselbe Lage bringt, die durch die Drehungen α und β erreicht wird; *außerdem gibt OE die Richtung und die Größe dieser Drehung an.* Das erste zu beweisen, können wir dem Leser überlassen. Um das zweite einzusehen, brauchen wir es nur für einen einzigen Punkt des Körpers zu beweisen. Der Einfachheit halber wählen wir diesen auf OB. Es seien PQ und PR Senkrechte auf OA und OE. Der Punkt P würde sich bei der Drehung um OB nicht verschieben; durch die Drehung α um OA würde er nach vorn, in einer Richtung senkrecht zur Ebene AOB, eine Strecke $\alpha \times PQ$ durchlaufen; dieselbe Verschiebung muß er durch die Drehung um OE bekommen, deren Betrag, wie wir annehmen wollen, dem Winkel E entspricht. Man hat also

$$\alpha \times PQ = \varepsilon \times PR.$$

Nun haben die Dreiecke OAP und OEP gleichen Inhalt, woraus folgt, daß

$$OA \times PQ = OE \times PR.$$

In Verbindung hiermit gibt die vorige Gleichung

$$\alpha : \varepsilon = OA : OE.$$

Da aber die Länge von OA den Betrag der Drehung α vorstellt, muß ε durch OE vorgestellt werden.

Wir benutzen Fig. 108, um einen wichtigen Satz zu erwähnen, ohne jedoch den Beweis für denselben zu führen. Wir können uns drei verschiedene Bewegungen des Körpers vorstellen, nämlich Drehungen um die Achsen OA, OB und OE, mit Winkelgeschwindigkeiten, die durch die Länge der Vektoren OA, OB und OE vorgestellt werden, und in Richtungen, die durch die Richtungen dieser Vektoren angegeben werden. Ein beliebiger Punkt des Körpers, in oder außerhalb der Ebene AOB, hat bei jeder dieser Bewegungen eine bestimmte Geschwindigkeit, und man kann nun beweisen, daß die Geschwindigkeit, die er bei der dritten Bewegung hat, dadurch erhalten wird, daß man die Geschwindigkeiten der beiden anderen Bewegungen mit Hilfe eines Parallelogramms zusammen setzt. Wenn also ein Punkt des Körpers die Geschwindigkeiten der Drehungen um OA und OB zugleich hat, so hat er die Geschwindigkeit der Drehung um OE, was man auch kürzer ausdrücken kann, indem man sagt, daß, wenn der Körper zugleich die Drehungen um OA und OB hat, er sich um OE mit der durch diesen Vektor bestimmten Winkelgeschwindigkeit dreht. Wenn man nämlich sagt, ein Körper führe zwei Bewegungen, in diesem Fall zwei Drehungen, zugleich aus, so meint man damit, daß jeder Punkt des Körpers die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen zugleich hat.

Man sagt auch, daß die beiden Winkelgeschwindigkeiten, die wir durch OA und OB angegeben haben, miteinander zu einer einzigen Winkelgeschwindigkeit, die durch OE angegeben wird, „zusammengesetzt“ werden können. In derselben Weise kann man auch mehr als

zwei Winkelgeschwindigkeiten zusammensetzen. Umgekehrt kann eine gegebene Winkelgeschwindigkeit in zwei oder mehr andere „zerlegt“ werden.

§ 153. **Allgemeinste Bewegung eines festen Körpers.** *Ein Körper kann zugleich eine Translation und eine Rotation haben, wobei dann noch die Richtung und die Geschwindigkeit der Translation, die Richtung der Rotationsachse und die Winkelgeschwindigkeit sich von einem Augenblick zum andern ändern können. Jede beliebige Bewegung eines festen Körpers kann in dieser Weise aufgefaßt werden.*

Dreht sich ein Körper fortwährend um dieselbe Achse und hat er außerdem eine Translation in der Richtung dieser Achse, so beschreibt jeder Punkt, wenn beide Bewegungen gleichförmig sind, eine Schraubenlinie. Die Ganghöhe aller dieser Schraubenlinien ist dieselbe, nämlich der Weg, der bei der Translation während *einer* Umdrehung zurückgelegt wird.

§ 154. **Zusammenhang zwischen der Arbeit der äußeren Kräfte und der kinetischen Energie des Körpers.** Wir haben angenommen, daß sich an dem inneren Zustand der betrachteten Körper nichts ändert und daß also auch von einer Änderung der inneren Energie keine Rede ist. Auch stellen wir uns vor, daß keine Mitteilung oder Entziehung von Wärme stattfindet. Aus dem im vorigen Kapitel Besprochenen folgt dann, daß *die Arbeit der äußeren Kräfte gleich der Vermehrung der kinetischen Energie der wahrnehmbaren Bewegungen ist.*

Werden die äußeren Kräfte durch ein Medium ausgeübt, so daß ihre Arbeit gleich der Verminderung der potentiellen Energie ist, so kann man sagen, daß die Summe dieser Energie und der soeben genannten kinetischen Energie konstant bleibt.

§ 155. **Allgemeine Bedingung für das Gleichgewicht.** Aus diesem Satz kann man ableiten, ob ein Körper, der anfangs in Ruhe ist, durch ein gegebenes System von Kräften in Bewegung gesetzt werden wird und, wenn ja, in welcher Richtung. Denn wenn Bewegung entstehen soll, so muß auch kinetische Energie entstehen und muß also die potentielle Energie abnehmen. Folglich:

Ein Körper, der anfangs in Ruhe ist, kann sich nur in einer solchen Richtung in Bewegung setzen, daß die Energie der Lage kleiner wird.

Angenommen, unter allen Lagen, die der Körper einnehmen kann, sei eine — die wir P nennen wollen — in welcher die potentielle Energie kleiner ist als in jeder anderen Lage. Befindet sich dann der Körper in dieser Lage, so kann er sich nicht in Bewegung setzen, da seine Energie der Lage nicht noch mehr abnehmen kann. P ist also eine *Gleichgewichtslage*. Aber wir können noch etwas hinzufügen. Hat man den Körper in eine Lage gebracht, die von P etwas verschieden ist, und läßt man ihn dann los, so kehrt er in die Lage P zurück, eben weil er immer eine Lage aufsucht, in welcher die Energie der Lage kleiner ist als die ursprüngliche. Die Gleichgewichtslage P stellt sich also nach kleinen Störungen wieder her, was man dadurch ausdrückt, daß man sagt, das Gleichgewicht sei *beständig* oder *stabil*. Also:

Ein Körper ist im stabilen Gleichgewicht, wenn seine Energie der Lage ein Minimum ist.

Als Beispiel kann eine Kugel im tiefsten Punkt einer Kugelschale dienen.

Mit einer zweiten Art von Gleichgewicht hat man es zu tun, wenn die eine Kugel auf dem höchsten Punkt einer anderen Kugel liegt. Dann kann die erste Kugel fallen, aber da sie dies bei einer Bewegung nach rechts ebenso gut tun würde wie bei einer Bewegung nach links, so ist kein Grund vorhanden, weshalb sie nach der einen und nicht nach der anderen Seite gehen sollte. Nach der geringsten zufälligen Verschiebung aber wird sie sich immer weiter von der ursprünglichen Lage entfernen. Man sagt daher, daß sie sich in dieser Lage im *unbeständigen* oder *labilen* Gleichgewicht befindet.

Ein solches Gleichgewicht besteht immer, wenn die Energie der Lage ein Maximum ist.

Dieses Wort muß hier so aufgefaßt werden, daß sowohl bei einer Verschiebung nach der einen als nach der anderen Seite die potentielle Energie abnimmt. Obwohl der Körper stets Lagen von kleinerer potentieller Energie zu erreichen strebt, ist kein Grund einzusehen, weshalb er sich nach der einen und nicht nach der anderen Seite in Bewegung setzen soll. Der geringste zufällige Stoß gibt aber den Ausschlag und der Körper entfernt sich immer weiter von der Gleichgewichtslage.

Da derartige störende Einflüsse nicht ganz zu vermeiden sind, kann man das labile Gleichgewicht nicht verwirklichen.

Es verdient weiter bemerkt zu werden, daß bei einer Kugel, die auf einer sattelförmigen Fläche ruht, die Energie der Lage in bezug auf einige Verschiebungen ein Minimum und in bezug auf andere ein Maximum ist. Auch hier ist das Gleichgewicht labil.

Ein Körper kann endlich im *gleichgültigen* oder *indifferenten* Gleichgewicht sein; hiermit meint man, daß er auch nach einer Verschiebung noch im Gleichgewicht ist. Dies ist der Fall bei einer Kugel auf einer horizontalen Ebene und im allgemeinen, wenn bei einer Verschiebung die potentielle Energie weder ab- noch zunimmt.

Hat man es, was die Energie der Lage betrifft, mit keinem der besprochenen Fälle zu tun, so ist der Körper nicht im Gleichgewicht. Die potentielle Energie kann dann bei einer Bewegung in einer bestimmten Richtung abnehmen, während sie bei einer entgegengesetzten Bewegung zunehmen würde, und der Körper setzt sich in der zuerst genannten Richtung in Bewegung.

§ 156. **Andere Form der Gleichgewichtsbedingung.** Das im vorigen Paragraphen benutzte Beispiel von einer Kugel, die im tiefsten Punkt einer Kugelschale oder auf dem höchsten Punkt einer anderen Kugel liegt, gibt noch zu einer Bemerkung Veranlassung. Da nämlich die Fläche, auf welcher die Kugel ruht, im Berührungspunkt horizontal läuft, bleibt die Kugel bei einer unendlich kleinen Verschiebung auf derselben Höhe und es ändert sich also die Energie der Lage nicht. Dasselbe gilt auch in anderen Fällen. Wenn z. B. ein System durch eine Lage von stabilem Gleichgewicht P geht, so muß die potentielle Energie bei der Annäherung an P abnehmen und dann wieder zunehmen, was nur dann möglich ist, wenn sie bei einer unendlich kleinen Verrückung durch die Lage P hindurch denselben Wert behält. Also:

Wenn ein Körper im Gleichgewicht ist, ändert sich bei einer unendlich kleinen Verrückung die Energie der Lage nicht.

Wie diese Regel aufgefaßt werden muß, ergibt sich aus dem im § 41 Gesagten. Wir sahen, daß, wenn man es mit einem Maximum oder Minimum zu tun hat, für die Zunahme

der Funktion, welche durch eine Zunahme δ der unabhängigen Veränderlichen herbeigeführt wird, der Wert Null gefunden wird, *wenn man die zweite und höhere Potenzen von δ wegläßt.* Ebenso muß man, wenn man obige Regel auf eine kleine Verschiebung δ oder auf eine Drehung um den Winkel δ anwendet, die Größen, welche δ^2 enthalten, weglassen; wenn man dies tut, so findet man, wenn Gleichgewicht besteht, für die Veränderung der Energie der Lage den Wert Null.

Nun ist aber die Verminderung der potentiellen Energie gleich der Arbeit der Kräfte, die das Medium auf den Körper ausübt. Anstatt zu sagen, daß sich die potentielle Energie nicht ändert, kann man daher auch sagen, daß die Kräfte keine Arbeit tun. Hieraus ergibt sich die Regel:

Wenn Gleichgewicht besteht, verrichten die Kräfte bei einer unendlich kleinen Verrückung keine Arbeit.

In dieser Form gilt die Regel auch dann, wenn die Kräfte nicht durch ein Medium ausgeübt werden und man also nicht von einer Energie der Lage sprechen kann. Außerdem kann der Satz umgekehrt werden und man kann sagen: *Wenn die Kräfte bei keiner einzigen unendlich kleinen Verrückung eine Arbeit verrichten, so besteht Gleichgewicht.* Wenn dies nämlich nicht der Fall wäre, so würden die Kräfte den Körper in Bewegung setzen; sie würden diesem also kinetische Energie erteilen, was sie nur können, wenn sie eine Arbeit verrichten.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, daß Kräfte, die einen Körper nicht in Bewegung setzen können, auch keinen Einfluß auf eine bereits vorhandene Bewegung haben können.

Da alle Bewegungen eines festen Körpers auf Translationen und Rotationen zurückgeführt werden können, ist es für das Gleichgewicht nur nötig, daß die Kräfte keine Arbeit verrichten, wenn der Körper eine unendlich kleine Verschiebung oder Drehung erleidet. Die Arbeit einer Kraft in dem letzteren Fall wollen wir jetzt näher betrachten.

§ 157. **Arbeit einer Kraft bei einer unendlich kleinen Drehung.** Wir nehmen an, der Körper rotiere in der Richtung des Pfeils um eine Achse, die durch O (Fig. 109) geht und auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht. Der Punkt A in dieser Ebene sei der Angriffspunkt der Kraft. Diese zerlegen wir in AF in der Ebene der Figur und eine

zweite Komponente, die auf dieser senkrecht steht. Die letztere verrichtet keine Arbeit. Um die Arbeit von AF zu berechnen, nennen wir den unendlich kleinen Winkel, um den sich der Körper dreht, ε; wir drücken diesen Winkel in Bogenmaß aus, so daß ε auch die Verrückung eines Punktes vorstellt, der in der Entfernung 1 von der Achse liegt. Der Angriffspunkt A beschreibt nun einen unendlich kleinen Kreisbogen AB mit der Länge $\varepsilon \times OA$; dieser Bogen kann als eine gerade Linie betrachtet werden, die auf OA senkrecht steht.

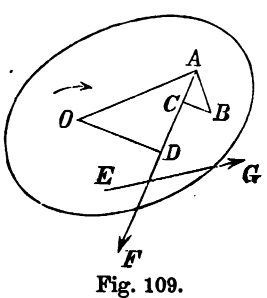


Fig. 109.

Die Arbeit von AF kann nun, wenn BC senkrecht zu AF gezogen wird, durch

$$AF \times AC$$

ausgedrückt werden. Zieht man OD senkrecht auf AF, so kann man hierfür schreiben

$$\varepsilon \times AF \times OD; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OAD und ABC in Verbindung mit dem Wert von AB folgt nämlich

$$AC = \varepsilon \times OD.$$

Das Produkt aus der auf der Achse senkrecht stehenden Kraft AF und dem Abstand OD der Linie, in welcher sie wirkt, von der Achse, wird das Moment von AF in bezug auf die Achse genannt. Man nennt das Produkt wohl auch das Moment der *gesamten* Kraft, die im Punkt A wirkt und von der AF die zur Achse senkrechte Komponente ist.

Nachdem wir eine bestimmte Drehungsrichtung als die positive gewählt haben, können wir das Moment einer Kraft positiv oder negativ nennen, je nachdem die Kraft den Körper in dieser oder in der entgegengesetzten Richtung zu drehen strebt. Gibt in Fig. 109 der Pfeil die positive Richtung an, so ist das Moment der Kraft AF positiv, dagegen das Moment der Kraft EG negativ.

Wird auch ε mit dem geeigneten Vorzeichen versehen, so gibt das Produkt von ε und dem Moment sowohl hinsichtlich des Vorzeichens

als auch der Größe die Arbeit der Kraft an. Man kann sich nämlich mit Hilfe einiger Figuren leicht davon überzeugen, daß die Arbeit positiv oder negativ ist, je nachdem das Moment der Kraft und die Rotation gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Aus dem Umstand, daß die Arbeit nicht durch die Größe der Kraft allein, sondern durch das Moment bestimmt wird, können wir bereits schließen, *daß, wenn ein fester Körper sich nur um eine feste Achse drehen kann, die Bewegung, welche eine Kraft hervorbringt, nur von ihrem Moment in bezug auf diese Achse abhängen kann.*

§ 158. **Einfacher Fall von Gleichgewicht.** Zwei gleiche Kräfte AF und BG (Fig. 110), die in entgegengesetzter Richtung längs derselben geraden Linie wirken, aber in verschiedenen Punkten derselben angreifen, sind miteinander im Gleichgewicht; es ist nämlich leicht einzusehen, daß bei jeder unendlich kleinen Verschiebung oder Drehung des Körpers die Arbeiten dieser Kräfte gleich sind und entgegengesetztes Vorzeichen haben.

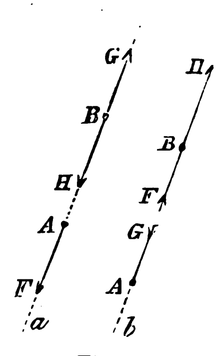


Fig. 110.

Man kann jetzt ferner schließen, daß die Kraft AF durch BH ersetzt werden kann, die der Kraft BG gleich und entgegengesetzt gerichtet ist und in demselben Punkt angreift wie diese.

Man nehme an, daß auf den Körper die Kraft AF, allein oder mit anderen zusammen, wirkt. Man kann, ohne den Körper in Bewegung zu setzen oder an der bereits vorhandenen Bewegung etwas zu ändern, im Punkt B zwei entgegengesetzte Kräfte BG und BH, beide gleich AF, anbringen, da die beiden neuen Kräfte ihre Wirkung gegenseitig aufheben. Von den drei Kräften kann man ferner AF und BG weglassen, da diese miteinander im Gleichgewicht sind. Man behält dann zum Schluß anstatt der Kraft AF die Kraft BH übrig.

Man darf daher bei einem festen Körper jede Kraft längs der Linie, in welcher sie wirkt, beliebig verschieben, aber auch nur in der Richtung dieser Linie. Wenn man die Kraft mit unveränderter Richtung und Größe in einem Punkt außer-

halb der Linie wirken ließe, würde sie eine andere Wirkung ausüben.

Die Kraft BH, durch die wir soeben AF ersetzten, verrichtet bei jeder unendlich kleinen Verrückung des Körpers eine ebenso große Arbeit wie die Kraft AF selbst.

§ 159. **Gleichwertige Systeme von Kräften.** Im allgemeinen kann man sagen: *Wenn zwei Systeme von Kräften, die auf einen festen Körper wirken, bei jeder unendlich kleinen Verrückung des Körpers dieselbe Arbeit verrichten, so hat das eine System dieselbe Wirkung wie das andere und kann daher durch dieses ersetzt werden.*

Derartige Systeme von Kräften wollen wir *gleichwertig* nennen.

In Fig. 111 mögen die Kräfte A das eine System und die Kräfte B das andere System bilden. Wir wollen annehmen, daß nur das erste System auf den Körper wirkt. Man kann dann, ohne etwas an dem Zustand zu ändern, die Kräfte B anbringen, wenn man gleichzeitig die durch C dargestellten Kräfte wirken läßt, welche den Kräften B gleich und entgegengesetzt sind und diese aufheben. Da nun angenommen wird, daß die Kräfte B bei jeder Verrückung eine ebenso große Arbeit verrichten wie die Kräfte A, so muß sich die Arbeit der Kräfte C von der Arbeit des Systems A nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die Systeme A und C zusammen verrichten also nie eine Arbeit, woraus folgt, daß sie miteinander im Gleichgewicht sind. Es ist also erlaubt, sie beide zugleich hinwegzunehmen, und dann bleiben anstatt des ursprünglichen Systems A nur die Kräfte B übrig.

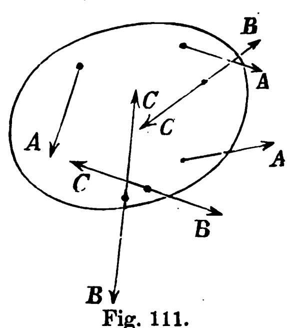


Fig. 111.

In den folgenden Paragraphen findet man verschiedene Beispiele zur Erläuterung. Wir werden dabei der Kürze halber nicht immer alle möglichen Bewegungen des Körpers besprechen.

§ 160. **Parallele Kräfte.** *Sind zwei derartige Kräfte AP und AQ (Fig. 112) nach derselben Seite gerichtet, so sind sie gleichwertig mit einer einzigen Kraft CR, welche dieselbe Richtung hat, gleich der Summe der gegebenen Kräfte ist und in einem Punkt C zwischen A und B angreift, dessen Lage bestimmt wird durch die Proportion*

$$AC : BC = BQ : AP \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Weil nämlich $CR = AP + BQ$ ist, verrichtet bei jeder *Verschiebung* des Körpers CR eine ebensogroße Arbeit wie AP und BQ zusammen. Daß dies auch bei einer *Drehung* der Fall ist, ist eine Folge der *Lage* des Punktes C. Man kann den Beweis für jede Drehung liefern, wir wollen uns jedoch auf eine Drehung um eine Achse beschränken, die durch den Punkt C geht und senkrecht auf der Ebene der gegebenen Kräfte steht. Aus der Proportion (2) folgt, daß die Momente von AP und BQ in bezug auf die genannte Achse gleich sind; ferner sind die Momente entgegengesetzt gerichtet und

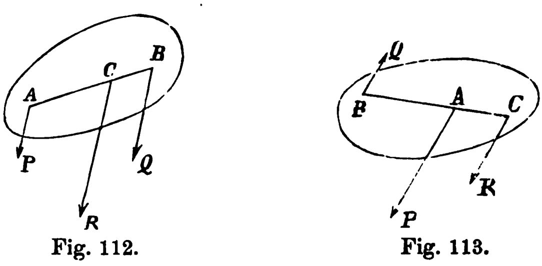


Fig. 112. Fig. 113.

bei einer Drehung um C verrichtet also die eine Kraft eine positive und die andere eine ebenso große negative Arbeit. Zusammen verrichten sie keine Arbeit, aber auch die Kraft CR tut dies nicht.

Zwei parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte AP und BQ (Fig. 113) sind, wenn sie von verschiedener Größe sind, ebenfalls mit einer einzigen Kraft gleichwertig. Diese hat dieselbe Richtung wie die größere der gegebenen Kräfte und ist gleich der Differenz von beiden; der Angriffspunkt C liegt auf der Verlängerung von AB an derjenigen Seite, an welcher die größere Kraft wirkt. Die Lage desselben wird bestimmt durch die Proportion

$$AC : BC = BQ : AP.$$

Ist, wie in diesen Fällen, eine *einzige* Kraft gleichwertig mit einem System von Kräften, so wird sie die *Resultante* des Systems genannt.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß in Fig. 113 der Punkt C außerhalb des Körpers liegen kann; auch in dem Fall von Fig. 112 kann es vorkommen (z. B. bei einem hohlen Körper oder einem gebogenen Stab), daß sich im Punkt C keine Materie befindet. Die Zusammensetzung der gegebenen

:räfte ist dann doch möglich, wenn man sich in C einen unkt denkt, der mit dem Körper fest verbunden ist. Ähnliche emerkungen gelten auch in anderen Fällen; man kann z. B. der in § 158 besprochenen Weise eine Kraft nach einem ınkt *außerhalb* des Körpers verlegen.

Auch mehr als zwei parallele Kräfte können, wenn die ;ebraische Summe nicht gleich Null ist, zu einer einzigen ›sultante vereinigt werden. Zu diesem Zwecke setzt man ch den gegebenen Regeln die erste Kraft mit der zweiten sammen, die hierdurch erhaltene Resultante mit der dritten 'aft, usw. In Fig. 114 z. B. ist CR die Resultante von AP, Q und DS. Man findet dieselbe Resultante, einerlei in ›lcher Reihenfolge man die Kräfte miteinander zusammensetzt.

Sind die gegebenen parallelen Kräfte nicht alle nach der- lben Seite gerichtet, so kann man zuerst die Kräfte ver- ıigen, welche die eine, und dann diejenigen, welche die dere Richtung haben. Schließlich kann man die beiden er- ltenen Resultanten miteinander zusammensetzen.

Wie man eine Kraft in zwei oder mehr andere parallele ·äfte *zerlegen* kann, kann man leicht aus dem Gesagten ab- ten. Sind in Fig. 112 außer der Kraft CR die Angriffs- nkte A und B der Komponenten gegeben, so wird die Größe ›ser letzteren bestimmt durch die Gleichungen

$$P = \frac{BC}{AB} \times CR \text{ und } BQ = \frac{AC}{AB} \times CR.$$

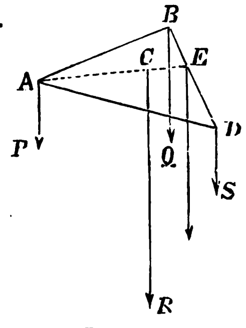


Fig. 114.

Um die Kraft CR (Fig. 114) in drei dere zu zerlegen, die in den Punkten B und D, die mit C in *einer* Ebene gen, angreifen, sucht man den Durch- hnittspunkt E von AC und BD und rlegt zunächst CR in eine Kraft in A ıd eine zweite in E, dann diese letztere BQ und DS. Auf diese Weise kann r Druck bestimmt werden, der durch ı Gewicht, mit dem ein auf einer ıtten horizontalen Ebene stehender Dreifuß belastet wird, auf len Stützpunkt ausgeübt wird.

Wenn die Anzahl der Stützpunkte größer als drei ist, so rd die Aufgabe, wie man bemerken wird, unbestimmt oder,

besser gesagt, man muß dann, um den Druck in jedem Punkt zu ermitteln, andere Betrachtungen (über die Formveränderungen) zu Hilfe rufen.

§ 161. **Mittelpunkt paralleler Kräfte.** Der Kürze halber haben wir am Anfang des vorigen Paragraphen gesagt, daß die Kraft CR (Fig. 112) im Punkt C angreifen müsse; sie kann aber ebensogut in jedem anderen Punkt der Linie CR angreifen, und eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die Resultante einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte.

Der Punkt C in den Figuren 112, 113 und 114 hat jedoch eine Eigenschaft, die die anderen Punkte der Linie CR nicht besitzen. Wenn man nämlich den Kräften, die miteinander zusammengesetzt werden müssen, unter Beibehaltung der Angriffspunkte, der Größe und des gegenseitigen Parallelismus eine andere Richtung gibt, so wirkt die resultierende Kraft immer noch längs einer Linie, die durch den Punkt C geht. Auch wenn es mehr als drei Kräfte gibt und die Angriffspunkte nicht alle in einer Ebene liegen, gibt es immer einen Punkt, der diese Eigenschaften hat und den man durch wiederholte Anwendung der im vorigen Paragraphen gegebenen Regeln finden kann. Dieser Punkt, welcher als Angriffspunkt der Resultante aufgefaßt werden kann, einerlei welche Richtung die gegebenen Kräfte haben, wird der *Mittelpunkt* der *parallelen Kräfte genannt.*

§ 162. **Schwerpunkt.** Die Kräfte, mit denen die Erde die Teilchen eines Körpers anzieht, können als einander parallel betrachtet werden und bilden daher ein System, auf welches das Gesagte anwendbar ist. Sie haben eine Resultante, die gleich der Summe, dem Gewicht des Körpers ist, und es ist auch hier ein Punkt mit der soeben besprochenen Eigenschaft vorhanden. Wir können allerdings nicht, während wir die Lage des Körpers unverändert lassen, die Richtung der Schwerkraft verändern, aber wir können den Körper selbst drehen, und auch hierbei nehmen die Kräfte in bezug auf den Körper eine andere Richtung an. *Der Punkt, welchen man als Angriffspunkt der Resultante der Schwerkraft ansehen kann, einerlei in welche Lage man den Körper bringt, heißt der Schwerpunkt.* Da nun die Resultante eines Systems von Kräften nichts

anderes ist als die Kraft, welche dieselbe Arbeit verrichtet, wie die Kräfte zusammen, können wir sagen:

Bei jeder Bewegung des Körpers wird die Arbeit der Schwerkraft gefunden, indem man das Gewicht mit der vertikalen Fallhöhe des Schwerpunktes multipliziert. Im Zusammenhang hiermit ist die Energie der Lage in bezug auf die Schwerkraft gleich dem Produkt aus dem Gewicht und der Höhe des Schwerpunktes über einer festen horizontalen Ebene.

Hieraus folgt, daß ein fester Körper, der sich um einen unbeweglichen Punkt in allen Richtungen drehen kann, im stabilen Gleichgewicht ist, wenn der Schwerpunkt vertikal unter, und im labilen Gleichgewicht, wenn er vertikal über dem festen Punkt liegt.

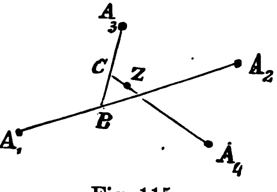


Fig. 115.

Es verdient bemerkt zu werden, *daß die Lage des Schwerpunktes vollkommen durch die Massen der materiellen Punkte bestimmt ist;* er wird daher auch der *Massenmittelpunkt* genannt. Wenn nämlich p_1, p_2, p_3, p_4 die Gewichte der fest miteinander verbundenen materiellen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 (Fig. 115) sind, so findet man nach dem Gesagten den Schwerpunkt dadurch, daß man zuerst auf $A_1 A_2$ den Punkt B so bestimmt, daß

$$A_1 B : A_2 B = p_2 : p_1,$$

dann auf der Linie $B A_3$ den Punkt C so, daß

$$B C : A_3 C = p_3 : (p_1 + p_2),$$

und so weiter. Wegen der Proportionalität der Gewichte mit den Massen m_1, m_2, m_3 usw. kann man hierfür auch schreiben

$$A_1 B : A_2 B = m_2 : m_1,$$

$$B C : A_3 C = m_3 : (m_1 + m_2), \text{ usw.}$$

In diesen Proportionen ist eine Definition des Massenmittelpunktes enthalten, die man auch benutzen könnte, wenn die Schwerkraft überhaupt nicht wirkte.

Man wendet diese Definition selbst auf materielle Punkte an, die nicht fest miteinander verbunden sind, so daß man vom Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt einer Flüssigkeitsmenge oder einer Anzahl materieller Teilchen spricht, die gar

nicht miteinander zusammenhängen. Wir wollen jedoch in den zunächst folgenden Paragraphen annehmen, daß wir es mit festen Körpern zu tun haben und wollen den Schwerpunkt als Angriffspunkt der resultierenden Schwerkraft auffassen.

§ 163. **Bestimmung des Schwerpunktes.** Man kann sich vorstellen, daß bei jedem Körper die Lage des Schwerpunktes theoretisch durch wiederholte Anwendung der Regel bestimmt wird, die wir (§ 160) für die Zusammensetzung paralleler Kräfte kennen gelernt haben. Die Anzahl der Kräfte ist allerdings unendlich groß, aber die höhere Mathematik besitzt Hilfsmittel, durch welche die Zusammensetzung wirklich ausgeführt werden kann.

In einfachen Fällen kann man das Ziel durch die folgenden Sätze erreichen.

a) Wenn ein Körper aus zwei Teilen besteht, deren Gewichte P_1 und P_2 und deren Schwerpunkte Z_1 und Z_2 (Fig. 116) sind, so ist der Schwerpunkt Z des ganzen Körpers der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte P_1 und P_2. Etwas ähnliches gilt, wenn man den Körper in drei, vier oder mehr Teile zerlegt hat. Wenn dies so möglich ist, daß die Schwerpunkte aller Teile in einer Ebene oder in einer geraden Linie liegen, so liegt auch der Schwerpunkt des ganzen Körpers in dieser Ebene oder dieser Linie.

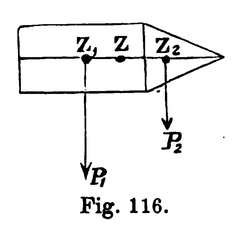


Fig. 116.

b) Wenn eine Ebene V so gelegt werden kann, daß jedem Teilchen des Körpers auf der einen Seite von V ein zweites Teilchen auf der anderen Seite entspricht, welches dieselbe Masse hat und ebensoweit von V entfernt ist, so liegt der Schwerpunkt in dieser Ebene.

Wenn man nämlich zunächst die Kräfte, die auf zwei derartige Teilchen wirken, zusammensetzt, so liegt der Angriffspunkt der Resultante in der Mitte der Verbindungslinie, also in der Ebene V. Dies gilt von allen Angriffspunkten, welche man erhält, wenn man die Teilchen zu je zweien zusammenfaßt.

§ 164. **Beispiele.** Man spricht nicht nur bei Körpern, sondern auch bei Flächen und Linien vom Schwerpunkt. Man kann sich nämlich vorstellen, daß eine gewisse Masse in einer

zusammenhängenden Schicht über eine Fläche oder in ähnlicher Weise über eine Linie verteilt ist. Natürlich liegt bei einem Teil einer Ebene der Schwerpunkt in dieser Ebene selbst, und ebenso bei einer geraden Linie in der Linie.

Die Masse einer dünnen Platte oder eines dünnen Stabes kann annähernd als über eine Fläche oder eine Linie verteilt angesehen werden.

In den folgenden Beispielen wollen wir annehmen, daß die Verteilung des Stoffes *homogen* ist, d. h. daß beliebige gleiche Teile des Körpers, der Fläche oder der Linie gleiche Massen haben.

a) *Fläche eines Dreiecks.* Durch Linien parallel zur Seite AC (Fig. 117) kann man das Dreieck in unendlich schmale Streifen teilen. Der Schwerpunkt jedes Streifens liegt in der Mitte der Länge, also auf der Linie BP, die B mit der Mitte von AC verbindet. Also muß der Schwerpunkt des Dreiecks ebenfalls auf BP liegen und ebenso auf jeder der beiden Linien, welche die Eckpunkte A und C mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbinden. Bekanntlich liegt der Durchschnittspunkt der genannten Linien so, daß $PZ = \frac{1}{3} PB$ ist.

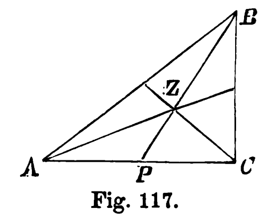


Fig. 117.

Den Schwerpunkt eines Vielecks kann man finden, indem man es in Dreiecke zerlegt.

b) *Prisma und Zylinder.* Die unendlich dünnen Platten, in welche man den Körper durch Ebenen parallel zur Grundfläche zerlegen kann, haben ihre Schwerpunkte alle in der Linie, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet. Der Schwerpunkt des Körpers muß also ebenfalls in dieser Linie liegen, und zwar in der Mitte, da die Ebene, welche durch die Mitte der Höhe parallel zu den Grundflächen gelegt wird, die in § 163, b erwähnte Eigenschaft hat.

c) *Dreiseitige Pyramide.* Durch Zerlegung in dünne Platten beweist man, daß der Schwerpunkt auf der Linie AE liegt, welche die Ecke A mit dem Schwerpunkt der Seitenfläche BCD (Fig. 118) verbindet. Ebenso muß er auf der Linie BF liegen, welche die Ecke B mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ACD

verbindet. Die Linien AE und BF schneiden sich so, daß $ZE = \frac{1}{4} AE$ ist.

d) *Vielseitige Pyramide und Kegel.* Zerlegt man eine vielseitige Pyramide durch Ebenen, welche durch die Spitze gehen, in eine Anzahl dreiseitiger Pyramiden, so haben diese ihre Schwerpunkte in der Ebene, welche parallel zur Grundfläche in einem Abstand gleich dem vierten Teil der Höhe gelegt wird. Dies, in Verbindung mit der Zerlegung in dünne Platten parallel zur Grundfläche, lehrt uns, daß der Schwerpunkt auf der Linie liegt, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet, und zwar um den vierten Teil der Länge von dem letzteren Punkt entfernt. Dieser Satz, welcher unabhängig von der Anzahl der Ecken ist, gilt auch für den Kegel.

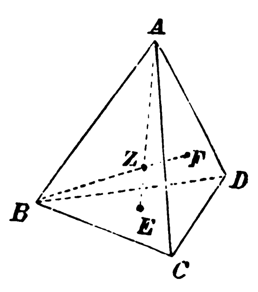


Fig. 118.

c) Der Schwerpunkt einer Rotationsfläche oder eines Rotationskörpers liegt in der Achse.

f) Der Schwerpunkt eines *Kreisbogens* liegt im Abstand kr/b vom Mittelpunkt, wenn b die Länge des Bogens, k die Sehne und r den Radius bedeutet.

Wenn man einen *Kreissektor* mit dem Radius r in unendlich kleine Dreiecke zerlegt, die ihre Spitze im Mittelpunkt haben, so kann man beweisen, daß der Schwerpunkt des Sektors mit dem Schwerpunkt des Kreisbogens zusammenfällt, der mit dem Radius $\frac{2}{3}r$ im Sektor konzentrisch mit dem Bogen desselben beschrieben wird.

Der Schwerpunkt eines Teils einer Kugelfläche, der die Gestalt einer *Kugelzone* oder einer *Kugelhaube* hat, liegt in der Mitte der Höhe.

Der Schwerpunkt eines *Kugelsektors* mit dem Radius r fällt zusammen mit dem Schwerpunkt eines innerhalb des Sektors liegenden Teils einer Kugelfläche, welche mit dem Radius $\frac{3}{4}r$ konzentrisch mit der Kugelhaube des Sektors beschrieben wird.

Ebenso wie man den Schwerpunkt bei einer Figur angeben kann, die aus zwei anderen zusammengesetzt ist, kann man es auch bei einer Figur, welche die Differenz zweier anderer Figuren ist, deren Schwerpunkte bekannt sind. Auf diese Weise bestimmt man den Schwerpunkt einer abgestumpften Pyramide, eines abgestumpften Kegels, der Fläche eines Kreissegments, eines Kugelsegments und einer Kugelschicht.

§ 165. **Kräftepaare.** Unter einem *Kräftepaar* versteht man ein System von zwei parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten

gleichen Kräften. Diese können nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden; eine solche Kraft kann nämlich bei einer Verschiebung des Körpers eine Arbeit verrichten und ein Kräftepaar kann dies nicht.

Ein Blick auf Fig. 119 lehrt, daß ein Kräftepaar eine Drehung hervorzubringen strebt; die Richtung derselben kann bei zwei Kräftepaaren, die in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen wirken, gleich oder entgegengesetzt sein.

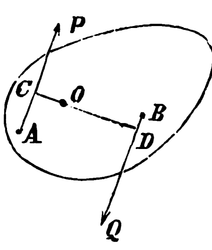


Fig. 119.

Wir wollen uns vorstellen, der Körper, auf den das Kräftepaar von Fig. 119 wirkt, mache eine unendlich kleine Drehung ε um eine Linie, die im Punkt O auf der Ebene des Kräftepaars senkrecht steht; die Richtung dieser Drehung mag mit derjenigen übereinstimmen, in welcher das Kräftepaar den Körper zu bewegen strebt. Zieht man COD senkrecht auf die Richtung der Kräfte, so ist nach § 157 die Arbeit des Kräftepaars

$$\varepsilon \times BQ \times OD + \varepsilon \times AP \times OC = \varepsilon \times AP \times CD.$$

Wo man auch den Punkt O annimmt, auch wenn er nicht zwischen den Linien AP und BQ, sondern außerhalb derselben oder auf einer derselben liegt, immer kommt man zu demselben Resultat.

Der Abstand CD der Linien, in denen die Kräfte wirken, wird der Arm des Kräftepaars genannt. Das Produkt aus ihm und der Größe der Kraft heißt das Moment des Kräftepaars. Nach der obigen Berechnung *wird, wenn die Drehungsachse auf der Ebene des Kräftepaars senkrecht steht, die Arbeit gefunden, wenn man das Moment mit dem Drehungswinkel multipliziert.*

Dies stimmt mit dem in § 157 Gesagten überein, mit dem Unterschied, daß bei einer Kraft nur von dem Moment in bezug auf eine bestimmte Achse die Rede ist, während das Moment eines Kräftepaars, auch ohne daß eine Achse angegeben ist, einen bestimmten Wert hat.

Daß die Arbeit eines Kräftpaars negativ ist, wenn die Richtung der Rotation derjenigen entgegengesetzt ist, in welcher das Kräftepaar den Körper zu drehen strebt, braucht kaum ausdrücklich bemerkt zu werden.

Solange das Moment dasselbe bleibt, ist die Arbeit eines Kräftepaars in einer gegebenen Ebene unabhängig von der Größe der Kräfte, der Richtung, in welcher sie wirken, und den Angriffspunkten; selbst zwei Kräftepaare, die in parallelen Ebenen wirken und in Drehungsrichtung und Moment übereinstimmen, verrichten bei einer Drehung um eine auf den Ebenen senkrecht stehende Achse dieselbe Arbeit.

Wenn man dies beachtet, wird man die Richtigkeit der folgenden Sätze einsehen:

a) *Zwei Kräftepaare in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen, die dasselbe Moment und dieselbe Drehungsrichtung haben, sind gleichwertig.*

b) *Zwei Kräftepaare in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen, die dasselbe Moment, aber entgegengesetzte Drehungsrichtung haben, sind miteinander im Gleichgewicht.*

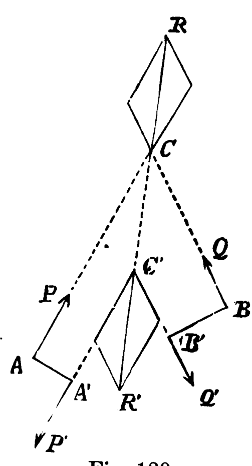


Fig. 120.

c) *Eine Anzahl von Kräftepaaren in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen sind gleichwertig mit einem einzigen Kräftepaar in einer diesen Ebenen parallelen Ebene, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräftepaare ist, wenn man die Momente positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Kräftepaare die eine oder die andere Drehungsrichtung haben.*

Diese Sätze können auch mit Hilfe des in § 158 Gesagten abgeleitet werden. Liegen z. B. die beiden Kräftepaare, von denen unter b) die Rede ist, in derselben Ebene (Fig. 120), so kann man die Kräfte AP und BQ nach dem Punkt C übertragen und zur Resultante CR vereinigen, und ebenso kann man die Kräfte $A'P'$ und $B'Q'$ zu $C'R'$ zusammensetzen. Die Kräfte CR und $C'R'$ sind gleich und entgegengesetzt, und wenn die Momente $AA' \times AP$ und $BB' \times BQ$ gleich sind, so wirken sie in der Richtung der Linie CC' und heben sich also einander auf.

§ 166. **Zusammensetzung von Kräftepaaren in nicht parallelen Ebenen.** In den Ebenen V und V' (Fig. 121), die sich in PQ schneiden, seien zwei beliebige Kräftepaare mit den Momenten M und M' gegeben. Nimmt man zwei Punkte A und

B beliebig auf PQ an und bringt man in diesen Punkten die entgegengesetzten Kräfte AC und BD an, die in der Ebene V senkrecht auf AB wirken und beide gleich M/AB sind, so kann das aus diesen beiden Kräften bestehende Kräftepaar nach dem im vorigen Paragraph Gesagten das in V gegebene Kräftepaar ersetzen, wenn es in der Drehungsrichtung mit demselben übereinstimmt, was man immer durch geeignete Wahl der Richtung von AC und BD erreichen kann. In derselben Weise kann das Kräftepaar in der zweiten Ebene ersetzt werden durch die beiden Kräfte AC' und BD', die entgegengesetzt gerichtet und beide gleich M'/AB sind und in der Ebene V' senkrecht auf AB stehen. Endlich kann man AC und AC' zu AE, und ebenso BD und BD' zu BF zusammensetzen. Hierdurch bekommt man ein neues Kräftepaar (AE, BF), welches mit den beiden ursprünglichen gleichwertig ist. Es wirkt offenbar in einer Ebene, die sowohl mit V als auch mit V' einen gewissen Winkel bildet.

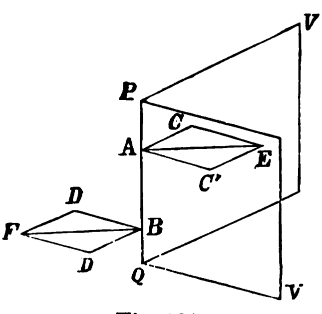


Fig. 121.

Durch wiederholte Anwendung dieser Operation kann man eine beliebige Anzahl von Kräftepaaren in verschiedenen Ebenen immer zu einem einzigen zusammensetzen.

§ 167. **Übertragung einer Kraft nach einem Punkt außerhalb der Linie, in deren Richtung sie wirkt. Behandlung eines beliebigen Systems von Kräften.** Es sei (Fig. 122) AP eine Kraft, die auf einen festen Körper wirkt, und O ein beliebiger Punkt des Körpers. Wir bringen in O zwei Kräfte OQ und OR in entgegengesetzter Richtung an, die beide gleich und parallel AP sind. Das System der drei Kräfte, welches offenbar mit der Kraft AP gleichwertig ist, kann man so auffassen, daß es aus der Kraft OR, die in O angreift und in Richtung und Größe mit AP übereinstimmt, und dem Kräftepaar (AP, OQ) besteht.

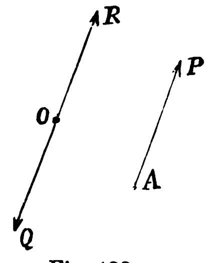


Fig. 122.

Man kann daher eine Kraft durch eine andere von derselben Richtung und Größe ersetzen, die in einem beliebigen Punkt angreift, wenn man noch ein geeignetes Kräftepaar hinzufügt.

Man kann hiervon Gebrauch machen, um ein beliebiges System von Kräften, die auf einen festen Körper wirken, so viel als möglich zusammenzusetzen. Man wählt dazu einen Punkt O aus und überträgt in diesen sämtliche Kräfte; man kann dann alle Kräfte in O zu einer einzigen vereinigen und ebenso die sämtlichen Kräftepaare, die man bei der Übertragung bekommt, zu *einem* Kräftepaar zusammensetzen. *Jedes System von Kräften kann also durch eine Kraft und ein Kräftepaar ersetzt werden.* Da eine Kraft und ein Kräftepaar sich niemals aufheben können, sieht man sofort, *daß der Körper unter der Wirkung des gegebenen Systems von Kräften nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn sowohl die resultierende Kraft als auch das resultierende Kräftepaar verschwindet.*

Auf die resultierende Kraft kann man den Satz von § 30 anwenden; *ihre Projektion auf eine beliebige Richtung ist also die algebraische Summe der Projektionen der gegebenen Kräfte auf dieselbe Richtung. Das Gleichgewicht erfordert, daß diese Summe gleich Null ist.*

Zerlegt man z. B. die auf einen Körper wirkenden Kräfte in je eine vertikale und eine horizontale Komponente, so muß die Summe der nach oben gerichteten Komponenten gleich der Summe der nach unten wirkenden sein.

Untersucht man in der angegebenen Weise, wann drei Kräfte miteinander im Gleichgewicht sind, so ergibt sich zunächst, *daß sie in einer Ebene liegen müssen.* Ferner sind zwei Fälle möglich.

a) *Die Kräfte wirken in parallelen Linien; dann muß die Resultante von zweien der Kräfte (§ 160) gleich und entgegengesetzt der dritten sein und in derselben Linie wirken wie diese.*

b) *Die Linien, in denen die Kräfte wirken, gehen durch einen Punkt. Man kann die Kräfte in diesen Punkt übertragen und zwei derselben mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte zusammensetzen. Die dritte Kraft muß dann wieder gleich und entgegengesetzt der Resultante sein.*

Wo man übrigens bei der Zusammensetzung eines Systems von Kräften den erwähnten Punkt O wählen soll, hängt von

den Umständen ab. Wenn ein Punkt des Körpers festgehalten wird, so überträgt man die Kräfte am besten in diesen Punkt bei einem vollkommen freien Körper dagegen am besten in den Schwerpunkt.

§ 168. **Bestimmung der inneren Kräfte in einem festen Körper.** *Wenn ein Körper in Ruhe ist, so müssen die Kräfte, welche auf einen beliebigen Teil desselben wirken, miteinander im Gleichgewicht sein.* Aus dieser Erwägung kann man etwas über die Kräfte ableiten, welche die angrenzenden Teile auf einen solchen Teil ausüben.

a) Es sei AB (Fig. 123) eine vertikale Säule, die auf einer horizontalen Ebene steht und mit einem Gewicht P belastet ist. Wir teilen in Gedanken diese Säule durch eine horizontale Ebene V in zwei Teile. Für das Gleichgewicht des oberen Teiles ist es nötig, daß nach oben eine Kraft gleich dem Gewicht P vermehrt um das Gewicht von AV selbst wirkt. Diese Kraft kann nur durch den unteren Teil der Säule ausgeübt werden. Beachtet man ferner, daß jeder Wirkung eine gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung entspricht, so kommt man zu dem Schluß, daß die beiderseits von V liegenden Teile der Säule in einer Richtung senkrecht zu dieser Fläche gegeneinander drücken.

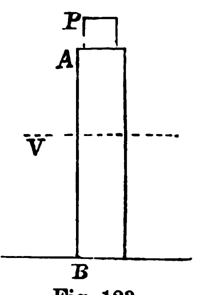


Fig. 123.

b) In derselben Weise sieht man ein, daß in einem Stab, der am oberen Ende aufgehängt ist und der an seinem unteren Ende das Gewicht P trägt, die Teile zu beiden Seiten eines horizontalen Durchschnitts senkrecht zu diesem Durchschnitt Kräfte aufeinander ausüben, welche die entgegengesetzte Richtung wie im Falle a) haben. Solche Kräfte nennt man *normale Spannungen.*

Im allgemeinen wird das Wort Spannung gebraucht, um die Kräfte zu bezeichnen, welche die Teile eines Körpers auf beiden Seiten irgend einer Fläche aufeinander ausüben.

Die Spannung eines Seils, die wir bereits früher kennen lernten, ist nicht allein die Kraft, mit der das Seil auf die Körper wirkt, an denen es befestigt ist, sondern auch die Kraft,

welche aneinander angrenzende Teile des Seils aufeinander ausüben.

c) In Fig. 124 stellt AB einen Stab vor, der in horizontaler Richtung mit dem einen Ende festgeklemmt ist, während das andere Ende mit dem Gewicht P belastet ist. V ist ein Durchschnitt senkrecht zur Länge, und wir suchen die Gleichgewichtsbedingung für den Teil des Stabes rechts von diesem Durchschnitt. Da sich die Kräfte, welche auf diesen Teil in vertikaler Richtung wirken, einander aufheben müssen, muß der Teil des Stabes links von V auf den Teil rechts eine Kraft Q vertikal nach oben ausüben, die, wenn wir vom Gewicht des Stabes absehen, gleich P ist. Natürlich übt VB auf VA eine gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kraft aus; so wird, kann man sagen, die Last P auf den Teil VA übertragen.

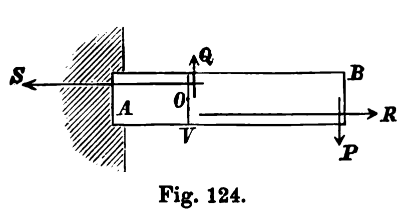


Fig. 124.

Diese Kräfte, welche man, da sie *längs* der Fläche V gerichtet sind, *tangentiale Spannungen* nennt, sind jedoch nicht die einzigen, welche zwischen den Teilen des Stabes wirken. Denn die Kraft Q bildet mit P ein Kräftepaar, und für das Gleichgewicht ist es nötig, daß dies durch ein anderes Kräftepaar von gleichem Moment aufgehoben wird. Dies kann nur aus Kräften hervorgehen, die außer der mit Q bezeichneten durch VA auf VB ausgeübt werden, Kräfte, wie sie z. B. durch R und S angegeben werden. Wenn man einsehen will, wie derartige Spannungen *entstehen*, so muß man bedenken, daß äußere Kräfte einem festen Körper immer eine gewisse, wenn auch noch so kleine Formveränderung geben; die inneren Kräfte, die man als *Elastizität* bezeichnen kann, werden erst durch diese Formveränderung hervorgerufen. In dem Falle von Fig. 123 entstehen die inneren Kräfte infolge einer Zusammendrückung. Bei Fig. 124 dagegen muß man sich vorstellen, daß das Gewicht P nicht allein den Teil VB des Stabes etwas VA entlang nach unten zieht, wodurch die Kraft Q erregt wird, sondern außerdem diesen Teil etwas um den Punkt O dreht. Dabei strebt es VB an der oberen Seite von VA zu

entfernen, drückt dagegen an der unteren Seite die beiden Teile gegeneinander.

d) Wir wollen uns vorstellen, der Stab von Fig. 123 sei nicht mit einem Gewicht belastet, sondern das untere Ende sei festgeklemmt und auf das obere Ende wirkten in horizontaler Ebene zwei Kräfte, die ein Kräftepaar bilden. Auf den Teil *A V* des Stabes muß dann *B V* mit einem gleichen und entgegengesetzten Kräftepaar wirken, welches natürlich nur aus tangentialen Spannungen in der Ebene *V* entspringen kann. Mit einem Kräftepaar, welches dem zuletzt genannten gleich und entgegengesetzt ist und also dieselbe Richtung hat wie das am Ende *A* gegebene, wirkt nun *A V* auf *B V*.

e) Es sei *M* (Fig. 125) der Teil eines Körpers, der durch eine Ebene *V* abgeschnitten wird, und es wirke auf diesen Teil ein beliebiges System von Kräften. Überträgt man diese sämtlich nach einem Punkt *Q* von *V*, so bekommt man eine

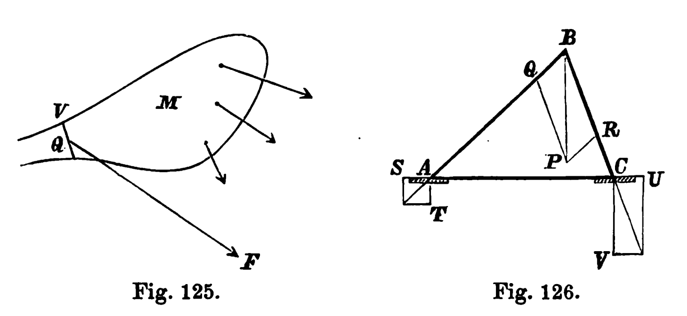


Fig. 125. Fig. 126.

resultierende Kraft *F* und ein in der Figur nicht angegebenes Kräftepaar. Soll Gleichgewicht sein, so müssen die verschiedenen Kräfte, die der Teil des Körpers links von *V* auf *M* ausübt, auf eine Kraft *Q*, die der Kraft *F* gleich und entgegengesetzt ist, und ein Kräftepaar zurückgeführt werden können, welches mit dem oben erwähnten im Gleichgewicht ist.

f) Fig. 126 stellt eine dreieckige Verbindung von Stangen vor, die in vertikaler Stellung mit den Punkten *A* und *C* auf zwei gleich hohen und vollkommen glatten horizontalen Ebenen ruht und an der Spitze *B* mit einem Gewicht *P* belastet ist. Wir wollen annehmen, daß das Gewicht der Stangen im Vergleich mit dieser Last vernachlässigt werden kann. Ferner denken wir uns, daß die Verbindung der Stangen bei *B* eine kleine

Drehung der einen in bezug auf die andere gestattet, so daß sich, wenn AC nicht vorhanden wäre, der Punkt B nach unten und zugleich die Punkte A und C nach außen bewegen könnten. Betrachtet man das Dreieck im ganzen, so findet man unmittelbar die vertikalen Drucke auf die Stützflächen, indem man P nach der Regel von § 160 in zwei parallele Kräfte in A und C zerlegt. Die inneren Kräfte aber findet man in folgender Weise. Man zerlegt P in BQ und BR in der Richtung BA und BC, bringt die Komponenten nach A und C und zerlegt sie hier in die horizontalen und vertikalen Komponenten AS und AT, CU und CV. Natürlich wird dabei $AS = CU$. Durch diese Kräfte wird AC ausgedehnt, während die Stangen AB und BC durch die Kräfte BQ und BR zusammengedrückt werden.

Wie bei dem Anbringen der Last die Spannung in AC durch eine kleine Ausdehnung dieses Stabes entsteht, wird nach dem Gesagten klar sein.

§ 169. **Ausdehnung einiger der vorhergehenden Sätze auf Körper von veränderlicher Form.** *Wenn ein Körper, dessen Gestalt verändert werden kann, unter der Einwirkung eines Systems von Kräften im Gleichgewicht ist, so kann man bei einem beliebigen Teil desselben die Bestandteile fest miteinander verbinden, ohne das Gleichgewicht zu stören. Die Kräfte, welche auf diesen Teil wirken, müssen daher stets den Bedingungen genügen, die wir für feste Körper von unveränderlicher Form kennen gelernt haben.*

Ein Seil z. B., welches mit seinen Enden in A und B befestigt ist, nimmt unter dem Einfluß der Schwerkraft die in Fig. 127 angegebene Gestalt an. Ein Teil CD kann nun durch einen unbiegsamen Stab von derselben Gestalt und demselben Gewicht ersetzt werden, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird. Auf diesen Teil wirken erstens die Schwerkraft, die man sich im Schwerpunkt Z angreifend denken kann, und zweitens die Spannungen der Seile AC und BD. Für das Gleichgewicht ist es nötig, daß die Tangenten in C und D sich auf der durch Z gehenden

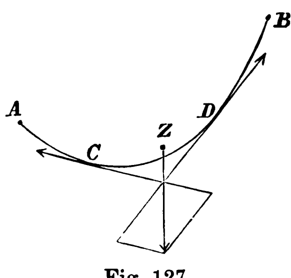


Fig. 127.

Vertikalen schneiden; zwischen der Größe der drei Kräfte muß weiter der bekannte Zusammenhang bestehen.

Als zweites Beispiel betrachten wir eine Flüssigkeitsmasse, die im Gleichgewicht ist. Man kann sich vorstellen, daß ein Teil derselben, der innerhalb einer geschlossenen Fläche liegt, ohne daß sich das Volum ändert, fest wird; die auf diesen Teil wirkenden Kräfte müssen also den Gleichgewichtsbedingungen genügen, die für feste Körper gelten. Bei einer Flüssigkeit sind aber noch andere Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen, denn man kann sich leicht Fälle denken, in denen Kräfte, die im Gleichgewicht sein würden, wenn sie auf feste Körper wirkten, dies nicht sind, wenn sie auf eine Flüssigkeit wirken.

Bei der Anwendung des genannten Satzes brauchen nur diejenigen Kräfte berücksichtigt zu werden, die auf den betrachteten Teil von außen wirken. Werden diese z. B. in horizontale und vertikale Komponenten zerlegt, so müssen die nach oben gerichteten Komponenten zusammen ebensoviel betragen wie die nach unten wirkenden. Von den *inneren* Kräften kann man hierbei ganz absehen, da sich ein Körper oder ein Teil eines Körpers durch die gegenseitige Einwirkung seiner Moleküle niemals als Ganzes nach einer bestimmten Richtung bewegen wird. Dies ist eine Folge davon, daß die inneren Kräfte zu je zweien gleich und entgegengesetzt sind.

Obwohl bei einem biegsamen Seil oder einer flüssigen Masse die Kräfte, welche die Erde auf die Moleküle ausübt, nicht mehr dieselbe Wirkung haben wie eine einzige Kraft im Schwerpunkt, so bleibt doch *eine* Eigenschaft, die dieser Punkt bei festen Körpern hat, bestehen.

Bei jedem Körper wird nämlich die Arbeit der Schwerkraft bei einer Bewegung und also auch die potentielle Energie in derselben Weise aus dem Steigen oder Sinken des Schwerpunktes gefunden wie bei einem festen Körper.

Fig. 128 unterscheidet sich von Fig. 115 dadurch, daß eine horizontale Ebene V angebracht ist, auf welche die Senkrechten $A_1 a_1$, $A_2 a_2$, $A_3 a_3, \ldots B b$, $C c$, $Z z$ gefällt sind. Aus den Proportionen von § 162 folgt

$$(p_1 + p_2) \times B b = p_1 \times A_1 a_1 + p_2 \times A_2 a_2,$$

$$(p_1 + p_2 + p_3) \times C c = (p_1 + p_2) \times B b + p_3 \times A_3 a_3$$

$$= p_1 \times A_1 a_1 + p_2 \times A_2 a_2 + p_3 \times A_3 a_3.$$

Man kann diese Reihe von Gleichungen fortsetzen, so das schließlic wenn P das Gewicht des ganzen Systems ist,

$$P \times Zz = p_1 + A_1 a_1 + p_2 \times A_2 a_2 + p_3 \times A_3 a_3 + \text{usw.}$$

wird. Diese Gleichung drückt aus, daß die potentielle Energie denselb Wert hat, als ob die gesamte Masse im Schwervunkt vereinigt wäre.

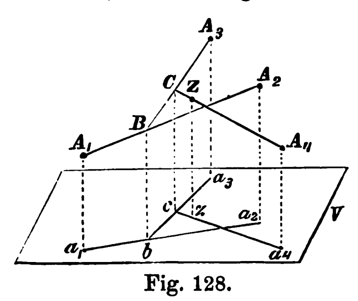


Fig. 128.

Man kann diesen Sa z. B. auf ein Seil (Fig. 127) a wenden, welches an zwei feste Punkten aufgehängt ist. Wenn e unausdehnbar und vollkommer biegsam ist, so ist die innere Energie immer dieselbe; das Seil ist daher (§ 155) im Gleichgewicht, wenn die potentielle Energie gegenüber der Schwerkraft ein Minimum ist, d. h. wenn der Schwerpunkt so tief als möglich liegt.

§ 170. **Eigenschaften des Schwerpunktes bei der Bewegung der Körper.** Man kann bei einem beweglichen System in jedem Augenblick die Lage des Schwerpunktes nach den Regeln von § 162 bestimmen. *Dieser Punkt bewegt sich nun geradeso, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle Kräfte auf ihn wirkten, welche auf die Punkte des Systems wirken.* Daher macht sich jede Kraft, einerlei in welchem Punkt sie angreift, durch eine ihrer Größe proportionale Geschwindigkeitsveränderung des Massenmittelpunktes bemerkbar.

Aus diesem Satz kann man das Folgende ableiten:

a) *Die Bewegung des Schwerpunktes ist unabhängig von den inneren Kräften,* denn diese sind zu je zweien gleich und entgegengesetzt und heben sich also, wenn sie im Schwerpunkt angebracht werden, einander auf.

Sind keine äußeren Kräfte vorhanden, so bleibt der Schwerpunkt entweder in Ruhe oder er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer geraden Linie.

Dies gilt z. B. vom Massenmittelpunkt des gesamten Sonnensystems, wenigstens wenn man annehmen darf, daß auf das System keine merkbaren äußeren Kräfte einwirken.

b) Wird ein Stab schief nach oben geworfen, so beschreibt der Schwerpunkt eine Parabel, während sich der Körper außer-

dem um diesen Punkt drehen kann. Die parabolische Bewegung des Schwerpunktes bleibt bei einer Granate bestehen, wenn sie in der Luft platzt, wenigstens solange keins der Bruchstücke den Boden erreicht.

c) Wir können wohl unsere Körperteile durch innere Kräfte in bezug aufeinander bewegen, aber unseren Schwerpunkt können wir nur mit Hilfe äußerer Kräfte von der Stelle bringen (§ 81).

Wenn jemand auf einer vollkommen glatten horizontalen Ebene ausgleitet, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer vertikalen Linie.

d) *Ein Kräftepaar, welches auf einen festen Körper wirkt, hat keinen Einfluß auf die Bewegung des Schwerpunktes. Ist der Körper anfangs in Ruhe, so kann er durch ein Kräftepaar nur eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse bekommen.*

Beweis des oben genannten Satzes. Wir nehmen drei rechtwinklige Koordinatenachsen an und nennen die Koordinaten des ersten Punktes x_1, y_1, z_1, die des zweiten Punktes x_2, y_2, z_2 usw., endlich die Koordinaten des Schwerpunktes x, y, z. Dann ist (vgl. § 169)

$$P x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \text{usw.},$$

wofür man wegen der Proportionalität der Gewichte mit den Massen auch

$$M x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \text{usw.}$$

schreiben kann, wenn man mit m_1, m_2 usw. die Massen der materiellen Punkte und mit M die Masse des ganzen Systems bezeichnet.

Diese Gleichung dient mit den anderen, die sich auf die y-Achse und die z-Achse beziehen, zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes.

Die Gleichung gilt für jeden Augenblick. Hieraus folgt, daß zwischen den Zunahmen $d x_1$, $d x_2$, ... und $d x$ der verschiedenen Koordinaten in einer unendlich kleinen Zeit $d t$ die Beziehung

$$M d x = m_1 d x_1 + m_2 d x_2 + \text{usw.}$$

besteht. Dividiert man nun diese Gleichung durch $d t$, so erhält man

$$M u = m_1 u_1 + m_2 u_2 + \text{usw.},$$

wenn u_1, u_2, ... und u die Geschwindigkeiten in der Richtung der x-Achse für die verschiedenen materiellen Punkte und für den Schwerpunkt bedeuten.

Daher ist die algebraische Summe der Bewegungsgrößen in der Richtung der x-Achse ebenso groß wie die Bewegungsgröße in derselben Richtung, die der Schwerpunkt haben würde, wenn in ihm die gesamte Masse M vereinigt wäre. Da dies für jeden Augenblick richtig ist, ist auch die *Veränderung* dieser algebraischen Summe während eines Zeitelementes $d t$ ebenso groß wie die Veränderung, welche die Bewegungsgröße

der Masse M, im Schwerpunkt gedacht, erleiden würde. Wenn aber X_1, X_2 usw. die auf die Punkte des Systems in der Richtung der x-Achse wirkenden Kräfte sind, so ist die betreffende Veränderung

$$(X_1 + X_2 + \ldots) dt.$$

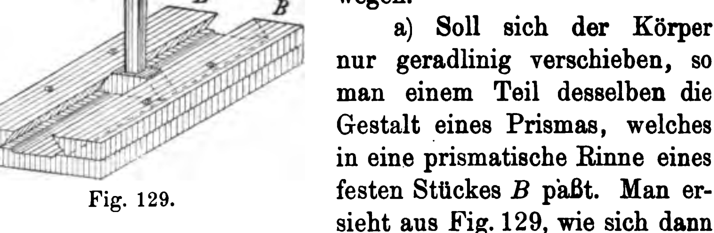
Die Geschwindigkeit u des Schwerpunktes muß sich also so ändern, daß, wenn die Masse M in ihm vereinigt wäre, die Bewegungsgröße derselben diese Zunahme erleiden würde, und dies würde der Fall sein, wenn auf die Masse die Kraft $X_1 + X_2 + \ldots$ wirkte. Da ein ähnliches Resultat für die Veränderung der Geschwindigkeit in der Richtung der y-Achse und der z-Achse gilt, ist der Satz bewiesen.

Auch der folgende Satz verdient erwähnt zu werden: *Ein starrer Körper, der anfangs in Ruhe ist, bekommt durch eine Kraft, die im Schwerpunkt angreift, eine Translation ohne Drehung.*

Wirkt ein beliebiges System von Kräften, so kann man diese nach dem Schwerpunkt übertragen; die resultierende Kraft bringt eine Translation, das resultierende Kräftepaar eine Drehung hervor.

Will man einem festen Körper eine vorgeschriebene Bewegung geben, so kann man auf jeden Punkt die Kraft wirken lassen, die *gerade* zur Bewegung derselben erfordert wird: man kann aber auch an Stelle dieses Systems von Kräften jedes andere, welches mit ihm gleichwertig ist, nehmen. Für eine *Translation*, bei welcher alle Teilchen dieselbe Beschleunigung in derselben Richtung bekommen müssen, würden *parallele* Kräfte dienen können, die auf jedes einzelne Teilchen wirken und die der Masse derselben proportional sind; solche Kräfte sind aber gleichwertig mit einer einzigen Kraft, die im Schwerpunkt angreift.

§ 171. **Beschränkung der Bewegung eines festen Körpers.** In vielen Fällen wird ein Körper gezwungen, sich in einer vorgeschriebenen Weise zu bewegen.



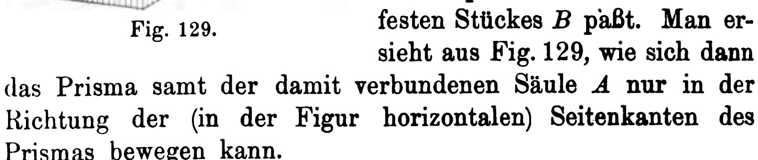


Fig. 129.

a) Soll sich der Körper nur geradlinig verschieben, so man einem Teil desselben die Gestalt eines Prismas, welches in eine prismatische Rinne eines festen Stückes B paßt. Man ersieht aus Fig. 129, wie sich dann das Prisma samt der damit verbundenen Säule A nur in der Richtung der (in der Figur horizontalen) Seitenkanten des Prismas bewegen kann.

Der Durchschnitt des Prismas kann sehr verschiedene Formen haben. In Fig. 130 wird der Körper A durch zwei

Zylinder BB geführt. Man kann auch einen einzigen Zylinder anwenden, wenn man nur in der einen oder anderen Weise eine Drehung verhindert.

b) Wird dagegen ein Zylinder, der in eine Höhlung paßt, verhindert sich zu verschieben, so ist nur eine Drehung möglich. Ein solcher drehbarer Zylinder wird eine *Achse* genannt.

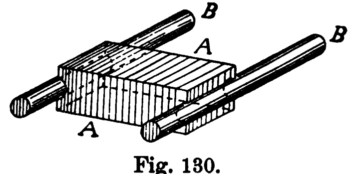


Fig. 130.

Man sieht in Fig. 131, wie eine Verschiebung von A unmöglich gemacht wird. Wir bemerken dabei, daß man den umschlossenen Teil der Achse *Zapfen* und den umschließenden Körper B das *Lager* nennt.

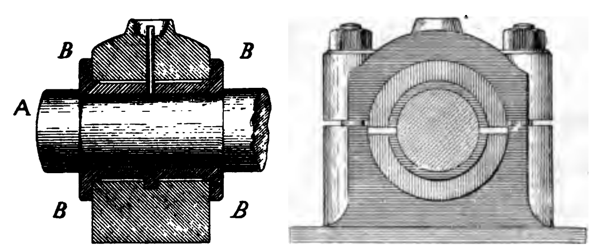


Fig. 131.

Dieser Körper hat nicht immer eine zylindrische Höhlung; es kommen auch andere Formen vor.

Bei horizontalen Achsen hat man gewöhnlich zwei Zapfen an den Enden; lange Achsen (Treibachsen in Fabriken) werden auch noch an anderen Stellen in derselben Weise gestützt.

Die Zapfen können zwischen zwei Stücken, eins unter und eins über der Achse, ruhen, die in geeigneter Weise gegeneinandergedrückt werden. Zuweilen ist nur das untere Lager vorhanden.

Vertikale Achsen können am unteren Ende in einen Kegel auslaufen, mit dem sie in einer Höhlung eines feststehenden Körpers ruhen.

c) Um zu bewirken, daß sich ein Körper mit geringer Reibung um eine horizontale Achse dreht, verbindet man ihn mit einer *Schneide*, d. h. einem scharfkantigen dreiseitigen Prisma, das mit seiner Kante auf einer horizontalen Platte liegt. Beide Teile müssen aus einem harten Stoff bestehen. Bei dem

Wagebalken, der in Fig. 132 abgebildet ist, ruht eine Schneide *A* aus Stahl auf einem Block *B*, der bei vielen Wagen aus Achat besteht. Je schärfer die Kante der Schneide ist, desto mehr nähert sich die Bewegung einer Drehung um eine Achse. In Wirklichkeit besteht sie jedoch immer im Rollen eines Zylinders auf einer Ebene.

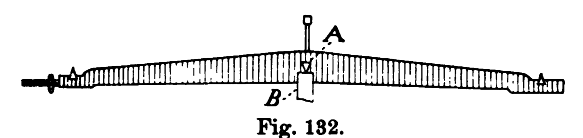
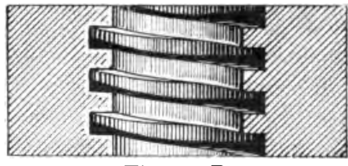


Fig. 132.

d) Man kann ein Rechteck oder ein Dreieck so einen Zylinder entlang bewegen, daß seine Ebene fortwährend durch die Achse geht, eine der Seiten in der Zylinderfläche liegt und jeder Punkt eine Schraubenlinie beschreibt; es wird dann ein *Schraubengewinde* beschrieben. Ist ein Zylinder mit einem solchen nach außen stehenden Gewinde versehen, so hat man eine *Schraube* oder *Schraubenspindel* (Fig. 133 A). Diese kann in eine Höhlung passen, in deren Wand eine Rinne angebracht ist, die einer Schraubenlinie entlang läuft. Diese Höhlung, von der in Fig. 133 B die Rückseite zu sehen ist, befindet sich in einem Stück, welches die *Schraubenmutter* genannt wird. Hält man diese fest, so kann die Schraube allein eine Drehung und gleichzeitig eine Verschiebung haben, so nämlich, daß bei jeder Umdrehung eine Verschiebung um einen Abstand gleich der Ganghöhe (§ 25) stattfindet.


Fig. 133 A.


Fig. 133 B.

Wie bereits gesagt wurde, kann das Profil der Schraube, d. h. der Durchschnitt des Schraubengewindes mit einer durch die Achse gehenden Ebene verschiedene Formen haben. Es kann rechteckig (Fig. 133) oder dreieckig (Fig. 134) sein. Es kommt oft vor, daß man dieselbe Schraubenmutter für ver-

schiedene Schrauben von derselben Dicke benutzen will und umgekehrt. Dazu ist es nötig, daß nicht nur die Ganghöhe, sondern auch das Profil übereinstimmt. Man hat daher Systeme von Schraubengewinden festgestellt, in denen zu jeder Dicke eine bestimmte Ganghöhe und ein bestimmtes Profil gehören.



Fig. 134.

In allen besprochenen Fällen wurde vorausgesetzt, daß der mit B bezeichnete Körper in Ruhe bleibt. Dies braucht jedoch nicht der Fall zu sein; im allgemeinen wird durch die beschriebenen Verbindungen nur die relative Bewegung des einen Körpers in bezug auf den anderen bestimmt. Die Räder eines Fahrzeuges führen in bezug auf das letztere eine Drehung aus und die Kuppelstangen, durch welche die Räder einer Lokomotive verbunden sind, drehen sich in bezug auf die Räder, obgleich ihre wirkliche Bewegung eine Verschiebung ist.

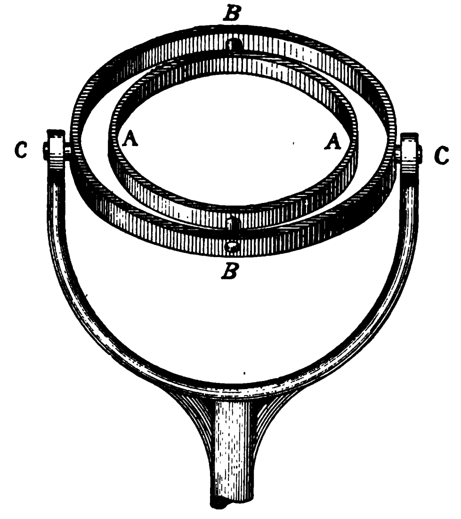


Fig. 135.

e) Außer den besprochenen gibt es noch viele andere und zuweilen sehr komplizierte Mittel, durch die man die Bewegung eines festen Körpers beschränkt.

Man kann diese Beschränkung z. B. so einrichten, daß ein einzelner Punkt immer an seiner Stelle bleibt. So kann man eine an dem Körper befestigte Kugel sich in einem hohlen Kugelsegment drehen lassen, welches sie zum Teil umschließt (Kugelgelenk). Oder man kann den Körper wie den Ring AA in Fig. 135 sich um eine Achse BB drehen lassen, deren Stützpunkte in einem Ring liegen, der sich selbst

um eine Achse CC dreht, die auf der ersten Achse senkrec steht (Cardanische Aufhängung).

Maschinen sind Körper oder Systeme von Körpern, d sich nur in der für einen bestimmten Zweck erforderlich Weise bewegen können. Die einem Teil derselben mitgetei Bewegung wird auf die anderen Teile übertragen und dal oft der Art nach vollständig verändert.

Die Verbindung zwischen den Teilen einer Maschine b steht in vielen Fällen darin, daß die Oberfläche des einen Tei ununterbrochen mit der Oberfläche des anderen in Berührun bleiben muß. Die oben besprochenen Fälle können als Beispiel dienen; ein anderes Beispiel hat man in zwei ineinander eingreifenden Zahnrädern.

Zwei Maschinenteile können auch durch Ketten, Seile oder Riemen miteinander verbunden sein.

§ 172. **Gleichgewicht an Maschinen.** Wenn die Oberflächen, mit denen sich verschiedene Teile einer Maschine berühren, übereinander *rollen*, so verrichten (wenigstens wenn wir von der *rollenden* Reibung [§ 182, d] absehen, die durch die Formveränderung der Oberflächen entsteht), die zwischen den Teilen wirkenden Kräfte bei der Bewegung keine Arbeit. Denn die Wirkung ist gleich und entgegengesetzt der Gegenwirkung, und die Punkte der Oberflächen, welche sich berühren, haben dieselbe Geschwindigkeit. Die Arbeit der Kräfte ist auch bei übereinander *gleitenden* Oberflächen gleich Null, wenn diese nur *vollkommen glatt* sind, und dasselbe ist der Fall, wenn eine Bewegung durch Seile oder Riemen übertragen wird, sei es, daß sie mit den Enden an den Maschinenteilen befestigt sind, sei es, daß sie der Oberfläche derselben eine gewisse Strecke lang folgen und sie durch Reibung mitführen. Die letztere Kraft verrichtet keine Arbeit, solange das Seil nicht über die Oberfläche gleitet, denn während die Punkte des Seils und die Punkte der Oberfläche dieselbe Geschwindigkeit haben, wirkt auf sie die Reibung mit gleicher Kraft in entgegengesetzter Richtung. Sind die Seile unausdehnbar, so ist auch die Arbeit ihrer Spannung gleich Null, denn die beiden Punkte, auf welche diese wirkt, verschieben sich in der Richtung des Seils gleichviel in demselben Sinne.

Endlich kann auch von der Veränderung der inneren

Energie der Seile abgesehen werden; nur in einigen Fällen, wenn diese sehr steif sind und sich ihre Krümmung ändert, würde man dies nicht tun dürfen.

Es gibt daher viele Fälle, in denen man nur die äußeren Kräfte, die auf die Teile einer Maschine wirken, zu berücksichtigen braucht. Dann gilt für die ganze Maschine die Betrachtung, welche in § 156 für einen einzelnen Körper mitgeteilt wurde.

Es wird also Gleichgewicht sein, wenn bei jeder unendlich kleinen Verrückung die Arbeit der Kräfte gleich Null ist, eine Bedingung, die besonders einfach wird, wenn es nur zwei Kräfte gibt, nämlich eine bewegende Kraft F und ein zu überwindender Widerstand P. Sind nämlich f und p die Projektionen der unendlich kleinen Verschiebungen der Angriffspunkte auf die Linien, in denen F und P wirken, und nennen wir die erste dieser Projektionen positiv, wenn sie in Richtung mit der Kraft übereinstimmt, und die zweite, wenn ihre Richtung der von P entgegengesetzt ist, so muß

$$F \times f = P \times p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sein.

Bewegt sich die Maschine, so ist die gesamte Arbeit $Ff - Pp$ gleich der Vermehrung der kinetischen Energie. Bei *langsamen* Bewegungen kann man von der letzteren absehen; man kommt dann zu der Gleichung (3) zurück und kann den durch sie bestimmten Wert von F nicht nur als die Kraft betrachten, die mit dem Widerstand P im *Gleichgewicht* ist, sondern auch als die Kraft, welche *während der Bewegung* den Widerstand überwindet.

Der Widerstand P kann das Gewicht einer Last sein, welche gehoben werden muß. Er kann auch aus dem Zusammenhang der Teilchen eines Körpers entspringen, durch den eine Messerklinge oder eine Säge bewegt wird. Endlich kann er aus dem Widerstand eines Hindernisses bestehen, gegen den ein Teil der Maschine infolge einer auf einen anderen Teil ausübten Kraft gedrückt wird. Ist F gegeben, so wird das Hindernis so weit eingedrückt, daß der Widerstand desselben gleich Ff/p ist; dieser Ausdruck bestimmt also den infolge der Kraft ausgeübten Druck. Aus dem Gesagten ergibt sich leicht, daß für das Heben einer schweren Last vermittelst einer kleinen Kraft nur nötig ist, daß der Angriffspunkt dieser

letzteren einen viel größeren Weg zurücklegt als die La ebenso, daß zum Überwinden eines Widerstandes P über ein Weg p immer dieselbe Arbeit erforderlich ist, einerlei, welch Maschine man sich bedient.

Außer durch Betrachtung der Arbeit kann man die Gleic gewichtsbedingung auch durch Zusammensetzen und Zerlegen vo Kräften und Kräftepaaren ermitteln. Das erste Verfahren führ oft leichter zum Ziel, aber es ist, wenigstens wenn es au eine Maschine im ganzen angewandt wird, mit dem Mange verbunden, daß die Drucke zwischen den sich berührenden Oberflächen oder die Spannungen der Seile unbekannt bleiben Diese Kräfte können nur aus der besonderen Betrachtung de Teile der Maschine abgeleitet werden (vgl. § 168).

In den folgenden Paragraphen findet man einige Beispiel zur Erläuterung des vorhergehenden.

§ 173. **Hebel. Wage.** Ein Körper, der sich um ein feste Achse drehen kann, wird, namentlich wenn er die Ge stalt eines geraden oder gebogenen Stabes hat, ein *Hebel* ge nannt. *Die Gleichgewichtsbedingung ist*, nach dem in §§ 15 und 172 Gesagten, *daß die algebraische Summe der Momente de Kräfte in bezug auf die Achse Null sein muß.*

Der *Wagebalken* ist ein gleicharmiger Hebel mit eine horizontalen Achse. In der Gleichgewichtslage muß der Schwer punkt vertikal unter der Achse liegen, wenn das Gleichgewicl stabil sein soll. Werden die beiden Arme mit Gewichten be lastet, die ein wenig voneinander verschieden sind, so nimm der Wagebalken eine schiefe Lage ein, wobei das Übergewicl mit dem Gewicht des Wag balkens im Gleichgewicht is Mit diesem Gewicht wird dah das Übergewicht verglichen.

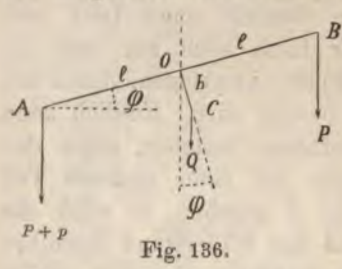


Fig. 136.

Es sei in Fig. 136 O d Drehungsachse, C der Schwe punkt des Wagebalkens, wä rend die Schalen in A und aufgehängt sind. Es sei fern P das Gewicht jeder der beiden Schalen nebst den auf ihn liegenden gleichen Gewichten, und Q das Gewicht des Wag balkens. Endlich nehme man an, daß A, O und B in gerad

Linie liegen, und zwar so, daß $AO = OB = l$, daß also die Wage gleicharmig ist, während $OC = h$ den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse vorstellt. Wenn auf eine der Schalen ein kleines Übergewicht p gebracht wird, so wird wieder Gleichgewicht eintreten bei einem Ausschlag φ, der durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p\, l}{h\, Q}$$

oder angenähert (§ 32) durch

$$\varphi = \frac{p\, l}{h\, Q}$$

bestimmt wird.

Die Empfindlichkeit, die durch das Verhältnis von φ und p gemessen wird, ist dann unabhängig von der Belastung P. Sie nimmt zu, wenn h kleiner wird. Man kann oft durch eine Regulierschraube h und damit die Empfindlichkeit ändern. Auch Vergrößerung von l würde die Empfindlichkeit erhöhen, wenn bei Verlängerung des Wagebalkens nicht auch das Gewicht Q größer würde. Q nimmt sogar stärker zu als l, weil man mit Rücksicht auf die Unbiegsamkeit bei Vergrößerung von l auch die Dicke größer nehmen muß. Im ganzen wird also die Empfindlichkeit abnehmen und ist es gerade vorteilhaft, kurze, leichte Wagebalken zu benutzen.

Wenn bei einer Wage die Punkte A, O und B nicht in gerader Linie liegen, so hängt die Empfindlichkeit von der Belastung ab. Im Falle von Fig. 137 ist die vertikale Linie

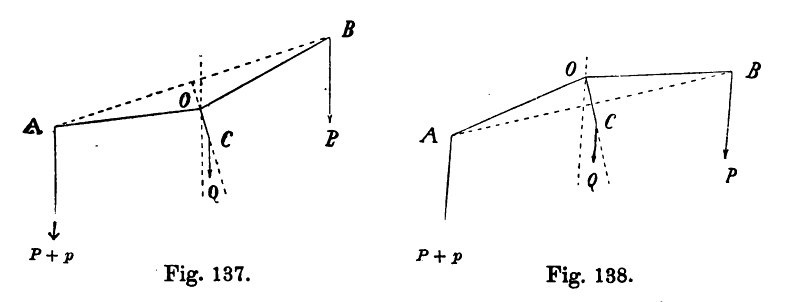


Fig. 137. Fig. 138.

durch A von O weiter entfernt als diejenige, welche durch B geht, und wir sehen leicht ein, daß bei Vergrößerung der gleichen Belastungen P der Ausschlag zunimmt; dabei wird also die Empfindlichkeit vergrößert. Im Falle von Fig. 138 haben wir

das Entgegengesetzte und die Empfindlichkeit nimmt bei zunehmender Belastung ab. Eine genaue Untersuchung der Empfindlichkeit bei verschiedenen Belastungen kann zuweilen zeigen, daß ein Wagebalken infolge von Biegung nacheinander die Formen von Fig. 137, 136 und 138 annimmt.

§ 174. **Systeme miteinander verbundener Stangen.** In Fig. 139 sind AC und CB Stangen, die, in vertikaler Ebene liegend, in C miteinander verbunden und in A und B unterstützt sind. Der Punkt M ist mit einem Gewicht Q belastet, während vom Gewicht der Stangen abgesehen wird. Wir wollen annehmen, daß die Verbindungen bei A, C und B wenigstens ein wenig drehbar sind und bedenken, daß, weil die Stangen etwas gedehnt oder zusammengedrückt werden können, eine kleine Drehung auch wirklich stattfinden kann. Der Stab CB kann nur im Gleichgewicht sein, wenn der Druck in C die Richtung seiner Länge hat; man bekommt also diesen Druck sowie den in A durch die in der Figur angegebene Konstruktion. Natürlich kann man den Druck in C auch durch die Bedingung bestimmen, daß sein Moment in bezug auf die durch A senkrecht zur Ebene der Figur gezogene Linie gleich dem Moment des Gewichtes Q sein muß.

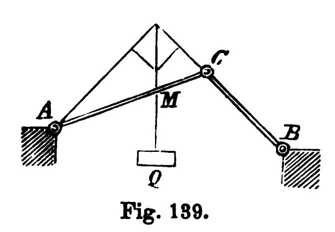


Fig. 139.

In Fig. 140 und 141 findet man ähnliche Verbindungen von Stangen, bei denen M auf der Verlängerung von AC liegt.

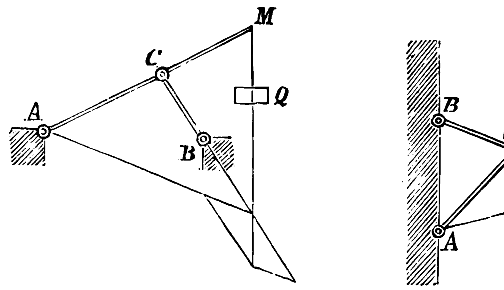


Fig. 140. Fig. 141.

Endlich ist in Fig. 142 ein System von drei Stangen abgebildet, die sich um A, B, C und D drehen können und von denen der mittlere die Last Q trägt. Sieht man wieder vom Gewicht

der Stangen ab, so ist für das Gleichgewicht nötig, daß AB und DC, wenn man sie verlängert, sich auf der vertikalen Linie QM treffen. Freilich wäre bei dieser letzteren Anordnung das Gleichgewicht labil.

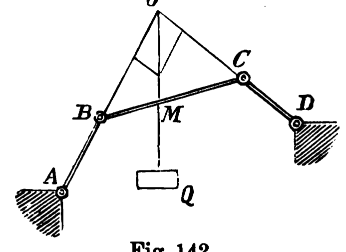


Fig. 142.

§ 175. **Rollen und Flaschenzüge.** Eine *Rolle* ist eine kreisförmige Scheibe, die sich um eine durch den Mittelpunkt gehende und auf ihrer Achse senkrecht stehende Ebene drehen kann. Am Umfang ist sie mit einer Rinne versehen, die ein Seil aufnehmen kann. Die Reibung verhindert dies letztere, auf der Scheibe zu gleiten.

Bei einer festen Rolle (Fig. 143) kann sich die Achse nicht verschieben; soll Gleichgewicht sein, so müssen an den Enden des Seils gleiche Kräfte wirken. Den Druck auf die Achse findet man in der in der Figur angegebenen Weise.


Fig. 143.

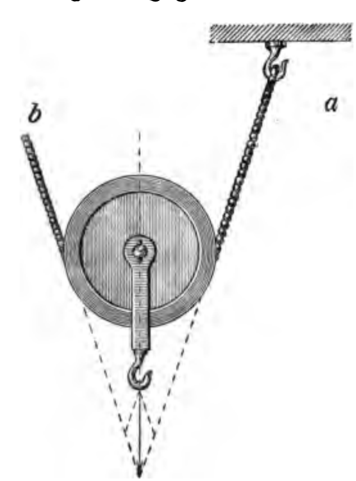


Fig. 144.

Eine bewegliche Rolle (Fig. 144) hängt in einem Seil, welches an dem einen Ende a befestigt ist, während am anderen Ende die bewegende Kraft wirkt. Der Bügel, in welchem die Achse läuft, ist mit einem Haken versehen, an welchem

die Last aufgehängt wird, die man in die Höhe ziehen will. Die Gleichgewichtsbedingung wird durch die Konstruktion eines Parallelogramms der Kräfte gefunden.

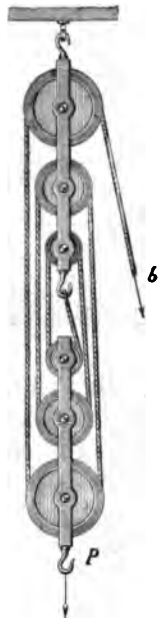


Fig. 145.

Fig. 145 zeigt die Einrichtung eines gewöhnlichen *Flaschenzuges*. Drei Rollen befinden sich in dem oberen, festen Kloben (sogenannten Flasche) vereinigt, und ebensoviel in dem beweglichen unteren Kloben. Nimmt man an, daß das Seil, welches über sämtliche Rollen läuft, zwischen den Flaschen überall dieselbe Richtung hat, so ist für das Gleichgewicht die Kraft $\frac{1}{6}P$ erforderlich, mit der man am Ende b zieht. Man findet dies, wenn man beachtet, daß die Last an sechs Seilen hängt und daß also die Spannung, die überall gleich groß sein muß, den genannten Wert haben muß, oder auch indem man ermittelt, um wieviel b nach unten gezogen werden muß, um P auf eine gewisse Höhe zu heben.

§ 176. **Winde.** Die Winde (Haspel, Wellrad) besteht aus einem horizontalen um seine Achse drehbaren Zylinder, um den ein Seil einigemal gewunden ist, welches beim Drehen auf- oder abgewickelt wird und am Ende die Last trägt. Die Drehung wird dem Zylinder durch eine Kurbel gegeben, die senkrecht zur Achse an dem Zylinder befestigt ist. Die Gleichgewichtsbedingung folgt aus der Betrachtung der Momente oder aus dem Satz von § 172.

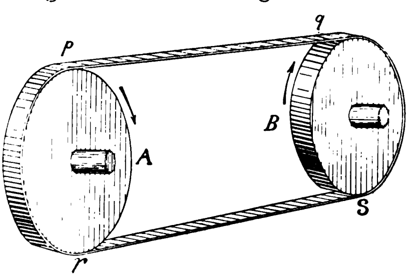


Fig. 146.

§ 177. **Mittel, um die Drehung einer Achse auf eine andere zu übertragen.**

a) *Seil ohne Ende.* Es seien (Fig. 146) A und B zwei kreisförmige Scheiben, die in derselben Ebene liegen und sich um Achsen drehen können, die senkrecht zu dieser Ebene durch ihre Mittelpunkte gehen. Ein Seil oder ein Riemen, dessen Enden

aneinander befestigt sind, ist um die Scheiben geschlagen und hinreichend gespannt, um ein Gleiten auf den Scheiben unmöglich zu machen. Wird A in der Richtung des Pfeils gedreht, so wird B in derselben Richtung bewegt; die Winkelgeschwindigkeiten sind dabei den Radien umgekehrt proportional. Der Teil rs des Seils ist stärker gespannt als der Teil pq; hieraus entspringt die Kraft, welche B in Bewegung setzt. Sollen sich die Scheiben in entgegengesetzter Richtung drehen, so benutzt man einen gekreuzten Riemen (Fig. 147).

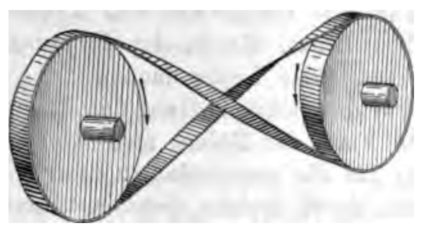


Fig. 147.

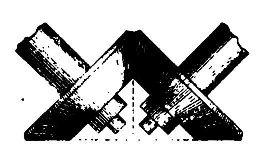


Fig. 148.

b) Bei parallelen Achsen können auch zylinderförmige, und bei Achsen, die sich schneiden (Fig. 148), kegelförmige *Reibungsräder* benutzt werden. Die sich berührenden Oberflächen derselben müssen rauh genug sein, damit die eine Scheibe durch die andere mitgeführt wird.

c) Muß ein erheblicher Widerstand überwunden werden oder will man sich eines bestimmten Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeiten versichern, so benutzt man *Zahnräder*. Fig. 149 stellt ein Paar derartige Räder vor, die auf Achsen senkrecht zur Ebene der Zeichnung befestigt sind. Da in derselben Zeit von beiden Rädern gleich viel Zähne durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte gehen, verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Anzahl der Zähne.

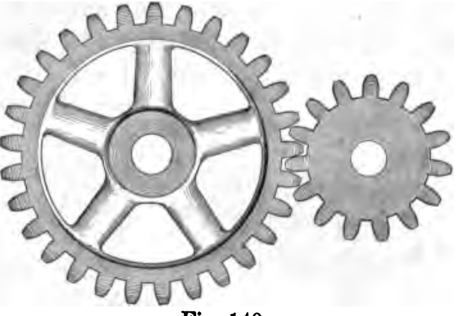


Fig. 149.

Räder mit wenig Zähnen heißen *Triebe*.

Die Zähne können auch, wie in Fig. 150, bei dem einen Rad an der Innenseite angebracht sein. In diesem Fall haben die Achsen dieselbe Drehungsrichtung, während sie sich im Falle von Fig. 149 in entgegengesetzter Richtung drehen.

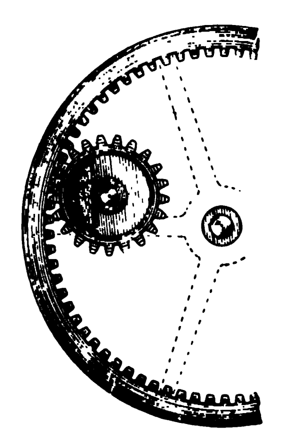


Fig. 150.

Bei Achsen, welche sich schneiden, werden *Kegelräder* angebracht. Eine Vorstellung davon bekommt man, wenn man sich die abgestumpften Kegel in Fig. 148 mit hervorstehenden Rippen versehen denkt, die in der Richtung der erzeugenden Linien laufen.

Für den richtigen Gang der Räder ist die Form der Zähne nicht gleichgültig; auf die geometrischen Betrachtungen, durch welche diese bestimmt werden kann, können wir hier jedoch nicht näher eingehen. Es mag nur bemerkt werden, daß man immer dafür sorgt, daß in jedem Augenblick mehr als *ein* Paar Zähne in Berührung sind.

Da der Gebrauch sehr großer sowie auch sehr kleiner Räder mit Schwierigkeiten verbunden ist, so überträgt man, wenn ein großer Unterschied in der Winkelgeschwindigkeit verlangt wird, die Bewegung nicht direkt von der einen Achse auf die andere. Man nimmt dann seine Zuflucht zu Systemen von Rädern, die zum Teil auf den Achsen selbst, zum Teil auf Hilfsachsen befestigt sind. Man kann nämlich die Bewegung von einer Achse A auf eine Achse B und von dieser mit Hilfe eines zweiten Rades, mit dem sie versehen ist, auf die Achse C übertragen, usw.

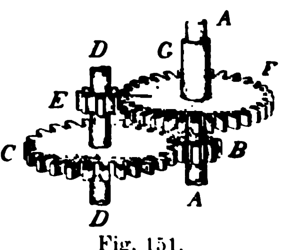


Fig. 151.

Als Beispiel erwähnen wir noch den Kunstgriff, durch den man die Zeiger eines Uhrwerks sich mit Winkelgeschwindigkeiten, die sich wie 1 zu 12 verhalten, um denselben Mittelpunkt drehen läßt. Der Minutenzeiger ist an der Achse A (Fig. 151) befestigt, die ihre Bewegung vermittelst eines Systems von Rädern von der be-

wegenden Kraft erhält. Durch die Räder B und C wird die Bewegung von A auf die Achse D übertragen. Diese Achse trägt ein zweites Rad E, dessen Zähne in das Rad F eingreifen, welches auf der hohlen Achse G befestigt ist, die A umschließt und mit der der Stundenzeiger verbunden ist.

§ 178. Mittel zum Umsetzen einer gradlinigen Bewegung in eine Drehung und umgekehrt. a) *Kurbel und Stange.* Es ei (Fig. 152) $A\,Q$ eine Stange, die sich nur n der Richtung ihrer ,änge hin- und herewegen kann, $O\,P$ ine Kurbel, die sich m eine senkrecht zur

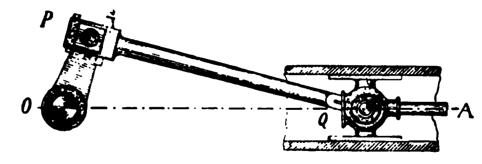


Fig. 152.

bene der Figur durch O gehende Achse dreht, $P\,Q$ endlich ne Stange, deren Enden mit $O\,P$ und $A\,Q$ drehbar verbunden nd. Wenn die Kurbel gedreht wird, geht die Stange hin ıd her und umgekehrt. Auf diese Weise wird die hin- ıd hergehende Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine eine Drehung von konstanter Richtung umgesetzt.

b) *Exzentrische Scheibe.* In Fig. 153 ist S eine kreisförmige heibe, die sich in ihrer Ebene um eine nicht durch den ittelpunkt gehende hse O drehen kann. e wird von einem ng R umfaßt, welcher der aus der Figur sichtlichen Weise in drehbar mit der



Fig. 153.

ange $A\,Q$ verbunden ist. Diese kann sich in der Richtung er Länge hin- und herbewegen und wird hierzu durch eine ehung von S gezwungen.

Dies würde auch der Fall sein, wenn der Ring weggelassen rde, der Stab $A\,Q$ bis nach S reichte und mit seinem abrundeten oder mit einem Rädchen versehenen Ende forthrend gegen den Umfang von S gedrückt würde. Dadurch ß man der Scheibe S eine andere Gestalt gibt, kann man „Schwingungsform" (§ 50) von $A\,Q$ beliebig abändern.

c) Auch durch ein Zahnrad und eine Zahnstange kann man eine drehende Bewegung in eine geradlinige umsetzen.

§ 179. **Schrauben.** Die relative Bewegung einer Schraube in bezug auf die Schraubenmutter, in welche sie paßt, oder umgekehrt der Schraubenmutter in bezug auf die Schraube ist immer eine Drehung verbunden mit einer Verschiebung. Wird der eine Körper festgehalten, so führt der andere diese beiden Bewegungen aus. Es ist aber auch möglich, daß der eine Körper sich verschiebt und der andere sich dreht.

Da man beim Gebrauche physikalischer Instrumente Gelegenheit hat, verschiedene Anwendungen der Schraube kennen zu lernen, können wir uns kurz fassen.

a) Man denke sich, eine Schraube werde vermittelst einer daran befestigten Kurbel gedreht, während die Schraubenmutter, in welcher sie sich dreht, festgehalten wird. Ist die Achse vertikal, so wird die Schraube bei der richtigen Drehungsrichtung steigen. Sie kann dabei ein Gewicht heben, dessen Größe man berechnen kann, wenn man beachtet, daß das Gewicht bei einer Umdrehung um die Ganghöhe der Schraube steigt.

b) Da man eine Schraube leicht um einen bestimmten Teil einer vollen Umdrehung drehen kann, liefert sie ein Mittel, um eine sehr kleine Verschiebung von bekannter Größe zu bewirken. Ist z. B. die Ganghöhe $\frac{1}{2}$ mm und ist die Schraube mit einem zylinderförmigen Kopf versehen, dessen Umfang in 100 gleiche Teile geteilt ist und der sich an einer festen Marke vorbeidreht, so kann man durch Drehung um einen Skalenteil eine Verschiebung von $\frac{1}{200}$ mm bewirken.

Schrauben, welche zu diesem Zwecke dienen, heißen *Mikrometerschrauben.* Oft ist dabei die Schraube selbst verhindert, sich zu verschieben. Dies ist z. B. bei der langen Schraube der *Teilmaschine* der Fall; die Schraubenmutter befindet sich hier in einem Schlitten, der sich nur parallel der Achse der Schraube verschieben kann. Der Schlitten trägt einen Stift, z. B. eine Diamantspitze, durch welche auf einem Gegenstand, der neben der Schraube befestigt ist, senkrecht zur Achse der Schraube Teilstriche ziehen kann. Indem man einen solchen Teilstrich jedesmal beschreibt, nachdem man die Schraube um einen bestimmten Winkel weitergedreht hat, bekommt man eine Skalenteilung.

Es ist klar, daß die Verschiebungen nur dann den Drehungen proportional sind, wenn die Schraube vollkommen genau gearbeitet ist. In Wirklichkeit sind immer Abweichungen vorhanden. Diese Fehler können zunächst dadurch entstehen, daß die Schraube von der Schraubenmutter nicht vollkommen umschlossen wird, sondern daß zwischen beiden etwas Spielraum ist. Man kann dann der Schraube eine kleine Verschiebung geben, ohne zu drehen; dieser Fehler wird unschädlich, wenn die letzte Drehung *vor* jeder Ablesung immer in derselben Richtung stattgefunden hat. Andere Fehler können daher rühren, daß sich die Ganghöhe allmählich ändert, oder daher, daß die Schraubenlinie von der idealen Form abweicht und infolgedessen nicht mehr jeder Teilung des Schraubenkopfes dieselbe Verschiebung entspricht. Die Abweichungen der letzteren Art wiederholen sich in der Regel bei jeder Umdrehung und heißen daher periodische Fehler. Man kennt genaue Methoden, um die verschiedenen Fehler experimentell zu bestimmen und in Rechnung zu bringen.

§ 180. **Schraube ohne Ende.** So nennt man eine Verbindung einer Schraube mit einem Zahnrad, wie in Fig. 154 abgebildet ist. Die beiden Achsen stehen aufeinander senkrecht und das Schraubengewinde paßt in die Zwischenräume zwischen den Zähnen. Dreht man die Schraube einmal um, so geht eine volle Windung einen Zahn des Rades entlang, woraus sich leicht ergibt, daß ein Zahn an die Stelle eines folgenden kommen muß; hat daher das Rad n Zähne, so bekommt es eine Winkelgeschwindigkeit, die n mal kleiner ist als diejenige der Schraube. Man kann also auf diese Weise eine schnelle Bewegung in eine viel langsamere umsetzen oder umgekehrt. Das erstere wird z. B. angewandt, um die Umdrehungen einer schnell rotierenden Achse zu zählen.

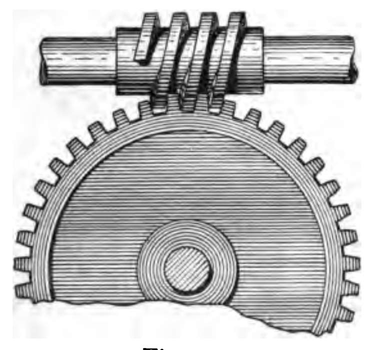


Fig. 154.

§ 181. **Mittel, um eine Verbindung zwischen zwei Teilen einer Maschine herzustellen oder aufzuheben.** Als Beispiele hiervon können die folgenden Vorrichtungen dienen.

a) Man kann bei einem Räderwerk die Achse des einen Zahnrades in einer solchen Weise verschiebbar machen, daß man nach Belieben die Zähne der Räder ineinander eingreifen lassen oder voneinander entfernen kann. In derselben Weise kann man bei einem Zahnrad und einer Schraube verfahren.

In Fig. 155 ist eine Vorrichtung abgebildet, welche dazu dient, die Bewegung der Achse *A* durch Vermittelung von Zwischenrädern auf die Achse *B* zu übertragen. In der Stellung, die durch den schraffiert gezeichneten Teil der Zeichnung angegeben wird, wirken zwei Zwischenräder und beide Achsen bekommen entgegengesetzte Drehungsrichtung. In der gestrichelt gezeichneten Stellung wirkt nur *ein* Zwischenrad und die Drehungsrichtung von *B* ist dieselbe wie die von *A*. In einer zwischenliegenden Stellung ist die Verbindung der Achsen aufgehoben. Der Übergang von der einen Stellung zur anderen wird durch Drehung beider Zwischenräder um eine Achse *C* bewirkt.

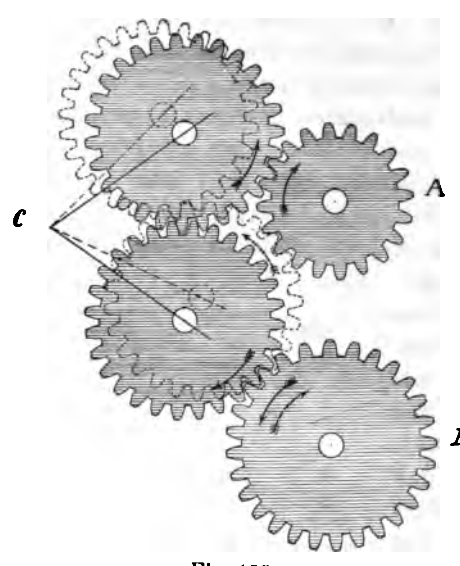


Fig. 155.

Man kann auch zwei Achsen, deren jede in der Verlängerung der anderen liegt, in Verbindung setzen. Man bringt zu diesem Zwecke an den einander zugekehrten Enden Scheiben an, deren Endflächen auf den Achsen senkrecht stehen. Diese Scheiben sind mit Zähnen versehen, durch deren Eingreifen bewirkt wird, daß die eine Achse die andere mitbewegt. Die eine Scheibe ist auf der Achse befestigt, die andere kann auf der Achse verschoben werden, obschon sie diese bei einer Drehung mitführt.

b) Beim Gebrauch eines Riemens ohne Ende kann man auf die Achse, die in Bewegung gesetzt werden soll, neben

der Scheibe, die fest mit der Achse verbunden ist, eine zweite anbringen, die sich unabhängig von dieser drehen kann. Durch eine Gabel, welche den Riemen umfaßt und sich verschieben läßt, kann der Riemen von der einen Scheibe auf die andere übertragen werden.

c) In Fig. 156 ist ein *Sperrrad* a mit dem *Sperrhaken* b abgebildet. Der letztere ist ein Stäbchen, welches sich leicht um den Punkt c dreht und mit dem Ende zwischen die Zähne des Rades fallen kann oder, wenn es nötig ist, durch eine Feder zwischen dieselben gedrückt wird. Die Gestalt der Zähne hat zur Folge, daß, wenn die Achse c festgehalten wird, das Rad a sich in der Richtung des Pfeiles, aber nicht in der entgegengesetzten Richtung bewegen kann.

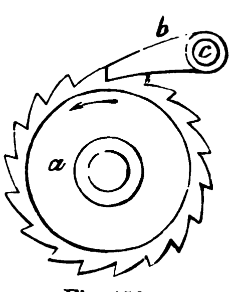


Fig. 156.

Eine solche Vorrichtung wird angewandt, um für die Achse A in Fig. 91 (S. 175) nur eine Bewegung in *einer* Richtung zu ermöglichen.

Ist die Achse c an einem zweiten Rad befestigt, welches sich um dieselbe geometrische Achse wie das Rad a drehen kann, so wird dieses Rad bei der einen Bewegungsrichtung durch a mitbewegt, bei der anderen dagegen nicht.

§ 182. **Nähere Betrachtung der Reibung.** Wenn ein Körper auf einer vollkommen glatten, horizontalen Ebene durch eine Kraft F fortgezogen wird, so ist die Arbeit dieser Kraft gleich der Vermehrung der kinetischen Energie des Körpers. Anders ist es, wenn Reibung vorhanden ist; die Zunahme der kinetischen Energie ist dann kleiner als die Arbeit von F, und zwar um soviel kleiner, als der entwickelten Wärme entspricht.

Dies ist *eine* Art, wie man die Erscheinungen betrachten kann. Eine andere Auffassung besteht darin, daß man nicht nur auf die Arbeit der Kraft F, sondern auch auf die, natürlich negative, Arbeit der Reibung achtet. Da die Bewegung des Körpers als Ganzes in der gewöhnlichen Weise durch die beiden Kräfte bestimmt wird, muß die kinetische Energie des Körpers eine Zunahme erleiden, welche gleich der gesamten

Arbeit der Kraft F und der Reibung ist. Bei dieser zweiten Betrachtungsweise braucht von der Wärmeentwicklung nicht gesprochen zu werden (vgl. § 144, c).

Ähnliche Bemerkungen gelten für jedes System von Körpern, bei dem die Reibung im Spiel ist. *Die Zunahme der kinetischen Energie der sichtbaren Bewegungen beträgt weniger als die Arbeit der wirkenden Kräfte, die Reibung nicht mitgezählt; der Unterschied entspricht der Wärmeentwicklung.*

Nach der zweiten Auffassung kann man sagen:

Die Vermehrung der kinetischen Energie der sichtbaren Bewegungen ist gleich der Arbeit aller Kräfte, die Reibung einbegriffen.

Nach dem letzten Satz kann die Gleichgewichtsbedingung, die wir in diesem Kapitel kennen lernten, immer angewandt werden, wenn man nur die Reibung als eine besondere Kraft in Rechnung bringt.

Wir wollen nun den Einfluß dieser Kraft näher betrachten.

In Fig. 157 stellen A und B zwei Körper vor, die aufeinander gleiten können; der eine, B, wird festgehalten, während der andere durch eine gewisse Kraft N senkrecht gegen den ersteren gedrückt wird. Übt man nun außerdem auf A eine zweite Kraft F, parallel zur Grenzfläche aus, so entsteht, solange diese Kraft klein ist, noch keine Bewegung; es wird eine Reibung erregt, welche die Kraft aufhebt. Beim Zunehmen von F wird auch die Reibung größer, aber es zeigt sich, daß diese *nicht höher steigen kann als bis zu einem gewissen Betrag, welcher dem normalen Druck N proportional ist* und also mit cN bezeichnet werden kann. Die Zahl c wird der *Reibungskoeffizient* genannt; sie ist bei der Reibung von Metall auf Metall wohl niemals größer als 0,3, kann aber durch den Gebrauch von Schmiermitteln auf 0,01 herabgemindert werden. Der Wert ist von der Beschaffenheit der Oberflächen und des Schmiermittels sowie von der Temperatur abhängig. Sobald die Kraft F den Wert cN übersteigt, kann sie nicht mehr durch die Reibung aufgehoben werden, und der Körper setzt sich in Bewegung.

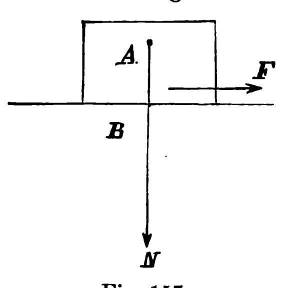


Fig. 157.

Hieraus kann man ableiten, wann eine *einzige* Kraft P den Körper A auf B fortschieben kann. Wir nehmen an, daß diese Kraft einen spitzen Winkel α mit der nach der Seite von B gezogenen Normalen macht; sie kann dann in eine Komponente $P\cos\alpha$, in der Richtung dieser Linie und eine zweite, $P\sin\alpha$, in der Richtung der Oberfläche, zerlegt werden. Die Reibung kann nun keinen größeren Wert als $cP\cos\alpha$ annehmen. Ist also $P\sin\alpha < cP\cos\alpha$, so entsteht keine Bewegung, wohl aber, wenn $P\sin\alpha > cP\cos\alpha$ ist.

Man kann diese Ungleichungen in der Form $\operatorname{tg}\alpha < c$ und $\operatorname{tg}\alpha > c$ schreiben. Bestimmt man also einen Winkel β so, daß

$$\operatorname{tg}\beta = c$$

ist, so bringt die Kraft den Körper in Bewegung oder läßt ihn in Ruhe, je nachdem $\alpha >$ oder $< \beta$ ist.

Der Winkel β wird der Reibungswinkel genannt; es ist der Winkel, den die Kraft mit der Normalen bilden muß, wenn sie bei der geringsten Zunahme den Körper in Bewegung setzen soll. Man kann auch sagen, daß die Reaktion, welche der Körper B auf A ausübt und durch welche eine auf A wirkende Kraft aufgehoben werden kann, niemals einen größeren Winkel mit der Normalen bildet als den Reibungswinkel.

Aus dem Gesagten ergibt sich ohne weiteres, wann ein Körper auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht sein kann. Ist CN (Fig. 158) die Normale und bilden die Linien CD und CE mit derselben Winkel gleich dem Reibungswinkel, so wird der Körper in Ruhe bleiben, solange die Resultante aller Kräfte, die auf ihn wirken, innerhalb des Winkels DCE liegt; hat z. B. diese Kraft die Richtung CP, so ist die Komponente derselben in der Richtung der schiefen Ebene nicht hinreichend, um die Reibung zu überwinden, deren maximale Größe durch die Komponente in der Richtung der Normalen bestimmt ist. Jede Kraft, die wie CQ außerhalb des genannten Winkels liegt, wird den Körper in Bewegung setzen. Wirkt nur die Schwerkraft auf den Körper und verändert man den Neigungswinkel der Ebene, so gleitet der Körper abwärts, sobald dieser Winkel größer als β wird.

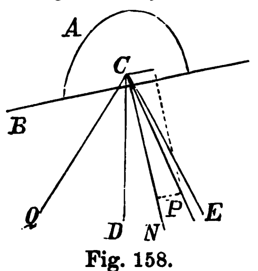


Fig. 158.

Ebenso wie bei der schiefen Ebene kann man auch in allen anderen Fällen, in denen die Reibung im Spiel ist, untersuchen, wann die Kräfte gerade hinreichen, um eine Bewegung nach der einen oder nach der anderen Seite zu bewirken. Zwischen diesen beiden Fällen liegen dann stets viele andere, in denen keine Bewegung entsteht.

Zur weiteren Erläuterung können die folgenden Beispiele dienen.

a) Ein Körper AB (Fig. 159) ist durch eine horizontale Ebene AC und eine vertikale Ebene BC unterstützt (eine an eine Wand angelehnte Leiter); P sei die vertikal angenommene Resultante der Kräfte, die auf den Körper wirken. Zieht man in A und B die Normalen AD und BD und macht man die Winkel DAE und DBF gleich den Reibungswinkeln, so müssen die Richtungen der in A und B durch die Unterstützungsflächen ausgeübten Kräfte innerhalb dieser Winkel liegen. Der Bedingung, daß sich die Linien, in welchen diese Kräfte wirken, auf der Verlängerung von PG schneiden, kann nur genügt werden, wenn diese Linie das Viereck $HEFD$ durchschneidet. Fällt PG links von E, so gleitet der Körper aus. Bei dieser Betrachtung ist darauf Rücksicht genommen, daß wegen der Neigung zum Ausgleiten die Reaktion in A nach links und die in B nach oben gerichtet ist.

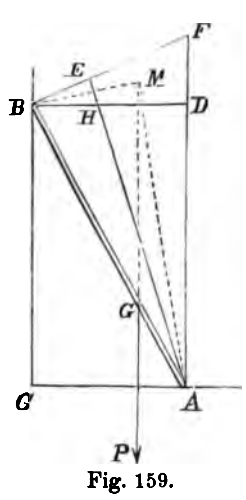


Fig. 159.

Sobald der Durchschnittspunkt M bekannt ist, kann man die Drucke in A und B bestimmen, indem man P nach diesem Durchschnittspunkt verschiebt und nach den Richtungen MA und MB zerlegt. Da nun aber M noch jeder beliebige Punkt auf der Verlängerung von PG sein kann, der innerhalb des Vierecks $HEFD$ liegt, so bleiben die Drucke bis zu einem gewissen Grade unbestimmt. Dies ist eine Folge davon, daß, solange die Reibungen in A und B nicht die größten Werte zu haben brauchen, welche sie annehmen können, es hauptsächlich die erste oder hauptsächlich die zweite sein kann, die

den Körper im Gleichgewicht hält. Dies hängt von kleinen Einzelheiten in der Art und Weise ab, wie der Körper gegen die Ebenen angelehnt wurde.

b) Ein Körper M (Fig. 160) ist mit einer Achse a versehen, die genau in das Lager b paßt. Wir wollen annehmen, daß alle auf M wirkenden Kräfte zu einer einzigen vertikalen Kraft F zusammengesetzt werden können. Diese wird nun bei der geringsten Zunahme den Körper in Bewegung setzen, wenn sie so weit rechts oder links von O fällt, daß der Winkel Oqp gleich dem Reibungswinkel β ist. Dazu muß, wenn $Oq = r$ ist, $Op = r \sin \beta$ sein, so daß die Dicke der Achse nicht ohne Einfluß ist.

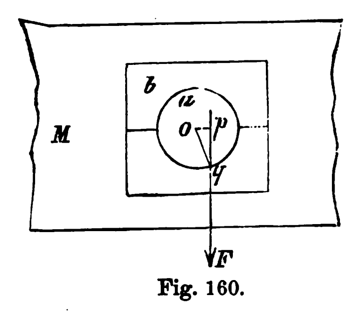
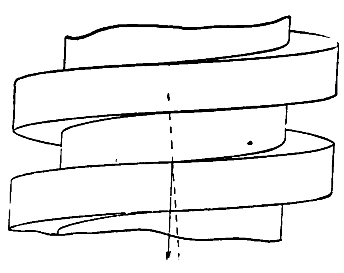


Fig. 160.


Fig. 161.

c) Einen großen Einfluß hat die Reibung bei Schrauben. Bei einem rechteckigen Profil (§ 171, d) kann eine Kraft in der Längsrichtung der Schraube keine Drehung bewirken, wenn die Normale auf die Schraubenfläche mit dieser Richtung einen Winkel bildet, der kleiner als der Reibungswinkel ist. Es ist leicht einzusehen, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn der Winkel, den die Windungen mit einer Ebene senkrecht zur Achse bilden (vgl. Fig. 158), kleiner ist als der Reibungswinkel. Bei einer Schraube mit dreieckigem Profil ist der Einfluß der Reibung noch größer. Man benutzt das letztere überall da, wo es sich um dauerhafte Befestigung handelt, während Schrauben mit viereckigem Profil mehr zur Übertragung von Bewegungen gebraucht werden.

Eine Schraube mit kleiner Ganghöhe kann bereits durch kleine Kräfte, die in einer Ebene senkrecht zur Achse wirken, bewegt werden. Um nun bei einer Schraube, die zur Befesti-

gung dienen soll, zu verhindern, daß dies durch zufällige Stöße oder Erschütterungen geschieht, ist es nötig, die Windungen der Schraube kräftig gegen die Windungen der Schraubenmutter zu drücken. Dies kann in folgender Weise geschehen. Man denke sich die Schraubenmutter in Fig. 133, B aus zwei übereinander liegenden Teilen zusammengesetzt (Mutter und Gegenmutter) und diese durch eine Drehung in entgegengesetzter Richtung gegeneinandergedrückt. Die eine Schraubenmutter drückt dann die andere gegen die Windungen der Schraube an.

d) Wenn im Mittelpunkt eines Zylinders, der auf einer horizontalen Ebene liegt, eine horizontale Kraft senkrecht zur Achse wirkt, so würde der Zylinder in vollständiger Abwesenheit von Reibung fortgleiten. Sind dagegen die Oberflächen rauh genug und werden sie hinreichend aneinandergedrückt, so verhindert die Reibung die Bewegung des Berührungspunktes auf der Ebene. Der Zylinder kann dann nur *fortrollen* und *diese* Bewegung würde bereits bei einer sehr kleinen horizontalen Kraft entstehen, wenn sich ihr nicht ein Widerstand von anderer Art als der bis jetzt besprochene, die sogenannte *wälzende* oder *rollende* Reibung, widersetzte. Diese ist dem Umstande zuzuschreiben, daß der Zylinder und die Unterstützungsfläche etwas eingedrückt werden, so daß eine kleine Berührungsfläche besteht. Die bewegende Kraft F (Fig. 162) muß jetzt den Zylinder um die Linie a umkippen und dazu muß sie eine gewisse Größe haben.

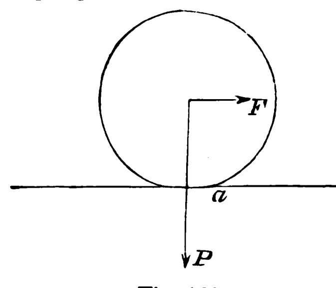


Fig. 162.

Im Gegensatz zu dieser wälzenden Reibung wird der Widerstand, von dem am Anfang dieses Paragraphen die Rede war, *gleitende* Reibung genannt.

Daß die Räder eines Wagens den Zweck haben, die gleitende Reibung durch die geringere wälzende Reibung zu ersetzen, und daß man durch Andrücken von Hemmklötzen gegen die Räder eine gleitende Reibung erregt, die den Wagen zum Stehen bringt, braucht kaum ausdrücklich gesagt zu werden.

Schließlich bemerken wir noch, daß sowohl die wälzende als die gleitende Reibung während der Bewegung kleiner ist als in dem Augenblick, in welchem diese anfangen soll. Um einen Körper mit konstanter Geschwindigkeit fortzuschieben, ist eine kleinere Kraft nötig als um ihn in Bewegung zu setzen.

§ 183. **Arbeit und Energie bei Maschinen, die in Bewegung sind.** Man denke sich, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, eine Dampfmaschine, die eine Anzahl von Sägemaschinen in Bewegung setzt. Wir können diese alle mit der Dampfmaschine zusammen als *ein* System von Körpern auffassen, wobei wir aber sowohl den Dampf als das zu sägende Holz ausschließen wollen. Der Druck des Dampfes gegen den Kolben und die Kraft, mit der sich das Holz der Bewegung der Sägen widersetzt, sind dann äußere Kräfte, die erstere eine bewegende Kraft, die letztere ein Widerstand, der, da die Überwindung desselben der Zweck der Maschinen ist, zuweilen „nützlicher“ Widerstand genannt wird. Außerdem sind „schädliche“ Widerstände vorhanden, wie die Reibung und der Widerstand der Luft.

Bei der Bewegung verrichtet die bewegende Kraft eine positive Arbeit, die man aus dem Druck gegen den Kolben und die Verschiebung, die dieser erleidet, ableiten kann. Jeder Widerstand dagegen verrichtet eine negative Arbeit; man würde diese z. B. bei einer Säge aus dem Weg, den sie zurücklegt, und der Kraft, die ihr das Holz entgegensetzt, berechnen können.

Es sei während einer gewissen Zeit A die Arbeit der bewegenden Kraft, $-B$ die der nützlichen und $-C$ die der schädlichen Widerstände. Ist dann $A > B + C$ oder $< B + C$, so hat die kinetische Energie des Systems zu- oder abgenommen, während sie unverändert geblieben ist, wenn $A = B + C$ ist.

Hat das System einmal einen regelmäßigen Gang, so kann sich zwar die Geschwindigkeit seiner Teile periodisch ändern, aber nach einer gewissen Periode kehrt dieselbe kinetische Energie zurück. Für eine solche Periode muß also $A = B + C$ sein.

Der *Nutzeffekt* ist um so größer, je größer B/A ist.

Für kurze Zeiten braucht durchaus nicht $A = B + C$ zu

sein. Die zu überwindenden Widerstände können sich der Größe nach erheblich ändern, und wenn man berücksichtigt, daß der Kolben eine sehr veränderliche Geschwindigkeit hat, so ist es klar, daß die bewegende Kraft in gleichen Zeiten nicht dieselbe Arbeit verrichtet. Während kurzer Zeiten ist daher die kinetische Energie nicht konstant. Um nun die sich hieraus ergebenden Geschwindigkeitsänderungen möglichst klein zu machen, verbindet man mit den Maschinen eine große Masse, die mit in Bewegung gesetzt werden muß. Einer und derselben Vergrößerung oder Verkleinerung der kinetischen Energie entspricht nämlich bei einer großen Masse eine geringere Geschwindigkeitsänderung als bei einer kleinen.

Der betreffenden Masse gibt man die Form eines Rades mit schwerem Rand, welches an einer der rotierenden Achsen angebracht wird. Dieses *Schwungrad* kann, wenn es einmal in Bewegung ist, bei einer vorübergehenden Vermehrung von B oder Verminderung von A aus seinem Vorrat von Arbeitsvermögen an die übrigen Teile der Maschinen Energie abgeben.

Wir bemerken hier noch, daß man die Wirkung einer Maschine, die dazu bestimmt ist, Arbeit zu leisten, *nach der Arbeit beurteilt, die sie in der Zeiteinheit verrichtet.* Man spricht von einer Maschine von 1 *Watt*, wenn die Arbeit 10^7 Erg in der Sekunde und von 1 *Pferdekraft*, wenn sie 75 m-kg in der Sekunde beträgt. Hieraus ergibt sich, daß eine Pferdekraft gleich 736 Watt ist.

§ 184. Energie eines rotierenden Körpers. Physisches Pendel. Wenn bei einem rotierenden Körper die Verteilung der Masse in bezug auf die Drehungsachse gegeben ist, so kann man durch mathematische Berechnung für jede Winkelgeschwindigkeit die kinetische Energie bestimmen. Diese Berechnung braucht sogar nur für *eine* Winkelgeschwindigkeit ausgeführt zu werden, *da das Resultat der zweiten Potenz der Winkelgeschwindigkeit proportional sein muß.* Wenn man nämlich die Winkelgeschwindigkeit verdoppelt, verdoppelt man auch alle linearen Geschwindigkeiten (§ 149) und wird für jedes Teilchen des Körpers die kinetische Energie viermal größer.

Man hat dem Doppelten des Wertes, den die kinetische Energie bei der Winkelgeschwindigkeit 1 hat, den Namen Trägheitsmoment

in bezug auf die Drehungsachse gegeben. Bezeichnen wir diese Größe mit Q, so ist bei der Winkelgeschwindigkeit ω die kinetische Energie $\frac{1}{2} Q \omega^2$.

Das Trägheitsmoment kann experimentell bestimmt und bei Körpern von einfacher Form berechnet werden. So ist z. B. für einen Ring mit dem Radius R und der Masse M das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Mittelpunkt senkrecht zur Ebene des Ringes gehende Achse $Q = MR^2$, was man leicht einsieht, wenn man bedenkt, daß bei einer Winkelgeschwindigkeit ω die lineare Geschwindigkeit eines jeden Punktes $R\omega$ ist.

Das Trägheitsmoment hat verschiedene Werte, je nachdem es in bezug auf die eine oder die andere Achse genommen wird, jede Hinzufügung einer neuen Masse zu einem Körper vergrößert auch das Trägheitsmoment, und diese Größe hängt nicht nur von der Masse der Teile des Körpers, sondern auch von dem Abstand ab, in welchem sie sich von der Achse befinden. Eine und dieselbe Masse hat nämlich bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit eine um so größere kinetische Energie, je weiter sie von der Achse entfernt ist.

Die Einführung des Trägheitsmomentes ermöglicht es, erschiedene Aufgaben über rotierende Körper zu lösen. Eine er wichtigsten derselben ist die Bestimmung der Bewegung ines sogenannten *physischen Pendels.*

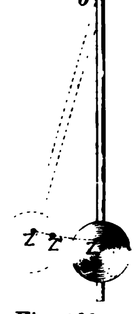


Fig. 163.

Man bezeichnet mit diesem Namen jeden esten Körper, der sich unter dem Einfluß der chwerkraft um eine feste horizontale Achse rehen kann. Ein solcher Körper befindet sich m stabilen Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt Z (Fig. 163) vertikal unter der Achse O iegt. Wird das Pendel aus dieser Lage um einen gewissen Winkel abgelenkt, so daß der Schwerpunkt nach Z' kommt, und dann losgelassen, so schwingt es um die Gleichgewichtslage hin und her und weicht nach beiden Seiten hin gleichweit aus, wie man aus dem Gesetz von der Erhaltung der Energie ableiten kann. Mit Hilfe desselben Gesetzes kann man ermitteln, welche Winkelgeschwindigkeit ω das Pendel in einer beliebigen Lage hat, z. B. wenn sich der Schwerpunkt in Z'' befindet. Denn seit

dem Augenblick, in welchem sich das Pendel aus der äußersten Lage entfernte, hat sich die Energie der Lage um einen Betrag vermindert, welchen man findet, indem man das Gewicht P mit der Vertikalprojektion von $Z'Z'$ multipliziert. Diesem Betrage muß nun die kinetische Energie in der Lage OZ'', d. h. das Produkt $\frac{1}{2}Q\omega^2$ gleich sein, wenn Q das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse ist. Ist diese letztere Größe bekannt, dann kann also auch die Winkelgeschwindigkeit ω bestimmt werden, was vollkommen genügt, um die Bewegung Schritt für Schritt zu verfolgen.

Man hat auf diese Weise bewiesen, *daß bei kleinen Werten der Amplitude jeder Punkt, ebenso wie der materielle Punkt eines mathematischen Pendels, eine einfache Schwingung ausführt.* Die Zeit, welche für die Bewegung von der einen äußersten Lage nach der anderen erforderlich ist, läßt sich nach der Formel

$$\vartheta = \pi\sqrt{\frac{Q}{Pl}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

berechnen, wenn l den Abstand des Schwerpunktes von der Achse bedeutet.

Setzt man in dieser Formel

$$P = Mg,$$

wobei M die Masse des Pendels ist, so geht sie über in

$$\vartheta = \pi\sqrt{\frac{Q}{Mgl}}.$$

Hieraus ergibt sich, wie man die Beschleunigung der Schwerkraft aus Beobachtungen der Schwingungszeit ableiten kann, wenn man Q bestimmen kann.

Man umgeht diese letztere Bestimmung, wenn man von der Eigenschaft des schwingenden Körpers Gebrauch macht, daß es verschiedene parallele Achsen gibt, die als Drehungsachsen genommen, dieselbe Schwingungszeit liefern würden. Man kann immer zwei solche Achsen finden, die an entgegengesetzten Seiten des Schwerpunktes und in verschiedenen Entfernungen von demselben liegen. Kennt man diese annähernd, so kann man durch ein verschiebbares Gewicht die Schwingungszeit so regulieren, daß sie für beide Achsen gleichgroß ist (*Reversionspendel*); die Theorie lehrt, daß dann der Abstand der Achsen gleich der Länge des mathematischen Pendels ist, welches dieselbe Schwingungszeit hat. Aus dieser Zeit und dem Abstand der Achsen findet man g vermittelst der Formel von § 104.

Auch ohne die Berechnung der Schwingungszeit nach der Gleichung (4) auszuführen, kann man sich oft ein Urteil über die Dauer der Schwingungen bilden. Man wird z. B. leicht einsehen, daß das Anbringen einer Masse *über* der Achse die Schwingungszeit vergrößert, und daß ein Wagebalken langsam schwingen muß, da l hier klein ist und doch die Masse der Arme in Bewegung gesetzt werden muß. Bei Verkürzung des Wagebalkens wird wegen der Abnahme von Q die Schwingungszeit kleiner, was als ein Vorteil zu betrachten ist. Übrigens ist auch die Masse der Schalen und der Belastungen von Einfluß auf die Schwingungszeit.

§ 185. **Nähere Betrachtung des Trägheitsmomentes.** a) Es seien m_1, m_2, m_3 usw. die Massen der materiellen Punkte, aus denen ein Körper besteht, r_1, r_2, r_3 usw. ihre Abstände von der Achse. Bei einer Winkelgeschwindigkeit ω haben diese Punkte die Geschwindigkeiten $r_1\omega$, $r_2\omega$, $r_3\omega$ usw. Die kinetische Energie ist also

$$\tfrac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \text{usw} \ldots)\,\omega^2$$

oder

$$\tfrac{1}{2} Q \omega^2,$$

wenn man

$$Q = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \text{usw} \ldots = \Sigma m r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

setzt. Diese Gleichung zeigt, wie man das Trägheitsmoment berechnen kann.

Ist M die Masse des Körpers, so stellt

$$\varrho = \sqrt{\frac{Q}{M}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

den Abstand von der Achse vor, in welchem sich die gesamte Masse befinden müßte, um bei derselben Winkelgeschwindigkeit dieselbe kinetische Energie zu haben, die sie in Wirklichkeit besitzt.

Man nennt ϱ den *Trägheitsradius*. Durch Anwendung der Gleichungen (5) und (6) hat man für denselben die folgenden Werte gefunden.

Für eine Kugel mit dem Radius R in bezug auf einen Durchmesser

$$\varrho = R\sqrt{\tfrac{2}{5}};$$

für einen Zylinder mit dem Radius R und der Höhe H, in bezug auf die geometrische Achse

$$\varrho = R\sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

für denselben Körper in bezug auf eine Linie durch den Schwerpunkt senkrecht zur geometrischen Achse

$$\varrho = \sqrt{\tfrac{1}{4}R^2 + \tfrac{1}{12}H^2};$$

für ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten a, b und c in bezug auf eine Linie, die durch den Mittelpunkt parallel zur Kante a gezogen ist,

$$\varrho = \sqrt{\tfrac{1}{12}(b^2 + c^2)}.$$

Bei diesen Angaben ist vorausgesetzt, daß die Körper homogen sind.

b) Es sei (Fig. 164) Z der Schwerpunkt eines Körpers, Q das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch Z gehende und auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehende Achse. Man kann, wenn dieses bekannt ist, das Trägheitsmoment Q' in bezug auf eine Achse berechnen, die durch einen beliebigen Punkt A der erwähnten Ebene parallel zu der ersten gezogen wird.

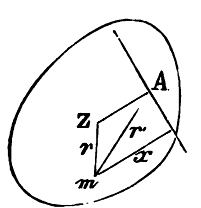


Fig. 164.

Man lege zu diesem Zweck durch A eine Ebene senkrecht auf AZ und nenne für eins der Teilchen des Körpers die Masse m, den Abstand von dieser Ebene x, die Abstände von den Achsen durch Z und A bezw. r und r'. Endlich sei $AZ = d$. Dann ist

$$r^2 = r'^2 + d^2 - 2\,d\,x,$$

also

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m r'^2 + d^2 \Sigma m - 2\,d\,\Sigma m x,$$

oder, da (§ 170)

$$\Sigma m x = M d$$

ist,

$$Q' = Q + M d^2.$$

Zwischen den Trägheitsradien ϱ und ϱ' in bezug auf die beiden Achsen besteht also die Beziehung

$$\varrho'^2 = \varrho^2 + d^2.$$

§ 186. **Bewegung eines Körpers um eine feste Achse.** a) Ein Körper, der sich um eine feste Achse drehen kann und auf den in einer Ebene senkrecht zur Achse ein konstantes Kräftepaar K wirkt, nimmt eine gleichförmig beschleunigte Rotation an. Die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit in der Zeiteinheit wird die *Winkelbeschleunigung* genannt. Diese sei q und ω sei die Winkelgeschwindigkeit am Anfang der Zeit τ. Dann ist sie am Ende derselben $\omega + q\tau$ und die kinetische Energie hat zugenommen um

$$\tfrac{1}{2} Q(\omega + q\tau)^2 - \tfrac{1}{2} Q\omega^2 = \tfrac{1}{2} Q(2\omega + q\tau) q\tau, \quad . \; . \; . \; (7)$$

wobei das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehungsachse wieder mit Q bezeichnet ist.

Der Winkel, um den sich der Körper in der Zeit τ dreht, wird mit Hilfe der mittleren Winkelgeschwindigkeit gefunden (vgl. § 92). Er ist daher $(\omega + \tfrac{1}{2} q\tau)\tau$ und die Arbeit des Kräftepaars beträgt (§ 165)

$$K(\omega + \tfrac{1}{2} q\tau)\tau.$$

Indem man diesen Ausdruck dem Ausdruck (7) gleichsetzt, findet man

$$q = \frac{K}{Q}.$$

Die Übereinstimmung zwischen diesem Resultat und der Gleichung (14) in § 87 ist eine Folge davon, daß die kinetische Energie bei einer Verschiebung und bei einer Drehung durch Ausdrücke von derselben Form dargestellt wird.

b) Wenn auf den Körper gegebene Kräfte, alle in Ebenen senkrecht zur Achse wirken, so kann man diese dadurch, daß man sie nach Punkten der Achse verlegt, auf ein Kräftepaar K zurückführen. Ändert sich das Moment dieses letzteren, so kann es doch während eines Zeitelementes als konstant betrachtet werden; man kann daher die Veränderungen der Winkelgeschwindigkeit Schritt für Schritt verfolgen (vgl. § 89).

§ 187. **Ableitung der Formel für die Schwingungszeit eines physischen Pendels.** a) In § 184 wurde bereits bemerkt, daß man, wenn die Ablenkung in der äußersten Lage gegeben ist, die Winkelgeschwindigkeiten, welche das Pendel im Laufe der Bewegung hat, aus dem Gesetz von der Erhaltung der Energie ableiten kann. Dies Gesetz muß daher auch genügen, um die Dauer der Schwingungen zu berechnen. Wenn wir uns auf unendlich kleine Schwingungen beschränken, so ist diese Berechnung ziemlich einfach.

Es sei, in Bogenmaß ausgedrückt, für eine beliebige Lage des Pendels φ der Winkel, um den es aus der Gleichgewichtslage abgelenkt ist (d. h. der Winkel $Z'' O Z$ in Fig. 163), positiv nach der einen und negativ nach der anderen Seite gerechnet. Dann ist die Winkelgeschwindigkeit (§ 149) $d\varphi / dt$ und die kinetische Energie

$$\tfrac{1}{2} Q \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Weiter findet man leicht für die vertikale Höhe des Schwerpunktes über der Gleichgewichtslage Z wenn $OZ = l$ ist,

$$l(1 - \cos\varphi) = 2 l \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi,$$

wofür man

$$\tfrac{1}{2} l \varphi^2$$

schreiben kann. Bezeichnet man das Gewicht mit P, so ist also die Energie der Lage um

$$\tfrac{1}{2} P l \varphi^2$$

größer als in der Gleichgewichtslage, und das Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt, daß die Summe

$$\tfrac{1}{2} P l \varphi^2 + \tfrac{1}{2} Q \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

immer denselben Wert hat.

Dies ist nun in der Tat der Fall, wenn das Pendel einfache Schwingungen mit einer bestimmten Periode T ausführt, d. h. wenn φ in derselben Weise von der Zeit abhängt, wie der Abstand s bei der in § 54, c) und d) betrachteten Bewegung. In diesem Fall hat man nämlich, wenn a die Amplitude ist,

$$\varphi = a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + p\right) \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

und (§ 40, c)

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2\pi a}{T}\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + p\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Setzt man diese Werte in (8) ein, so kommt in das eine Glied $\cos^2\left(2\pi t/T + p\right)$ und in das andere $\sin^2\left(2\pi t/T + p\right)$. Die Summe wird unabhängig von der Zeit, wenn diese Quadrate gleiche Koeffizienten haben. Dies gibt die Bedingung

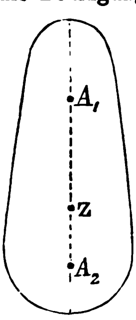


Fig. 165.

$$\tfrac{1}{2}Pla^2 = \tfrac{1}{2}Q.\frac{4\pi^2a^2}{T^2},$$

oder

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{Pl}}.$$

Endlich findet man die Gleichung (4), wenn man berücksichtigt, daß $\vartheta = \tfrac{1}{2}T$ ist.

b) Wenn wir mit Z, A_1 und A_2 die Achsen bezeichnen, welche (Fig. 165) durch den Schwerpunkt Z und die mit ihm in gerader Linie liegenden Punkte A_1 und A_2 senkrecht zur Ebene der Zeichnung gelegt werden, wenn wir ferner $ZA_1 = d_1$, $ZA_2 = d_2$ setzen und die Masse mit M und den Trägheitsmoment in bezug auf Z mit Q bezeichnen, so sind die Trägheitsmomente in bezug auf A_1 und A_2 bzw. $Q + Md_1^2$ und $Q + Md_2^2$. Nach (4) sind die Schwingungszeiten, wenn das Pendel erst in A_1 und dann in A_2 aufgehängt wird,

$$\vartheta_1 = \pi\sqrt{\frac{Q + Md_1^2}{Pd_1}} \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = \pi\sqrt{\frac{Q + Md_2^2}{Pd_2}}.$$

Ist nun $\vartheta_1 = \vartheta_2$, so hat man

$$\frac{Q + Md_1^2}{d_1} = \frac{Q + Md_2^2}{d_2},$$

woraus folgt, wenn wir annehmen, daß d_1 und d_2 *nicht* gleich sind

$$Q = Md_1 d_2$$

und also, da $P = gM$ ist,

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi\sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}.$$

Hiermit ist die obenerwähnte Eigenschaft des Reversionspendels bewiesen.

c) Es verdient bemerkt zu werden, daß die unter a) befolgte Methode in vielen anderen Fällen angewandt werden kann, in denen ein Körper oder ein System von Körpern um eine Gleichgewichtslage schwingen kann. Wir wollen annehmen, daß die Ablenkungen aus dieser Lage durch eine einzige Größe φ (die von verschiedener Art sein kann) bestimmt werden kann und daß die Umstände derartig sind, daß man, sei es für endliche oder bloß für unendlich kleine Werte dieser Größe, für die potentielle Energie

$$\tfrac{1}{2}A\varphi^2$$

und für die kinetische

$$\tfrac{1}{2} B \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

schreiben kann, wenn A und B konstante Größen sind. Die Summe dieser Ausdrücke muß konstant sein, was wirklich der Fall ist, wenn φ durch die Gleichung (9) ausgedrückt wird und die Schwingungszeit den Wert

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{A}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

hat.

Dies ist eine allgemeine Formel, die auf schwingende Magnete, auf tönende Körper und selbst auf elektrische Schwingungen angewandt werden kann.

Der Wert der Konstanten A wird durch die Kräfte bestimmt, welche die Teilchen des Systems nach ihren Gleichgewichtslagen zurücktreiben; dagegen hängt B von den Massen dieser Teilchen ab.

d) Um ein Beispiel von der Anwendung der Formel (11) zu geben, betrachten wir den in § 102 besprochenen Fall eines materiellen Punktes, der sich auf einer geraden Linie hin- und herbewegt unter dem Einfluß einer Kraft, die nach der Gleichgewichtslage hin gerichtet ist und deren Größe gefunden wird, indem man den Abstand von dieser Gleichgewichtslage O mit der konstanten Zahl α multipliziert. Wir stellen uns vor, daß diese Kraft durch das eine oder andere Medium ausgeübt wird, und suchen zunächst die Energie der Lage bei einer Ablenkung s. Für diese Energie können wir die Arbeit setzen, welche die Kraft bei der Bewegung bis in die Gleichgewichtslage verrichtet; um sie zu berechnen, teilen wir den Abstand s in eine große Anzahl (n) gleicher Teile und schließen zunächst so, als ob bei Annäherung an O die Kraft beim Durchlaufen eines jeden Teils den Wert beibehielte, den sie am Anfangspunkt dieses Teils hat. Die Arbeit ist dann

$$\left(\alpha s + \alpha \cdot \frac{n-1}{n} s + \ldots + \alpha \frac{1}{n} s\right) \cdot \frac{s}{n} = \frac{1}{2} \alpha s^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Die wirkliche Arbeit und also die potentielle Energie in Abstand s ist der Grenzwert, dem sich dieser Ausdruck für $n = \infty$ nähert, also $\frac{1}{2}\alpha s^2$. Wenn wir also jetzt unter der Größe, die allgemein mit φ bezeichnet wurde, den Abstand s verstehen, so bekommt der Koeffizient A den Wert α. Man sieht leicht ein, daß B nichts anderes ist, als die Masse m des materiellen Punktes. Die Gleichung (11) geht daher in die Formel (20) in § 102 über.

e) In derselben Weise kann man die Schwingungszeit für einen Körper bestimmen, der sich um eine feste Achse drehen kann, wenn auf ihn in einer zur Achse senkrechten Ebene ein Kräftepaar wirkt, dessen Moment der Ablenkung aus der Gleichgewichtslage proportional ist. Versteht man unter φ den Ablenkungswinkel und unter $K\varphi$ das zurückwirkende Kräftepaar, so daß K eine konstante Größe ist, so findet man durch eine Schlußfolgerung, die mit der vorhergehenden vollkommen übereinstimmt, wenn man das in § 165 Gesagte berücksichtigt, für die

Energie der Lage $\frac{1}{2} K \varphi^2$, so daß jetzt $A = K$ wird. Der Koeffizient B ist das Trägheitsmoment Q und die Schwingungszeit wird bestimmt durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{K}}.$$

§ 188. **Regulierung der Bewegung von Uhrwerken.** Wenn auf die Räder eines Uhrwerks außer der bewegenden Kraft nur die Reibung und der Widerstand der Luft wirkten, so würde die Geschwindigkeit so lange zunehmen, bis die positive Arbeit der bewegenden Kraft gerade durch die negative Arbeit der Widerstände aufgehoben wird (§ 183). Dadurch, daß man die letzteren hinreichend groß macht (Windflügel), würde man dafür sorgen können, daß die Endgeschwindigkeit nicht zu groß wird, aber sie würde sich bei jeder Vergrößerung oder Verkleinerung der Widerstände ändern.

Man vermeidet dies dadurch, daß man einen hin- und hergehenden Teil anbringt, der bei jeder Schwingung das Räderwerk für einen Augenblick anhält und dann gestattet, daß es wieder um eine kleine Strecke weitergeht. Der betreffende Teil greift zu diesem Zwecke in ein Zahnrad, das sogenannte *Steigrad*, ein, mit dem er die *Hemmung* bildet; da bei jeder Schwingung dieses Rad um *einen* Zahn weitergeht, so ist seine mittlere Bewegung und ebenso die Bewegung des ganzen Räderwerks, von dem es einen Teil bildet, gleichförmig, wenn der hin- und hergehende Teil seine Schwingungen immer in derselben Zeit ausführt.

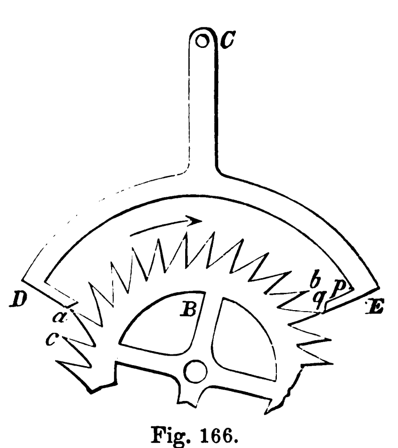


Fig. 166.

Fig. 166 stellt die *Ankerhemmung* vor. Der *Anker* CDE wird um C durch ein Pendel hin- und herbewegt, welches etwas über C aufgehängt ist und dessen Stange von einer am Anker befestigten Gabel umfaßt wird. B ist das Steigrad, dem die bewegende Kraft fortwährend eine Drehung in der Richtung des Pfeils zu geben strebt, was aber jedesmal auf kurze Zeit dadurch verhindert

wird, daß die Enden D und E des Ankers abwechselnd zwischen die Zähne eingreifen.

Sobald sich der Anker aus der abgebildeten Stellung nach links bewegt, kann der Zahn a weitergehen, und dabei befördert er, indem er gegen die schiefe Endfläche von D drückt, die Bewegung des Ankers. Nachdem aber a diese Endfläche verlassen hat, kommt die Spitze des Zahns b in Berührung mit der inzwischen nach links verschobenen Ebene pq. Das Räderwerk steht dann still, während CDE seine Schwingung nach links vollendet und so weit zurückkehrt, bis q wieder die Spitze b erreicht hat. Setzt dann der Anker seine Bewegung nach rechts fort, so kann sich b wieder bewegen, wobei gegen die schiefe Endfläche von E eine Kraft nach rechts ausgeübt wird. Bald kommt das Steigrad aufs neue zur Ruhe, indem D mit dem Zahn c in Berührung kommt; B steht dann still, bis der Anker seine Schwingung nach rechts gemacht und so weit nach links zurückgekehrt ist, daß die abgebildete Stellung wieder erreicht ist. Da dann der Zahn c genau an die Stelle von a gekommen ist, sieht man, daß bei einem vollen Hin- und Hergang des Ankers das Rad um *einen* Zahn weitergeht.

Die beschleunigende Wirkung, welche das Steigrad auf den Anker und also indirekt die bewegende Kraft auf das Pendel ausübt, erhält dieses trotz der Widerstände in dauernder Schwingung; sie macht aber zugleich die Amplitude von der bewegenden Kraft und den Widerständen im Räderwerk abhängig. Dank den Eigenschaften des Pendels hat, dieser Umstand keinen oder nur wenig Einfluß auf die Schwingungszeit.

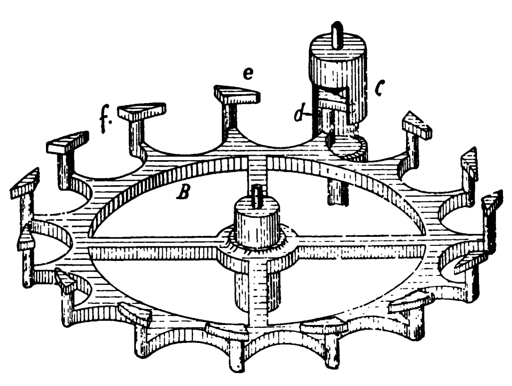


Fig. 167.

Es mag noch erwähnt werden, daß das Pendel an einem kurzen Stahlband aufgehängt ist, welches am oberen Ende

festgeklemmt ist und durch seine Biegsamkeit die Schwingungen ermöglicht.

Fig. 167 kann eine Vorstellung von der *Zylinderhemmung* geben, die ihren Namen daher hat, weil die Zähne des Steigrades B in den hohlen Zylinder C eingreifen, der durch eine Unruhe (§ 130) um seine geometrische Achse über einen ziemlich großen Winkel hin- und hergedreht wird.

Auf die Höhe der Zähne ist der Zylindermantel zum Teil hinweggenommen.

Die Wirkung dieser Hemmung ist genauer aus Fig. 168 zu ersehen. In der bei 1 angegebenen Stellung steht das Steigrad still,

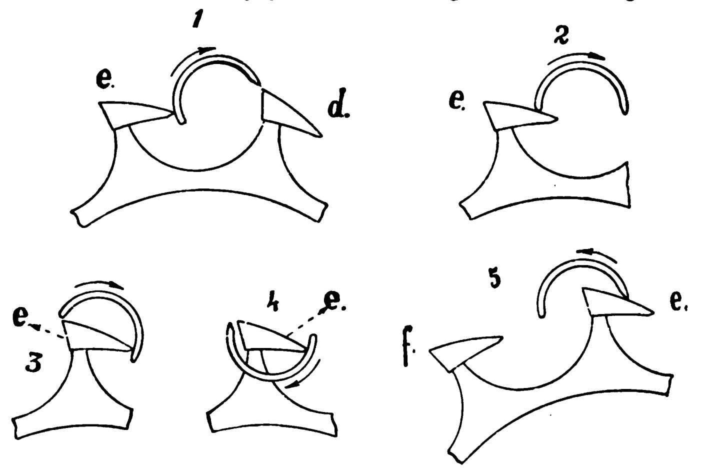


Fig. 168.

während der Zylinder, der kurz zuvor die eine äußerste Lage erreicht hat, sich in der angegebenen Richtung bewegt. Bald wird der Zahn e losgelassen; er bewegt sich (Stellung 2) bis er gegen die Innenseite des Mantels stößt (Stellung 3). Der Zylinder erreicht wieder eine äußerste Stellung (4), kehrt zurück und läßt dann (Stellung 5) den Zahn entschlüpfen. Unmittelbar darauf wird dann ein zweiter Zahn f in derselben Weise wie soeben der Zahn e durch den Zylinder angehalten.

Auch hier wird die Hemmungsvorrichtung durch das Steigrad in Schwingung gehalten; dies geschieht durch den Druck, den die Zähne in den Stellungen 2 und 5 auf den Zylinder ausüben.

§ 189. Schwingungen unter dem Einfluß der Torsionselastizität. An einem Drahte pq (Fig. 169), der an seinem oberen Ende festgeklemmt ist, ist ein Stab ab so aufgehängt, daß er sich in einer horizontalen Ebene um q drehen kann. Sich selbst überlassen nimmt er eine bestimmte Stellung ein, wenn er aber aus dieser abgelenkt wird, wird der Draht *gedrillt* oder *tordiert* (§ 168, d) und er übt durch seine Elastizität ein Kräftepaar auf den Stab aus, durch welches dieser in die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird. *Man hat gefunden, daß dieses Kräftepaar dem Ablenkungswinkel (Torsionswinkel) proportional ist.*

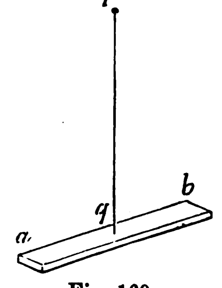


Fig. 169.

Man kann dieses Gesetz benutzen um kleine Kräfte zu messen. Wirkt nämlich auf den Stab ab ein Kräftepaar K in einer horizontalen Ebene, so wird der Stab so weit gedreht, bis das zurückwirkende Kräftepaar gleich K ist. Der Ablenkungswinkel ist daher K proportional; ist der Draht dünn, so bekommt der Winkel bereits bei einem kleinen Kräftepaar eine merkliche Größe.

Bei der *Drehwage*, vermittelst deren Coulomb die Gesetze der elektrischen Anziehungen und Abstoßungen entdeckte, war an dem einen Ende des Stabes eine elektrisierte Kugel befestigt, die von einer zweiten auf gleicher Höhe angebrachten feststehenden Kugel angezogen oder abgestoßen wurde. Man bekommt in diesem Fall das Kräftepaar K, indem man die Kraft, welche aus den elektrischen Wirkungen entspringt, nach q überträgt; man sieht dann auch, daß durch die Kraft in q, die außer dem Kräftepaar besteht, der Stab ab etwas seitwärts verschoben und gehoben wird; aber das Gewicht von ab ist im Vergleich mit der betreffenden Kraft so groß, daß hiervon abgesehen werden kann.

Will man aus den Angaben des Instrumentes die absolute Größe der Kraft ableiten, so muß man das Kräftepaar kennen, welches der Draht bei einem Torsionswinkel 1 auf den Stab ausübt. Dies kann aus der Dauer der drehenden Schwingungen abgeleitet werden, die der Stab macht, wenn er aus der Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst überlassen wird.

Weil das Kräftepaar, welches aus der Elastizität entspringt, dem Torsionswinkel proportional ist, haben diese Schwingungen viel Ähnlichkeit mit den früher betrachteten einfachen Schwingungen und wird die Schwingungszeit ϑ durch eine ebenso einfache Formel bestimmt, wie die für die unendlich kleinen Schwingungen eines physischen Pendels (§ 184). Man hat nämlich jetzt, nicht allein für sehr kleine, sondern auch für größere Schwingungen

$$\vartheta = \pi \sqrt{\frac{Q}{K}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wenn Q das Trägheitsmoment von ab in bezug auf die Drehungsachse, also in bezug auf pq bedeutet, und K das Kräftepaar, welches der Draht bei einem Torsionswinkel ausübt, der im Bogenmaß den Wert 1 hat. Aus ϑ und Q kann durch diese Formel K berechnet werden.

Eine Schwierigkeit liegt in der Bestimmung des Trägheitsmomentes, welches in der Regel nicht mit genügender Genauigkeit aus der Form und der Massenverteilung des an dem Draht aufgehängten Körpers berechnet werden kann. Man kann es aber dadurch ermitteln, daß man die Messung der Schwingungszeit wiederholt, nachdem man die Masse vergrößert hat, ohne die bewegende Kraft zu ändern. Fügt man nämlich zu dem Stab noch eine gewisse Masse hinzu, deren Trägheitsmoment in bezug auf die Drehungsachse Q' ist (natürlich muss der Stab horizontal bleiben), so wird die Schwingungszeit

$$\vartheta' = \pi \sqrt{\frac{Q + Q'}{K}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (12) folgt

$$Q = \frac{\vartheta^2}{\vartheta'^2 - \vartheta^2} Q' \text{ und } K = \frac{\pi^2 Q'}{\vartheta'^2 - \vartheta^2}.$$

Es ist jetzt nur nötig, daß die hinzugefügte Masse eine so einfache Form hat, daß das Trägheitsmoment derselben durch Berechnung gefunden werden kann. Diese Masse kann z. B. aus zwei gleichen Gewichten in gleicher Entfernung von q oder aus einem horizontalen Ring bestehen, dessen Mittelpunkt mit q zusammenfällt.

§ 190. **Bifilare Aufhängung.** In vielen Instrumenten ist ein Körper, der sich leicht in horizontaler Richtung drehen können muß, an zwei gleichlangen Drähten ab und cd (Fig. 170) aufgehängt, von denen wir annehmen wollen, daß die unteren Enden ebensoweit voneinander entfernt sind als die oberen (*bifilare* Aufhängung). In der Gleichgewichtslage laufen dann die Drähte parallel. Sie können aber diese Richtung nicht

beibehalten, wenn der Körper um die vertikale Linie pq gedreht wird. Nach einer solchen Drehung können daher die Drähte nicht mehr bis zu derselben horizontalen Ebene bd reichen wie anfangs; der Körper ist etwas gestiegen und die Schwerkraft strebt ihn zurückzudrehen. *Es ist die Schwerkraft, mit der jede andere, die eine Ablenkung bewirkt, im Gleichgewicht sein muß, und es ist auch die Schwerkraft, unter deren Einfluß der Körper drehende Schwingungen machen kann.* Streng genommen ist auch die Elastizität der Drähte, die bei der Bewegung tordiert werden, im Spiel.

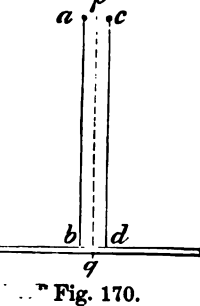


Fig. 170.

Zur Erläuterung kann Fig. 171 dienen, die eine Horizontalprojektion vorstellt. Sind die unteren Enden der Drähte durch eine Drehung von b und d nach b' und d' gekommen, so laufen die Drähte selbst von b' und d' *schief* nach oben, nämlich nach den Aufhängungspunkten, die über b und d liegen. Die auf b' und d' wirkenden Spannungen können also in vertikal nach oben wirkende Komponenten und die Kräfte $b'P$ und $d'Q$ zerlegt werden. Die ersteren müssen mit der Schwerkraft im Gleichgewicht sein und aus den letzteren entsteht das Kräftepaar, welches den Körper zurücktreibt.

Fig. 171.

Da bei einer gegebenen Ablenkung, also bei einer gegebenen Richtung der Drähte die Spannung durch das Gewicht bestimmt wird, so hängt auch das zurücktreibende Kräftepaar von diesem letzteren ab.

Kleine Schwingungen eines bifilar aufgehängten Körpers befolgen dieselben Gesetze wie die Bewegung eines Pendels und sind wie diese mit einer fortwährenden Umsetzung von potentieller Energie in kinetische und umgekehrt verbunden. Sind die Drähte unausdehnbar und sieht man von ihrer Torsion ab, so können die Änderungen der Energie der Lage aus dem vertikalen Steigen und Sinken des Schwerpunktes berechnet werden.

Die Dauer der Schwingungen kann aus der Formel (11) in § 187 abgeleitet werden.

§ 191. **Gegenseitige Einwirkung von Magneten. Stärke von Magnetpolen.** Wir beschließen dieses Kapitel mit der Besprechung des Gleichgewichtes und der Bewegung von *Magneten.* Vorläufig nehmen wir an, daß diese die Form von dünnen Stäben haben, bei denen nur die Enden oder Pole (§ 76) magnetische Wirkungen ausüben oder erleiden.

Man hat gefunden, daß diese Wirkungen die folgenden Gesetze befolgen (Gesetze von Coulomb).

a) *Die Anziehung oder Abstoßung zwischen zwei Polen ist umgekehrt proportional der zweiten Potenz ihres Abstandes.*

b) *Zwischen den Wirkungen, welche zwei Magnetpole A und B auf einen dritten Pol C aus derselben Entfernung ausüben, besteht immer dasselbe Verhältnis, einerlei welchen Pol man für C nimmt.*

Wenn die Pole A und B auf einen dritten Pol C bei derselben Entfernung gleiche Kräfte (Anziehungen oder Abstoßungen) ausüben, so sagt man, daß A und B gleichstark sind.

c) *Der Nordpol und der Südpol desselben Magnets haben immer dieselbe Stärke.*

Wirkt bei derselben Entfernung der Pol A auf C mit einer p mal so großen Kraft als der Pol B, so sagt man, daß er p mal so stark ist als B, mit anderen Worten:

Die Wirkung, welche ein Magnetpol ausübt, ist der Stärke desselben proportional.

Aus dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung kann man dann weiter folgern:

Auch die Wirkung, welche auf einen Magnetpol von einem anderen ausgeübt wird, ist der Stärke des ersteren Pols proportional.

Diese beiden Gesetze können in die folgende Regel zusammengefaßt werden:

Die gegenseitige Wirkung zweier Magnetpole ist dem Produkt der beiden Polstärken proportional.

Als Einheit der Polstärke wählt man gewöhnlich die Stärke, welche ein Magnetpol haben muß, um einen anderen von gleicher Stärke in der Einheit der Entfernung mit einer Kraft Eins abzustoßen; dabei wird, was die Längeneinheit und die Krafteinheit betrifft, das C-G-S-System zugrunde gelegt.

Wir wollen indes in diesem Buche eine andere Einheit

benutzen, die $\sqrt{4\pi}$ mal kleiner als die übliche ist, und die wir folgendermaßen definieren können:

Die Einheit der Polstärke ist die Stärke, welche ein Magnetpol haben muß, um einen anderen von gleicher Stärke in der Einheit der Entfernung mit einer Kraft $1/4\pi$ abzustoßen.

Die Einführung dieser neuen Einheit hat den Zweck, die Formeln der Elektrizitätstheorie möglichst zu vereinfachen. Um es indes dem Leser zu ermöglichen, sich nach Belieben der einen oder der anderen Einheit zu bedienen, werden wir stets hinter die Formeln und Zahlenangaben, die auf der modifizierten Einheit beruhen, zwischen rechteckige Klammern eingeschlossen, die Formeln und Zahlen setzen, die bei der üblichen Wahl der Einheit gelten.

Befinden sich zwei Magnetpole von der Stärke m und m' in der Entfernung r voneinander, so ist die gegenseitige Wirkung

$$\frac{m\,m'}{4\pi r^2}\left[\frac{m\,m'}{r^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

§ 192. **Kraftfeld um einen Magnet.** Es sei (Fig. 172) NZ der Magnet und in einem beliebigen Punkt in seiner Nähe befinde sich ein beweglicher Nordpol n. Die Strecken na und nb mögen die Kräfte vorstellen, mit denen N und Z auf n wirken; da das Verhältnis dieser Kräfte durch die Proportion

$$na : nb = nZ^2 : nN^2$$

bestimmt ist, so ist die Richtung der Resultante unabhängig von der Stärke des Pols n.

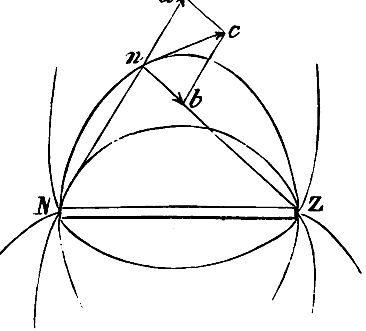


Fig. 172.

Da die angegebene Konstruktion für jeden Punkt ausgeführt werden kann, kann man (§ 128) den Verlauf der *Kraftlinien* im *magnetischen Kraftfeld* (kürzer: *Magnetfeld*) angeben. Einige dieser Linien sind in der Figur dargestellt.

Unter der Richtung einer Kraftlinie versteht man diejenige Richtung, in welcher ein Nordpol fortgetrieben wird, und unter der

magnetischen Kraft in einem Punkte des Feldes oder der „Stärke“ des Feldes versteht man die Kraft, die auf einen in diesem Punkt befindlichen Einheitspol wirken würde.

In Wirklichkeit haben Magnete einen komplizierteren Bau als hier angenommen wurde. Man kann sich vorstellen, daß eine große Anzahl dünner Stäbe von gleicher Länge zu einem dickeren Stabe vereinigt werden, der dann die magnetischen Eigenschaften an den beiden Endflächen zeigt. Auch können Magnetstäbe so vereinigt werden, daß jeder in die Verlängerung eines anderen fällt, und überhaupt kann ein magnetisches System aufgebaut werden, indem man in der einen oder anderen Weise Magnete wie die des vorhergehenden Paragraphen, von beliebiger Richtung und Stärke, miteinander vereinigt.

Mit dem Bau des magnetischen Körpers ändert sich natürlich auch der Verlauf der Kraftlinien in seiner Umgebung.

Es verdient indessen bemerkt zu werden, daß die Linien, wie sie auch laufen mögen, auf eine sehr geringe Entfernung hin als gerade und einander parallel betrachtet werden können, und daß die magnetische Kraft in einem sehr kleinen Raum als überall gleichgroß angesehen werden kann. Ein kleiner Teil eines Magnetfeldes ist also nahezu homogen. *Stellt man nun in einen derartigen Raumteil ein sehr kleines Magnetstäbchen, welches sich um seinen Mittelpunkt nach allen Richtungen drehen kann, so nimmt es die Richtung der Kraftlinien an;* in dieser Stellung wirken nämlich auf die Pole gleiche und entgegengesetzte Kräfte in der Richtung der Länge.

§ 193. **Magnetfeld um die Erde. Richtung der erdmagnetischen Kraft.** In § 76 wurde bereits von den Kräften gesprochen, welche die Erde auf die Pole eines Magnets ausübt. *Die Erscheinungen lehren, daß die Erde ebenso wie ein Magnet von einem Kraftfeld umgeben ist. Dieses kann für die Dimensionen des Zimmers, in welchem wir unsere Versuche ausführen, als homogen betrachtet werden.*

Um die Richtung der Kraftlinien zu bestimmen, kann man sich dem am Schlusse des vorigen Paragraphen Gesagten gemäß eines Magnetstabes bedienen, der sich um seinen Schwerpunkt nach allen Richtungen drehen kann. *Ein solcher Magnet stellt sich in die vertikale Ebene, welche wir in § 76 den magne-*

lischen Meridian nannten; außerdem kehrt er den Nordpol nach unten. Den Winkel, den er so mit einer horizontalen Ebene bildet und der jetzt im westlichen Europa von 61° bis 69° variiert, wird die Neigung oder Inklination genannt.

Die Richtung dieses Magnets (Inklinationsnadel) gibt nun lie Richtung der Kraftlinien an.

Daß wirklich das Magnetfeld homogen ist, geht daraus ervor, daß erstens die Inklinationsnadel in allen Punkten des immers dieselbe Richtung annimmt, und daß zweitens die 'dmagnetische Kraft überall gleich stark wirkt. Wie sich es beweisen läßt, wird im nächsten Paragraphen gezeigt erden. Es folgt auch daraus, daß ein Magnet, der sich als anzes verschieben kann, dies unter dem Einfluß des Erdagnetismus nicht tut. Wäre nämlich an den Stellen, wo sich e beiden Pole befinden, die erdmagnetische Kraft nicht gleich ark, so würden die in entgegengesetzter Richtung auf die le wirkenden Kräfte nicht gleich sein.

Um die Inklination zu messen, ist es nicht nötig, eine agnetnadel in allen Richtungen um den Schwerpunkt drehbar zu achen; es genügt, daß sie sich um eine senkrecht zur Länge rch den Schwerpunkt gehende Achse drehen kann, wenn an nur dieser letzteren verschiedene Richtungen in einer rizontalen Ebene geben kann. Wird die Achse senkrecht m magnetischen Meridian gestellt, so kann die Nadel die chtung der auf die Pole wirkenden Kräfte annehmen.

Wir überlassen es dem Leser, zu untersuchen, welche Stellung der gnet annimmt, wenn die Drehungsachse in der horizontalen Ebene iebig gerichtet ist. Liegt die Achse im magnetischen Meridian, so llt sich die Nadel vertikal.

Von großer Wichtigkeit bei den Beobachtungen mit einer klinationsnadel ist es, die Reibung an der Achse so klein möglich zu machen, da diese gegenüber den schwachen agnetischen Kräften leicht einen bedeutenden Einfluß ausübt. ußerdem muß man beachten, daß die Drehungsachse niemals nau im Schwerpunkt angebracht werden kann. Der hierrch verursachte Fehler wird dadurch eliminiert, daß man Versuche wiederholt, nachdem die Nadel in entgegensetzter Richtung magnetisiert worden ist. Hat dann der hwerpunkt zuerst auf der Seite des Nordpols gelegen und

ist dadurch die Inklination zu groß ausgefallen, so liegt er nachher auf der Seite des Südpols, so daß die Neigung zu klein gefunden wird.

Die Änderungen der Inklination über die Erdoberfläche stimmen im großen Ganzen mit dem überein, was man beobachtet, wenn man eine kleine, um ihren Schwerpunkt drehbare Magnetnadel über einen großen horizontalen Magnetstab hält. Die Nadel kehrt dann den einen oder den andern Pol nach unten, je nachdem sie sich über der einen oder der anderen Hälfte des Stabes befindet, und zwar um so mehr, je mehr sie einem der Pole angenähert wird. In ähnlicher Weise kehrt die Inklinationsnadel auf der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche ihren Nordpol und auf der südlichen Hälfte ihren Südpol nach unten und nimmt die Neigung mit der Entfernung vom Äquator zu. Die beiden soeben genannten Hälften der Erdoberfläche werden voneinander durch eine Linie geschieden, auf welcher die Inklination Null ist; diese Linie fällt aber nicht mit dem Äquator zusammen und hat einen ziemlich unregelmäßigen Verlauf.

§ 194. **Größe der erdmagnetischen Kraft.** In Fig. 173, in welcher die Ebene der Zeichnung mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt, stellt Na (oder Za') die Kraft vor, mit welcher der Erdmagnetismus auf einen der Pole eines Magnets NZ wirkt. Diese Kraft ist in die vertikale Komponente Nb (oder Zb') und die horizontale Komponente Nc (oder Zc') zerlegt. Wenn i die Inklination ist, so ist offenbar

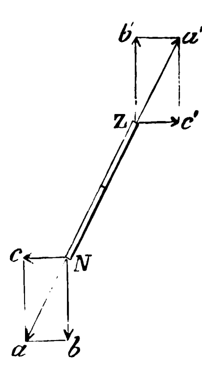


Fig. 173.

$$Nc = Na \cos i.$$

Um die gesamte Kraft Na kennen zu lernen, braucht man also nur die Inklination und die horizontale Kraft zu messen.

Wie groß die horizontalen Kräfte sind, die auf die Pole eines Magnets wirken, kann man aus der Dauer der Schwingungen ableiten, die der Magnet machen kann, wenn er an einem Faden so aufgehängt ist, daß er sich nur in einer horizontalen Ebene drehen kann. Ist nämlich (Fig. 174) NZ die Gleichgewichtslage des

Magnets im magnetischen Meridian *mm*, so wirken stets, einerlei welche andere Lage er einnimmt, auf die Pole die Kräfte $N'A$ und $Z'B$ parallel zu NZ. Von den Kräften, die in vertikaler Richtung senkrecht zur Ebene NON' wirken, können wir absehen. Wenn wir die Größe von $N'A$ oder $Z'B$ mit F, die Länge des Magnets mit l und den Ablenkungswinkel NON' mit φ bezeichnen, so ist das Moment des Kräftepaars ($N'A$, $Z'B$)

$$Fl \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

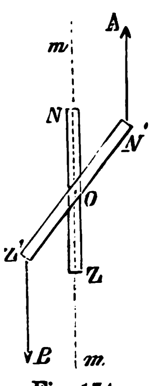


Fig. 174.

Da also ebenso wie beim Pendel das zurücktreibende Kräftepaar dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist, so befolgt der Magnet bei seiner Bewegung dieselben Gesetze wie das Pendel. Die Dauer unendlich kleiner Schwingungen wird daher durch die Formel (12) in § 189 bestimmt, in der man jetzt unter K den Wert verstehen muß, den das Kräftepaar für $\varphi = 90^0$ annimmt. Die Formel wird also

$$\vartheta = \pi \sqrt{\frac{Q}{Fl}}$$

und hieraus folgt

$$F = \frac{\pi^2 Q}{l \vartheta^2}.$$

Das Trägheitsmoment kann mit Hilfe des in § 189 erwähnten Kunstgriffes ermittelt werden.

Bei der Bestimmung der Kraft F ist noch zu beachten, daß auch die Elastizität des Fadens, an welchem der Magnet hängt, einigen Einfluß auf die Schwingungszeit hat.

Wenn man von der Größe der erdmagnetischen Kraft oder von der Horizontalkomponente H spricht, so meint man immer die Kraft, welche auf einen Einheitspol wirkt. Da man gefunden hat, daß die Kraft, mit welcher die Erde auf einen Pol wirkt, der Stärke des Pols proportional ist, *findet man H, indem man die oben betrachtete Kraft F durch die Polstärke m dividiert*; *diese letztere kann aus den Wirkungen des untersuchten Stabes auf andere Magnete abgeleitet werden.*

Der Wert von H ändert sich von Ort zu Ort. Einige Werte sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

	Modif. Einheit	Übliche Einheit
Amsterdam	0,052	0,184
Berlin	0,053	0,189
Bonn	0,054	0,193
Königsberg	0,052	0,184
München	0,058	0,207
Wien	0,059	0,209

Durch die Beziehung

$$F = Hm$$

geht der Ausdruck (15) über in

$$Hml \sin \varphi .$$

Das Kräftepaar, welches den Magnet nach der Gleichgewichtslage treibt, hängt also von dem Ablenkungswinkel und der Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft ab, und außerdem von dem Produkt aus der Polstärke und der Länge. *Dieses Produkt, welches oft die magnetischen Wirkungen bestimmt, wird das magnetische Moment des Stabes genannt.*

§ 195. **Ablenkung eines Magnets durch einen anderen.** Es sei (Fig. 175) nz ein Magnet, der sich um seinen Mittelpunkt o in einer horizontalen Ebene drehen kann, und NZ ein fester Magnet in derselben Ebene, der nz aus dem magnetischen

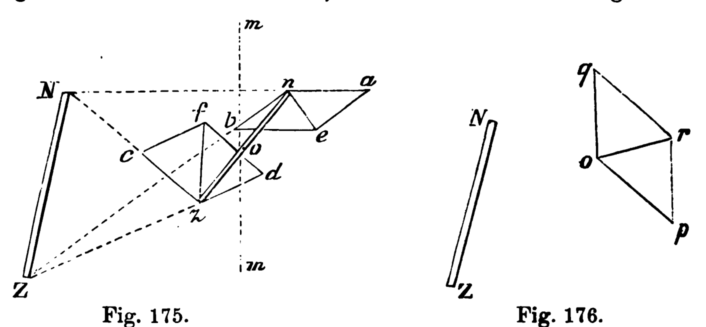


Fig. 175. Fig. 176.

Meridian mm ablenkt. Zwischen den Polen n und z einerseits und N und Z anderseits bestehen vier Kräfte, die durch na, nb, zc und zd dargestellt werden. Werden die Resultanten ne und zf nach o übertragen, so entstehen zwei Kräftepaare, die mit dem Kräftepaar des Erdmagnetismus im Gleichgewicht sein müssen.

Besonders einfach wird die Sache, wenn nz sehr klein ist im Vergleich mit den Entfernungen von den Polen von

NZ. Dann kann man na und zc und ebenso nb und zd als gleich und parallel betrachten; auch ohne die Kräfte nach o zu übertragen hat man dann ein Kräftepaar.

Man kann bei geringer Länge von nz die Sache auch in folgender Weise auffassen. Der Magnet NZ (Fig. 176) wirkt in einem beliebigen Punkt o mit einer gewissen magnetischen Kraft (§ 192) op, die Erde mit einer magnetischen Kraft oq. Die Resultante or bestimmt die Richtung der Kraftlinie in o, und in diese Richtung wird sich eine sehr kleine Magnetnadel einstellen (§ 192).

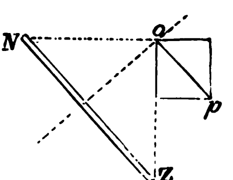
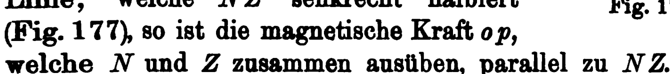


Fig. 177.

Hierbei ist nun noch das Folgende zu bemerken.

a) Befindet sich der Punkt o auf der Linie, welche NZ senkrecht halbiert (Fig. 177), so ist die magnetische Kraft op, welche N und Z zusammen ausüben, parallel zu NZ.



b) Steht die Kraft op (Fig. 176) senkrecht auf dem magnetischen Meridian, also auch auf oq, so wird der Ablenkungswinkel α, den eine in o befindliche kleine Magnetnadel durch NZ bekommt, bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{op}{oq}.$$

Die Tangente des Ablenkungswinkels ist also in diesem Fall der Wirkung von NZ proportional.

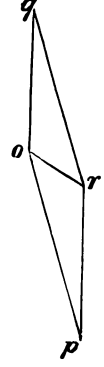


Fig. 178.

c) In manchen Galvanometern wünscht man die Kraft, mit welcher eine Magnetnadel in einer bestimmten Stellung festgehalten wird, klein zu machen, damit ein schwacher elektrischer Strom eine merkliche Ablenkung der Nadel bewirkt. Man kann dies dadurch erreichen, daß man einen festen Magnet *(kompensierender Magnet)* anbringt, der auf die Pole der Nadel Kräfte ausübt, die die Wirkung die Erdmagnetkraft ganz oder größtenteils aufheben. Dabei hat man auch die Richtung, in welche sich die Nadel stellt, in der Gewalt. Ist nämlich die Erdmagnetkraft oq (Fig. 178) gegeben, so kann man eine Resultante or von beliebiger Richtung bekommen, indem man oq mit einer zweckmäßig gewählten Kraft op zusammensetzt. Natürlich muß, wenn or

klein sein soll, op beinahe in die Verlängerung von oq fallen. Liegt daher der Drehpunkt der Magnetnadel vertikal über oder unter der Mitte des horizontal angebrachten kompensierenden Magnets, so muß dieser letztere, einerlei welche Richtung man der Nadel geben will, nahezu in den magnetischen Meridian gebracht werden.

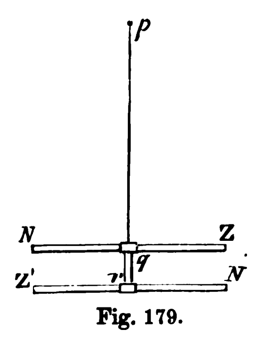


Fig. 179.

§ 196. **Astatisches Nadelsystem.** Ein anderes Mittel, den Einfluß des Erdmagnetismus zu vermindern, besteht in der Anwendung zweier horizontaler paralleler Magnetnadeln NZ und $N'Z'$ (Fig. 179), die durch ein vertikales Stäbchen qr fest miteinander so verbunden sind, daß die entgegengesetzten Pole übereinander liegen. Das System hängt an einem Faden pq, so daß es sich in horizontaler Richtung drehen kann. Wären die Nadeln vollkommen parallel und gleich stark, so würde die Erde gar keine richtende Kraft auf das System ausüben (daher der Name) und dieses würde nur durch die Elastizität des Fadens pq eine Gleichgewichtslage einnehmen. Sind die Nadeln parallel aber ungleich stark, so stellen sie sich noch in den magnetischen Meridian. Sie können endlich von demselben abweichen, wenn sie einen kleinen Winkel miteinander bilden. Aus Fig. 180 — die eine Horizontalprojektion vorstellt — ist zu ersehen, wie zwei gleiche Nadeln im Gleichgewicht sind, wenn die Linie, welche den spitzen Winkel halbiert, auf dem magnetischen Meridian mm senkrecht steht. Daß keine andere Gleichgewichtslage möglich ist, ist leicht einzusehen.

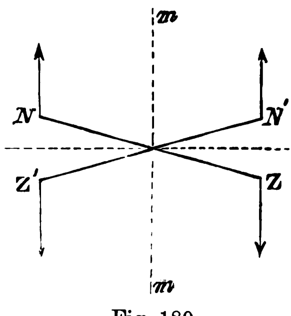


Fig. 180.

§ 197. **Zusammenhang zwischen der Empfindlichkeit und der Schwingungszeit.** *In allen Fällen, in denen es sich darum handelt, einen Körper, der unter dem Einfluß einer „Richtkraft" eine Lage von stabilem Gleichgewicht einnimmt, durch eine andere Kraft aus dieser Lage zu bringen, ist die Empfindlichkeit um so größer, je kleiner die Richtkraft ist. Anderseits werden bei einer*

einen Richtkraft die Schwingungen, die der Körper unter dem usschließlichen Einfluß dieser Kraft ausführen kann, langsam.

Zur Erläuterung dieses Zusammenhangs zwischen der mpfindlichkeit und der Schwingungszeit kann dienen, daß ne Drehwage, die, um kleine Winkel mit ihr zu messen, an nem sehr dünnen Faden aufgehängt ist, sehr langsam schwingt, ıß bei einem bifilar aufgehängten Körper die Empfindlichkeit ıd die Schwingungszeit zunehmen, wenn die Fäden einander ehr angenähert werden, und daß dasselbe bei einem Gal- ınometer mit kompensierendem Magnet der Fall ist, wenn ırch eine Verschiebung des letzteren das Magnetfeld, in ılchem die Nadel schwingt, schwächer gemacht wird.

§ 198. **Einfluß eines Widerstandes auf einen schwingenden ırper.** *Durch verschiedene Ursachen, die man unter dem Namen ı Widerständen zusammenfassen kann, kommt jeder schwingende rper nach kürzerer oder längerer Zeit zur Ruhe.* Diese *Dämpfung* r Bewegung wird gewöhnlich, wenigstens teilweise, durch die ft (§ 95) bewirkt; außerdem sind aber noch andere Ein- sse im Spiel, bei einem Pendel, welches an einer Schneide fgehängt ist, und bei einer Magnetnadel, die auf einem Stift ıt, die Reibung, bei einem Körper, der an einem Faden ngt, der tordiert wird, innere Widerstände in diesem letzteren.

Die Theorie lehrt, daß in den Fällen, in denen der Widerstand Geschwindigkeit proportional ist, die aufeinander folgenden Aus- läge nach beiden Seiten von der Gleichgewichtslage eine geome- sche Reihe bilden; durch die Beobachtung wird dies bestätigt und Quotienten der Reihe eine Größe bestimmt, die zur Beurteilung Größe des Widerstandes dienen kann.

Wenn der Quotient wenig von der Einheit verschieden , so begeht man nur einen kleinen Fehler, wenn man drei feinander folgende Ausschläge als Glieder einer arithmetischen ihe betrachtet. Man kann dann leicht, ohne das Stillstehen s Körpers abzuwarten, aus der Beobachtung von drei auf- ıander folgenden äußersten Lagen die Gleichgewichtslage leiten.

Schwingt nämlich der Körper an einer Teilung entlang d sind a_1, a_2 und a_3 die betreffenden Lagen, während A die eichgewichtslage ist, so müssen die Differenzen

$$a_1 - A,\quad A - a_2,\quad a_3 - A$$

eine arithmetische Reihe bilden. Daraus folgt, daß das Mittel $\frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ der beiden Lagen auf der einen Seite ebensoweit von A entfernt sein muß wie die Lage a_2 auf der anderen Seite. Man findet also A als den Punkt, der mitten zwischen $\frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ und a_2 liegt, während natürlich, wenn die Bewegung nicht gedämpft würde,

$$A = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

sein würde.

In der angegebenen Weise wird z. B. bei einer Wage die Ruhelage aus einigen Umkehrpunkten abgeleitet.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß ein Widerstand, der nur bei der Bewegung hervorgerufen wird, niemals von Einfluß auf die Gleichgewichtslage sein kann, aus dem einfachen Grund, daß er, wenn der Körper schließlich zur Ruhe gekommen ist, nicht mehr besteht. Man kann also, wenn es sich nur um die Beobachtung der Gleichgewichtslage handelt, den Luftwiderstand durch Vergrößerung der Oberfläche verstärken, so daß der Körper schneller zur Ruhe kommt. Zuweilen wird zu demselben Zweck von dem Widerstand einer Flüssigkeit Gebrauch gemacht.

§ 199. **Ablenkung durch einen plötzlichen Stoß.** Ein Körper kann um eine feste Achse schwingen unter dem Einfluß eines richtenden Kräftepaares, welches der Ablenkung aus der Gleichgewichtslage proportional ist. Er befinde sich erst in dieser Lage und werde dann aus demselben durch ein Kräftepaar M entfernt, welches während der kurzen Zeit τ wirkt, welche Zeit bereits abgelaufen ist, bevor eine merkbare Ablenkung entstanden ist. Man kann dann sagen, daß der Körper die Gleichgewichtslage mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{M\tau}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

verläßt, die er von dem Kräftepaar bekommt (§ 186, a). Q ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehungsachse.

Der Körper führt nun einfache Schwingungen aus, und zwar so, daß die Winkelgeschwindigkeit beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage jedesmal durch den Ausdruck (16) bestimmt wird. Drückt man diese Schwingungen durch die Formeln (9) und (10) in § 187, a aus, so sieht man, daß $2\pi a/T$ den Wert (16) und also der erste Ausschlag a den Wert

$$a = \frac{M\tau T}{2\pi Q} = \frac{M\tau\vartheta}{\pi Q}$$

hat.

In dieser letzteren Formel ist $\vartheta = \frac{1}{2} T$. Bedenkt man nun, daß $\vartheta = \pi \sqrt{Q/K}$ ist, wenn K die in § 187, e angegebene Bedeutung hat und also $Q = K \vartheta^2 / \pi^2$ ist, so kann man schreiben

$$a = \frac{\pi M \tau}{K \vartheta}, \qquad (17)$$

eine Gleichung, die man auch findet, wenn man beachtet, daß der Körper die Gleichgewichtslage mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2} M^2 \tau^2 / Q$ verläßt und daß die potentielle Energie (§ 187 e) $\frac{1}{2} K a^2$ im Augenblick der größten Ablenkung dieser gleich sein muß.

Wir wollen nun das Kräftepaar N suchen, welches fortwährend wirkend einen ebenso großen *dauernden* Ausschlag hervorbringen kann. Da dies mit dem zurücktreibenden Kräftepaar im Gleichgewicht sein muß, ist

$$N = a K. \qquad (18)$$

Man hat daher zwischen den Kräftepaaren M und N, welche dieselbe Ablenkung geben, das eine als ersten Ausschlag, das andere dauernd, die Beziehung

$$N = \frac{\pi M \tau}{\vartheta}. \qquad (19)$$

Bei alle diesem ist vorausgesetzt, daß keine Dämpfung stattfindet. Ist ein Widerstand vorhanden, der von der Geschwindigkeit abhängt, so hat a nicht mehr den durch (17) bestimmten Wert. Die Formel (18) behält ihre Gültigkeit, aber (19) muß durch eine Beziehung von komplizierterer Form ersetzt werden.

Viertes Kapitel.

Gleichgewicht und Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen.

§ 200. **Druck einer Flüssigkeit oder eines Gases.** Sowohl die Zustandsveränderungen, welche durch äußere Kräfte bewirkt werden, als auch die dadurch hervorgerufenen inneren Kräfte sind, im Vergleich mit den festen Körpern, bei Flüssigkeiten und Gasen von besonders einfacher Art.

Bei einer ersten Betrachtung dieser Körper kommen nur Veränderungen des Volums zur Sprache, wobei stets die gegenseitige Anordnung der Teilchen in allen Richtungen dieselbe bleibt, und bestehen die inneren Kräfte in einem „Druck", für den einfache Gesetze gelten.

Befindet sich eine Flüssigkeit in einem Zylinder, der durch einen beweglichen Kolben verschlossen ist, oder in einem Raum, von dem ein solcher Zylinder einen Teil bildet, so kann man dadurch, daß man den Kolben nach innen drückt, das Volum verkleinern. Die Flüssigkeit strebt dann sich sofort wieder auszudehnen (Elastizität) und übt dadurch gegen die Wände des Gefäßes einen Druck aus; ebenso werden nebeneinander liegende Teile des Stoffes gegeneinander drücken.

Dasselbe ist bei einem Gas der Fall, aber es besteht zwischen den beiden Aggregatzuständen ein großer Unterschied, was den Grad der Annäherung betrifft, die durch bestimmte äußere Kräfte den Teilchen gegeben wird. Bei den Flüssigkeiten, mit denen man es gewöhnlich zu tun hat, ist die Volumverminderung so gering, daß sie sich sogar lange Zeit der Beobachtung entzogen hat; umgekehrt dehnen sie sich, wenn ein anfangs vorhandener äußerer Druck vermindert oder aufgehoben wird, sehr wenig aus. *Von praktischem Gesichtspunkt*

aus können diese Körper meist als unzusammendrückbar betrachtet werden. Eine Gasmasse dagegen zeigt sehr große Volumveränderungen; für die Ausdehnung bei Druckverminderung besteht hier sogar keine Grenze, so daß ein Gas niemals ohne äußeren Druck in einem begrenzten Volum gehalten werden kann.

Übrigens kann der Druck nicht allein durch Eintreiben einer Seitenwand, sondern auch durch andere äußere Kräfte hervorgerufen werden. Die Schwerkraft drückt stets die oberen Schichten gegen die unteren und vermindert den Raum, den diese letzteren einnehmen.

§ 201. **Richtung des Druckes.** *Der Druck steht bei Flüssigkeiten und Gasen senkrecht auf der Fläche, auf welche er wirkt. Dies gilt zunächst von den Kräften, welche gegen begrenzte Wände oder eingetauchte fremde Körper ausgeübt werden, aber auch von den gegenseitigen Kräften zwischen den Teilen des Stoffes, die durch eine beliebige gedachte Fläche voneinander geschieden sind.* Tangentiale Spannungen wie bei festen Körpern (§ 168, c) gibt es, wenigstens bei ruhenden Flüssigkeiten, nicht.

Die soeben erwähnte Fläche sei eine Ebene V (Fig. 181); der Teil I des Körpers übt dann auf den Teil II eine große Anzahl paralleler Kräfte aus, wie sie in der Figur für einen Teil $a\,b$ der Ebene angedeutet sind. Natürlich wirkt II auf I mit gleichen und entgegengesetzten Kräften.

Fig. 181.

Dadurch, daß man die in der Figur angedeuteten Kräfte miteinander zusammensetzt, also zueinander addiert, findet man den „Druck auf die Ebene $a\,b$". Dieser ist proportional der Größe von $a\,b$, solange überall längs V der Stoff in gleichem Maße zusammengedrückt ist; dividiert man ihn durch die Größe von $a\,b$, so findet man den Druck auf die Flächeneinheit.

Ändert sich der Zustand von einem Punkt zum anderen, so wirken auf nebeneinander liegende gleiche Teile der Ebene V ungleiche Kräfte und der Druck auf einen Teil der Ebene ist nicht mehr der Größe dieses Teils proportional. Man kann sich jedoch um einen Punkt P herum einen so kleinen Teil der Ebene vorstellen, daß der Zustand in allen Punkten

desselben als gleich betrachtet werden kann. Dividiert man den Druck auf dieses Element durch die Flächengröße desselben, so erhält man den *Druck pro Flächeinheit* im Punkt P.

Wird die Flächeneinheit klein genug gewählt, so kann man das Element gleich dieser Flächeneinheit nehmen. Oft kann für den Druck pro Quadratmillimeter die Kraft genommen werden, die *wirklich* auf ein Quadratmillimeter ausgeübt wird.

Wenn von der Größe des Druckes gesprochen wird, so versteht man darunter immer den Druck pro Flächeneinheit, wenn es auch nicht ausdrücklich gesagt wird.

Bei den Bewegungserscheinungen von Flüssigkeiten und Gasen kommen Fälle vor, in denen die gegenseitige Wirkung zwischen zwei Teilen des Stoffes nicht senkrecht auf der Trennungsfläche steht; derartige Fälle bleiben aber vorläufig außer Betrachtung.

§ 202. **In einem bestimmten Punkt ist der Druck in allen Richtungen gleich groß.** *Bringt man in einem beliebigen Punkt im Inneren eines flüssigen oder gasförmigen Körpers ein Flächenelement nacheinander in verschiedene Richtungen, so ist der Druck auf dasselbe immer gleich groß, so daß man von „dem Druck in P" sprechen kann, ohne die Richtung der Fläche näher anzugeben.*

Dieses wichtige Gesetz ist eine Folge der großen Beweglichkeit der Moleküle. Einen festen Körper können wir *einseitig* zusammendrücken, und wenn der Stab von § 168, a, *nachdem* er zusammengedrückt und dabei, wie sich später zeigen wird, in horizontaler Richtung ausgedehnt worden ist, von einem genau anschließenden Futteral umgeben würde, so würde er gegen die Seitenwände desselben überhaupt nicht drücken, sondern nur gegen die Stützfläche bei B. Wird aber eine Flüssigkeit, die sich in einem Zylinder unter einem Kolben befindet, zusammengedrückt, so streben die Teilchen stets auch seitwärts zu entweichen. Sind sie daran verhindert, so sind sie in Richtungen senkrecht zur Achse des Zylinders in demselben Grade dichter zusammengekommen als in der Richtung der Achse. In derselben Weise wird in einer Flüssigkeits- oder Gasmasse, wie sie sich auch bewegt und welche Kräfte auf sie wirken, jeder kleine Raumteil in allen Richtungen gleich stark

zusammengedrückt sein, wovon das oben über den inneren Druck Gesagte eine unmittelbare Folge ist.

§ 203. **Fall, in welchem der Druck in allen Punkten gleich groß ist.** Die Frage, inwiefern in einer ruhenden Masse sich der Druck von einem Punkt zum anderen ändert, kann man beantworten, wenn man berücksichtigt (§ 168), daß ein Körper nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn die Kräfte, die auf einen beliebigen Teil desselben wirken, sich gegenseitig aufheben. Für den Teil einer flüssigen oder gasförmigen Masse, die innerhalb einer gedachten geschlossenen Fläche liegt, kommen dabei außer Kräften wie die Schwerkraft alle Drucke ins Spiel, die durch den umgebenden Stoff ausgeübt werden. Bei dem Aufstellen der Gleichgewichtsbedingung braucht auf den flüssigen Zustand des betrachteten Teils keine Rücksicht genommen zu werden (§ 169). *Wir werden meist sehr dünne prismatische oder zylindrische Flüssigkeitssäulchen betrachten, deren Endflächen auf der Länge senkrecht stehen, und die Gleichgewichtsbedingung für die in der Richtung der Länge wirkenden Kräfte aufsuchen.* Da der Druck auf die seitliche Oberfläche überall auf der Länge senkrecht steht, kann *dieser* Druck dabei unberücksichtigt bleiben.

Man sieht nun ohne weiteres ein, *daß eine Flüssigkeit oder ein Gas, wenn auf das Innere keine äußeren Kräfte wirken, nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn der Druck überall gleich groß ist.* Denn auf die Endflächen eines beliebigen Säulchens müssen gleiche Kräfte wirken, und da die Endflächen gleich groß sind, muß auch der Druck pro Flächeneinheit an beiden Seiten denselben Wert haben. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt wäre, würde die Flüssigkeit in Bewegung kommen.

Dieser Satz kann natürlich nur dann angewandt werden, wenn von der Wirkung der Schwerkraft abgesehen werden kann, also in denjenigen Fällen, in denen der Druck, den die Schwerkraft in den untersten Schichten verursacht, klein ist im Vergleich mit dem Druck, der in anderer Weise entsteht. Als Beispiel kann eine Gasmasse von mäßigen Dimensionen dienen, oder eine Flüssigkeit, auf welche durch einen Kolben ein großer Druck ausgeübt wird (das Wasser in einer hydraulischen Presse).

Ist eine Flüssigkeitsmasse, auf deren Inneres keine äußeren Kräfte wirken, einmal im Gleichgewicht, und vertauscht man

dann den innerhalb einer geschlossenen Fläche liegenden Teil durch einen beliebigen festen Körper von gleicher Gestalt, ohne an dem Druck der umgebenden Flüssigkeit etwas zu ändern, so müssen sich die Kräfte, welche diese auf den Körper ausübt, immer noch einander aufheben. Hieraus ergibt sich der Satz, den man übrigens auch mehr direkt beweisen kann: *Wirkt auf einen beliebigen Körper von allen Seiten ein gleich großer normaler Druck, so heben sich, was die Bewegung des Körpers als Ganzes betrifft, alle diese Kräfte einander auf.*

Man kann sich dieses Resultates zuweilen bedienen, um die Resultante eines überall gleich großen normalen Druckes zu finden, der auf eine nicht geschlossene gekrümmte Fläche wirkt. Will man dies z. B. für die in Fig. 182 angedeutete halbe Kugeloberfläche abc tun, so kann man beachten, daß, wenn auf die Ebene aMc ein pro Flächeneinheit gleich großer Druck wirkte, der halbkugelförmige Körper $abcM$ im Gleichgewicht sein würde. Die gesuchte Resultante R wirkt also in der Linie bM und wird gefunden, indem man den Druck pro Flächeneinheit mit der Größe der Ebene aMc multipliziert.

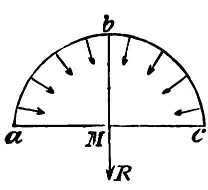


Fig. 182.

§ 204. **Einfluß der Schwerkraft auf den inneren Druck.** *Die Zusammendrückung der unteren Schichten einer Flüssigkeits- oder Gasmasse durch das Gewicht der oberen schreitet so weit fort, bis jedes Säulchen, welches man sich in der Flüssigkeit denken kann (§ 203) im Gleichgewicht ist.* Wie sich dann der Druck von einem Punkt zum anderen ändert, ergibt sich aus dem Folgenden.

a) *Da die Schwerkraft ein horizontales Säulchen nicht in der Richtung seiner Länge fortzubewegen strebt, muß der Druck in allen Punkten einer horizontalen Ebene gleich groß sein, wenigstens solange man in dieser Ebene von einem Punkt zum anderen übergehen kann ohne die Flüssigkeit zu verlassen.*

Fig. 183.

b) Ein vertikales Säulchen ab (Fig. 183) kann nur dann im Gleichgewicht sein, wenn der Druck gegen die untere Grundfläche den gegen die obere Grundfläche um einen Betrag übertrifft, der gleich dem Gewicht des

Säulchens ist. Um sogleich für die Flächeneinheit den Unterschied zwischen dem Druck in *a* und dem in *b* kennen zu lernen, nehmen wir an, daß der Querschnitt des Säulchens gleich der Einheit ist. *Der Druck in b übertrifft den in a um das Gewicht der vertikalen Flüssigkeits- oder Gassäule vom Querschnitt 1, die zwischen a und b angebracht wird.*

Bei Gasen kann die Anwendung dieses Satzes insofern Schwierigkeit bieten, als wegen der Änderung der Dichte mit der Höhe das Gewicht der Säule nicht leicht zu berechnen ist. Dies hebt jedoch die Richtigkeit des Satzes nicht auf. Wir können ihn z. B. auf eine vertikale Säule von 1 qcm Querschnitt anwenden, die sich in der offenen Luft bis an die Grenze der Atmosphäre erhebt; *die Kraft, mit welcher die Erde die in dieser Säule enthaltene Luft anzieht, bestimmt den Druck auf die Grundfläche. Ebenso groß ist dann auch (§ 202) der Druck auf ein in derselben Höhe wie diese Fläche vertikal oder schief gestelltes Quadratzentimeter, und ebenso groß ist auch der Druck in derselben horizontalen Ebene in einem Zimmer, welches durch eine wenn auch noch so enge Öffnung mit der äußeren Luft in Verbindung steht.* Wegen des geringen Gewichtes einer Luftsäule, die bis an die Decke des Zimmers reicht, kann man oft von den Druckunterschieden in diesem letzteren absehen.

Der Druck, den die Luft im Zimmer auf die Wände und andere Gegenstände ausübt, ist nicht die Folge des Gewichtes *dieser* Luft selbst, sondern des Gewichtes der äußeren Luft, durch welches die Luft im Zimmer zusammengedrückt wird.

c) Auf eine Flüssigkeitsmasse, die mit einem Teil ihrer Oberfläche mit der atmosphärischen Luft in Berührung ist, wirkt diese letztere mit einem überall gleichen Druck, so daß auch der Druck in der Flüssigkeit, unmittelbar unter der Oberfläche, überall denselben Wert haben muß. Ist die Flüssigkeit von einer Ebene begrenzt, so kann man sich ein Säulchen denken, welches unmittelbar in der Oberfläche liegt. Ein solches Säulchen wird dann in der Richtung der Länge weder nach der einen noch nach der anderen Seite gedrückt. Wirken äußere Kräfte, wie die Schwerkraft, so kann das Säulchen nur dann im Gleichgewicht sein, wenn es senkrecht auf der Richtung der Kraft steht. *Daher kommt es, daß in gewöhnlichen Fällen eine freie Flüssigkeitsoberfläche eine horizontale Ebene ist.* Ist die

Oberfläche gebogen, so kann man doch immer einen so kleinen Teil derselben betrachten, daß er als eine Ebene angesehen werden kann, und in diesem Teil ein kleines Säulchen anbringen, auf welches dann wieder dieselbe Schlußfolgerung angewandt werden kann. Die freie Oberfläche steht im Gleichgewichtszustand überall senkrecht auf der Kraft, die auf sie wirkt.

Wird eine Flüssigkeitsmasse um eine vertikale Achse gedreht, so beobachtet man dieselben Erscheinungen, die sich zeigen würden (§ 107), wenn die Drehung nicht bestände, aber auf die Flüssigkeitsteilchen die Zentrifugalkraft wirkte. Die hohle Flüssigkeitsoberfläche steht überall senkrecht auf der Resultante der genannten Kraft und der Schwerkraft.

Man wird jetzt auch leicht einsehen, daß, wie bereits früher bemerkt wurde, eine Flüssigkeitsmasse, die den Körper M in Fig. 100 (S. 192) umringte und dessen Teilchen der Einwirkung der in § 128 besprochenen Kräfte unterworfen wären, an der Außenseite durch eine der in jenem Paragraphen besprochenen Gleichgewichtsflächen begrenzt sein müßte.

d) Kehren wir zu einer Flüssigkeit zurück, die sich im homogenen Feld der Schwerkraft befindet. Wenn sie irgendwo mit der atmosphärischen Luft in Berührung ist, so kennt man den Druck an dieser Stelle; *man kann dann mit Hilfe des unter a und b Gesagten den Druck in jedem Punkt b kennen lernen, den man, von der freien Oberfläche S ausgehend, erreichen kann, ohne die Flüssigkeit zu verlassen.* Man kann nämlich (immer, einerlei welche Gestalt das umschließende Gefäß V Fig. 184) hat, innerhalb der Flüssigkeit eine Linie von a nach b ziehen, die aus horizontalen und vertikalen Strecken zusammengesetzt ist. Wenn man auf dieser Linie geht, muß man zuweilen horizontal fortschreiten, wobei man Punkte durchläuft, in denen der Druck gleich groß ist, und zuweilen vertikal aufwärts oder abwärts steigen. Bezeichnen wir die Strecken,

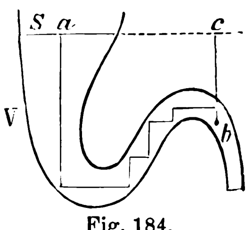


Fig. 184.

um die wir uns abwärts oder aufwärts bewegen, bezw. mit h und h', und bezeichnen wir das Gewicht einer Flüssigkeitssäule, welche die Flächeneinheit als Querschnitt hat, dadurch, daß

wir ihre Länge in Klammern setzen, so nimmt der Druck jedesmal um $[h]$ zu, wenn wir uns abwärts bewegen, und um $[h']$ ab, wenn wir aufwärts gehen. Daher wird, wenn P der Atmosphärendruck ist, der Druck in b

$$p = P + \Sigma[h] - \Sigma[h'],$$

wobei die Summenzeichen keiner Erläuterung bedürfen werden.

Ist nun bc die Linie, die in vertikaler Richtung von b nach der Oberfläche S der Flüssigkeit oder deren Verlängerung gezogen wird, so ist offenbar

$$p = P + [cb],$$

wenn (Fig. 184) b unter, und

$$p = P - [cb],$$

wenn (Fig. 185) b über der Oberfläche der Flüssigkeit liegt.

Hierbei verdient besonders bemerkt zu werden, daß das Zeichen $[cb]$ das Gewicht bedeutet, welches eine Flüssigkeitssäule haben *würde*, wenn sie die Länge cb hätte. Es ist für die Gültigkeit der mitgeteilten Formeln nicht nötig, daß die Linie cb wirklich innerhalb der Flüssigkeit liegt.

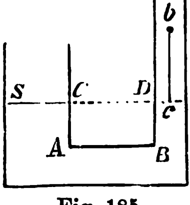


Fig. 185.

Übrigens wird man jetzt einsehen, *daß in zwei beliebigen, gleich hoch gelegenen Punkten, zwischen denen eine in der Flüssigkeit liegende Linie gezogen werden kann, der Druck immer gleich groß ist, daß überall in der Verlängerung der Oberfläche der Druck* $= P$ *sein muß und daß, wenn die freie Oberfläche der Flüssigkeit aus zwei voneinander getrennten Teilen besteht, die einem gleich großen äußeren Druck unterworfen sind, diese Teile in derselben horizontalen Ebene liegen müssen (Gesetz der kommunizierenden Gefäße).*

§ 205. **Anwendungen.** a) *Wenn wir vom Luftdruck absehen, so ist der Druck auf den horizontalen Boden eines offenen Gefäßes immer gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, die von dem Boden vertikal bis an die Oberfläche der Flüssigkeit reichen würde.* Man wird sich leicht Formen des Gefäßes denken können, bei denen dieses Gewicht kleiner oder größer ist als das Gewicht der gesamten Flüssigkeitsmasse. Berücksichtigt man jedoch auch den Druck gegen die Seitenwände, der senkrecht gegen

diese Wände wirkt und in der Regel überall in eine vertikale und eine horizontale Komponente zerlegt werden kann, so wird man einsehen, daß doch die Resultante *aller* Kräfte, welche die Flüssigkeit auf das Gefäß ausübt, gleich dem Gewicht der Flüssigkeit werden kann, wie es der Fall sein muß.

b) *Die horizontale Wand AB des in Fig. 185 abgebildeten Gefäßes erleidet einen Druck nach oben, gleich dem Gewicht, welches ein Flüssigkeitsvolum $ABCD$ haben würde.*

c) *Druck gegen eine nicht horizontale Wand AB (Fig. 186).* Es sei (ebenso wie in den folgenden Figuren) S die Oberfläche der Flüssigkeit, ab ein unendlich kleiner Teil der Wand, pq ein in derselben Höhe gelegenes gleich großes horizontales Flächenelement, $pqp'q'$ die darüber stehende bis S reichende Flüssigkeitssäule. *Das Gewicht derselben gibt den Druck auf ab an;* dieser ist also offenbar größer als das Gewicht der Säule $aba'b'$, die *wirklich* über ab steht. *Der Druck gegen die gesamte Wand wird gefunden, indem man mit jedem Element in der angegebenen Weise verfährt und die erhaltenen Kräfte miteinander zusammensetzt.*

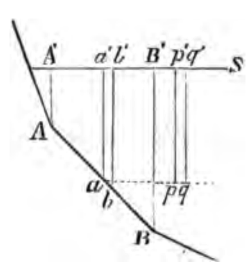


Fig. 186.

Wir denken uns die Wand AB horizontal gelegt und über jedem Punkt a die Flüssigkeit bis zu einer Höhe stehend, die gleich aa' in Fig. 186 ist. Dann steht wirklich über jedem Element ab eine Flüssigkeitssäule, deren Gewicht gleich dem Druck ist, der in Fig. 186 auf ab wirkt; daher ist in dieser Figur der Gesamtdruck auf AB gleich dem Gewicht der gesamten Flüssigkeitsmasse, die man in der angegebenen Weise bekommt, eine Masse, die die Gestalt einer Säule hat, die auf der horizontal gelegten Wand steht und die oben durch eine Ebene schief abgeschnitten ist. Die Senkrechte aus dem Schwerpunkt dieser Säule auf ihre horizontale Grundfläche bestimmt durch ihren Fußpunkt den Angriffspunkt des resultierenden Drucks in Fig. 186.

Diese Betrachtung ist auch auf eine vertikale Wand anwendbar.

d) *Gesetz von Archimedes. Da auf einen festen Körper, der in eine Flüssigkeit untergetaucht ist, an der unteren Seite ein größerer Druck wirkt als an der oberen, so ist die Resultante aller Drucke auf die Oberfläche eine vertikal nach oben gerichtete Kraft. Diese ist immer gleich dem Gewicht der Flüssigkeitsmasse, welche den von dem festen Körper eingenommenen Raum ausfüllen würde, mit anderen Worten, gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssig-*

keit. Das letztere sieht man unmittelbar für ein gerades Prisma mit horizontalen Grundflächen ein. Hierbei werden nämlich die Drucke auf die untere und die obere Grundfläche durch das Gewicht von Flüssigkeitssäulen gegeben, die auf diesen Flächen stehen und bis an die Oberfläche der Flüssigkeit reichen würden.

Bei einem Körper von beliebiger Form kann man den Druck auf jedes Element betrachten und diese Kräfte miteinander zusammensetzen oder, was einfacher ist, eine Schlußfolgerung anwenden, die mit der in § 203 befolgten übereinstimmt. Ersetzt man nämlich den festen Körper durch eine Flüssigkeitsmasse, die denselben Raum einnimmt, so ist diese in der sie umgebenden Flüssigkeit im Gleichgewicht; die Resultante aller Kräfte, die sie von letzterer erleidet und die natürlich dieselben sind, die vorher auf den festen Körper wirkten, muß also gleich und entgegengesetzt ihrem Gewicht sein. Außerdem muß sie mit diesem Gewicht in derselben Linie wirken; hieraus folgt, *daß der Druck nach oben auch bei dem festen Körper durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit gerichtet ist.*

Das Gesagte gilt auch für einen schwimmenden Körper, der nur zum Teil untergetaucht ist; unter der verdrängten Flüssigkeit hat man hierbei diejenige zu verstehen, welche den von dem Körper eingenommenen Raum ausfüllen würde, soweit dieser unterhalb der Oberfläche der Flüssigkeit liegt.

Ein ganz untergetauchter Körper kann in der Flüssigkeit im Gleichgewicht sein, wenn sein Gewicht gleich dem der verdrängten Flüssigkeit ist; er stellt sich dann aber in der Regel *in eine bestimmte Richtung,* in die er nach jeder Drehung zurückkehrt. Bei einer beliebigen Lage (Fig. 187) wirkt nämlich auf den Körper die Schwerkraft, die man sich im Schwerpunkt Z angreifend denken kann, und der ebenso große Druck nach oben, der letztere in einer Linie, die durch den Schwerpunkt Z' der verdrängten Flüssigkeit geht. Diese beiden Kräfte bilden ein Kräftepaar. Im stabilen Gleichgewicht ist der Körper erst dann, wenn Z vertikal unter Z' liegt.

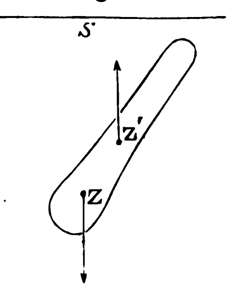


Fig. 187.

Das Gleichgewicht besteht in jeder Lage, wenn der Körper homogen ist; dann fallen nämlich Z und Z' zusammen.

Die Frage, wann ein schwimmender Körper im stabilen Gleichgewicht ist, wird durch eine ähnliche Betrachtung beantwortet. Fig. 188 stellt z. B. einen vertikalen Durchschnitt durch ein homogenes rechtwinkliges Parallelepiped vor; die Ebene der Figur geht durch den Mittelpunkt und läuft einer der Seitenflächen parallel. Der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit fällt mit dem des Trapezes $ABEF$ zusammen, der Schwerpunkt des Körpers mit dem des Rechtecks $ABCD$. Man sieht, wie das Gewicht und der Druck nach oben ein Kräftepaar bilden, welches das Parallelepiped in eine Lage zurücktreibt, in welcher AB horizontal ist.

Man wird leicht einsehen, daß ein homogener Zylinder, dessen Länge viel größer ist als die Querdimensionen, oft im

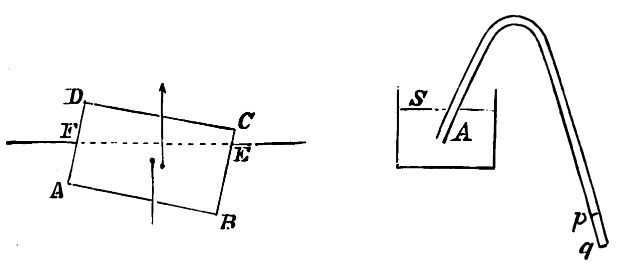


Fig. 188. Fig. 189.

labilen Gleichgewicht sein wird, wenn er in vertikaler Stellung schwimmt. Um einen solchen Körper in dieser Stellung zu halten, muß das untere Ende belastet werden.

Wir wollen nicht unterlassen, schließlich zu bemerken, *daß das Gesetz von Archimedes auch gilt, wenn der umgebende Stoff gasförmig ist; auch kann der untergetauchte Körper flüssig oder gasförmig sein.* In dem Aufsteigen eines leichteren in einem schwereren Gas kann man eine Bestätigung dieses Gesetzes erblicken.

e) *Heber.* Die umgebogene Röhre in Fig. 189 ist mit dem einen Ende in die im Gefäß A enthaltene Flüssigkeit eingetaucht und wird, nachdem sie vollständig mit der Flüssigkeit gefüllt ist, bei q mit dem Finger zugehalten. Dann besteht in der Röhre bei q ein Druck, der größer oder kleiner als der Atmosphärendruck ist, je nachdem q tiefer oder höher liegt als

die Oberfläche der Flüssigkeit in A. Im ersten Falle wird, wenn der Finger entfernt wird, auf die Flüssigkeitsmasse zwischen den Ebenen p und q von oben ein größerer Druck wirken als von unten, die Flüssigkeit wird also ausströmen. Dagegen wird sie im zweiten Fall nach A zurückgetrieben werden.

f) *Kommunizierende Gefäße mit verschiedenen Flüssigkeiten. Barometer.* In der U-förmigen Röhre von Fig. 190 befindet sich von a bis b Quecksilber und darüber in dem einen Schenkel Wasser bis c. Da in einem Punkte von b und einem zweiten Punkt, der im anderen Schenkel in derselben horizontalen Ebene liegt, derselbe Druck bestehen muß, ist die Gleichgewichtsbedingung die, *daß die Höhen von a und c über dieser horizontalen Ebene den Dichten von Quecksilber und Wasser umgekehrt proportional sein müssen.*

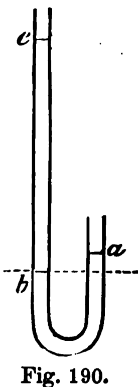


Fig. 190.

Man beachte hierbei, daß in zwei Punkten, die in beiden Schenkeln gleich hoch, aber über b, also in verschiedenen Flüssigkeiten liegen, der Druck nicht derselbe ist.

Bei dem gewöhnlichen Gefäßbarometer, welches in Fig. 191 abgebildet ist, muß in der horizontalen Ebene abd der Druck überall gleich groß sein. Während an der Oberfläche der Flüssigkeit im Gefäß der Atmosphärendruck besteht, hat man, wenn über c ein luftleerer Raum ist, innerhalb des Rohres bei d den Druck, welcher durch die Quecksilbersäule cd ausgeübt wird. *Der Druck in der Atmosphäre ist also gleich dem Druck, der in Abwesenheit der Luft auf dem Boden eines mit Quecksilber gefüllten Gefäßes gefunden werden würde, wenn die Höhe der Flüssigkeit in demselben gleich der vertikalen Höhe des Quecksilbers in der Barometerröhre über derjenigen im Gefäß wäre.*

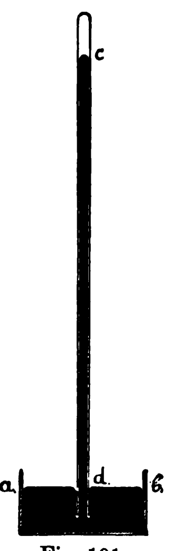


Fig. 191.

Bei einem Heberbarometer (Fig. 192) wird in derselben Weise der Druck der Atmosphäre durch den vertikalen Abstand der Quecksilberoberflächen c und b angegeben.

Aus dem Barometerstand kann man leicht den Luftdruck in Dyn pro Quadratzentimeter ableiten. Man findet dafür beim mittleren Barometerstand von 76 cm (Quecksilber von 0°) $1{,}014 \times 10^6$ Dyn.

Wenn man die Röhre eines Barometers neigt, so bleibt die *vertikale* Höhe des Quecksilbers über der Oberfläche im Gefäß unverändert. Bei einer hinreichenden Neigung füllt das Quecksilber die Röhre vollständig und übt selbst gegen das verschlossene Ende einen Druck aus; dieser Druck ist gleich dem Gewicht einer Quecksilbersäule, deren Länge man findet, indem man die vertikale Höhe der Spitze der Röhre über der Oberfläche des Quecksilbers von der Barometerhöhe abzieht.

Fig. 192.

Dasselbe gilt bei einer vertikalen Röhre, welche kürzer als die Barometerhöhe und ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Wendet man dieselbe Berechnung auf eine Röhre an, die länger als die Barometerhöhe ist, in der Voraussetzung, daß die Flüssigkeit bis an die Spitze reicht, so findet man für den Druck einen negativen Wert. Dies bedeutet, daß die Röhre nur dann gefüllt sein kann, wenn das Quecksilber am Glase *hängt* und wenn ebenso der obere Teil der Quecksilbersäule die tiefer gelegene Flüssigkeit durch eine anziehende Kraft trägt. Bei einem gut ausgekochten Barometer kann man tatsächlich zuweilen beobachten, daß nach dem Umkehren der Röhre in das Gefäß und nach Entfernung des Fingers die Quecksilbersäule sich erst nach einem gelinden Klopfen von der Spitze der Röhre trennt.

Wir weisen noch ausdrücklich darauf hin, daß in allen besprochenen Fällen der Druck nur deshalb überall berechnet werden kann, weil eine Stelle vorhanden ist, an der er bekannt ist. Bei einer Flüssigkeitsmasse, die an allen Seiten durch feste Wände eingeschlossen ist, muß man den Druck aus anderen Daten, nämlich aus der Menge des Stoffes, der Temperatur und dem Volum ableiten.

g) In jeder Flüssigkeit und in jedem Gas ist, wie bereits erwähnt wurde, der Druck unten größer als oben; wieviel dieser Unterschied beträgt, hängt jedoch von der Dichte des Stoffes ab.

Es sei z. B. A ein Punkt unten und A' ein Punkt oben in einer Gasleitung, und es seien B und B' zwei Punkte in der Luft, die bezw. mit A und A' in gleicher Höhe liegen. Da das Leuchtgas leichter als Luft ist, so muß, wenn in der Leitung Gleichgewicht besteht, der Druckunterschied zwischen A und A' kleiner sein als zwischen B und B', woraus folgt, daß der Drucküberschuß in der Gasleitung über die äußere Luft oben in einem Gebäude größer sein muß als unten.

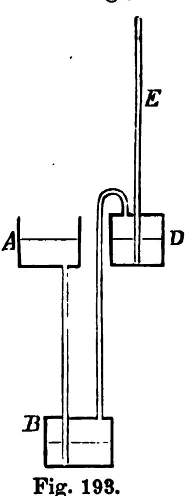


Fig. 193.

Da die Luft bei der gewöhnlichen Dichte ungefähr 800 mal leichter als Wasser ist, können die Druckunterschiede in einer Luftsäule im Vergleich mit denen in einer gleichhohen Wassersäule vernachlässigt werden. Durch eine Luftmasse kann man einen Druck von einem tiefer gelegenen nach einem höher gelegenen Punkt übertragen, ohne daß er sich merklich ändert. Dies findet z. B. bei der in Fig. 193 abgebildeten Vorrichtung statt. Die Luft im Gefäß B erleidet einen Druck, welcher der Höhe des Wassers in dem offenen Gefäß A entspricht; dieser Druck wird durch eine Röhre nach dem Gefäß D übertragen und kann aus diesem das Wasser durch die Röhre E so weit in die Höhe treiben, daß der Höhenunterschied des Wassers in D und E beinahe ebenso groß ist wie der zwischen A und B.

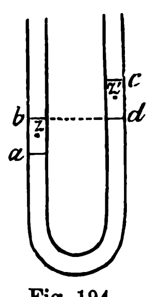


Fig. 194.

§ 206. **Arbeit der Schwerkraft bei der Bewegung von Flüssigkeiten.** Diese Arbeit oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Verminderung der Energie der Lage gegenüber der Schwerkraft kann man finden (§ 169), indem man die Höhe, um welche der Schwerpunkt der gesamten Flüssigkeitmasse sinkt, mit dem Gewicht derselben multipliziert. In vielen Fällen ist jedoch eine andere Auffassung einfacher.

Steht z. B. in einer U-förmigen Röhre (Fig. 194) die Flüssigkeit erst auf beiden Seiten gleich hoch, nämlich bis b und d, und wird sie dann verschoben, so daß sie bis a und c

reicht, so kann man sich vorstellen, daß man diesen neuen Stand dadurch bekommen hat, daß man die Flüssigkeitsmasse ab hinweggenommen und mit ihr den Raum dc gefüllt hat; es kommt nämlich, was die gesamte potentielle Energie betrifft, offenbar nicht darauf an, ob das eine Flüssigkeitsteilchen oder das andere auf einer gewissen Höhe liegt. Ist nun z der Schwerpunkt der Masse ab und z' der Schwerpunkt der Masse dc, so wird die Vermehrung der Energie der Lage gefunden, indem man die Höhendifferenz von z und z' mit dem Gewicht der betreffenden Mase multipliziert.

§ 207. **Arbeit eines äußeren Druckes.** a) *Ein überall gleich großer äußerer Druck verrichtet eine Arbeit bei jeder Veränderung des Volums.*

Der betrachtete Stoff befinde sich in einem Zylinder unter einem beweglichen Kolben, und auf diesen letzteren werde ein normaler Druck von p Dyn pro qcm ausgeübt. Ist die Oberfläche des Kolbens S qcm, so ist die gesamte Kraft pS Dyn und bei einer Verschiebung nach innen um eine Strecke von δ cm wird die gesuchte Arbeit $pS\delta$ Erg. Das Produkt $S\delta$ stellt aber die Volumverminderung vor. *Daher wird die Arbeit des äußeren Druckes (in Erg) gefunden, wenn man den Druck (in Dyn pro qcm) mit der Volumveränderung (in cbcm ausgedrückt) multipliziert.*

Bei einer Bewegung des Kolbens nach außen verrichtet der äußere Druck eine negative Arbeit; auf diese ist derselbe Satz anwendbar, da in diesem Fall auch die Volumverminderung negativ ist. Der Satz gilt übrigens immer, wenn auf alle Punkte der Oberfläche eines Körpers ein gleich großer normaler Druck wirkt; es ist nicht nötig, daß sich der Stoff in einem Zylinder unter einem Kolben befindet.

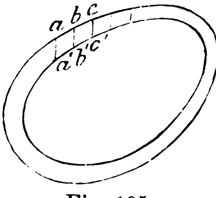


Fig. 195.

Wir wollen annehmen, daß anfangs $abc\ldots$ (Fig. 195) die Oberfläche des Körpers ist und daß die Punkte a, b, c ... durch unendlich kleine Verschiebungen nach a', b', c' ... kommen. Teilt man die Oberfläche in unendlich kleine Teile, in dem gezeichneten Durchschnitt durch ab, bc ... angegeben, so sind die Verschiebungen der verschiedenen Punkte desselben Elementes nahezu einander parallel und gleich. Den Inhalt des Raumes $aba'b'$ kann man also berechnen

als ob er ein Zylinder wäre. Ist δ die Senkrechte von a' auf das Flächenelement $a\,b$, σ dieses Flächenelement selbst, so ist der betreffende Raum

$$\tau = \delta\,\sigma.$$

Anderseits ist der Druck auf σ, wenn er für die Flächeneinheit p ist, gleich $p\,\sigma$, die Arbeit desselben

$$p\,\sigma\,\delta = p\,\tau,$$

und also die gesamte Arbeit, welche man sucht,

$$p\,\Sigma\tau.$$

Es ist leicht einzusehen, daß $\Sigma\tau$ die Volumverminderung ist.

Den Fall, daß sich die Punkte der Oberfläche nach außen bewegen, oder daß sich einige nach innen und andere nach außen verschieben, können wir dem Leser überlassen.

Aus dem Satz folgt, *daß ein überall gleichgroßer Druck keine Arbeit verrichtet, solange sich das Volum nicht verändert.* Bei einer Flüssigkeit, welche zwischen zwei Kolben eingeschlossen ist, von denen der eine nach innen geht und der andere zurückweicht, kann man sich leicht davon überzeugen; man muß dabei berücksichtigen, daß die auf die Kolben wirkenden Kräfte den Oberflächen der Kolben proportional sind.

b) Der Druck, den eine Flüssigkeit oder ein Gas auf die begrenzenden Wände ausübt, ist gleich und entgegengesetzt demjenigen, welchen der Stoff selbst erleidet; die Arbeit desselben wird daher gefunden, indem man den Druck auf die Flächeneinheit mit der Volumvermehrung multipliziert.

c) *Bei einer inkompressibelen Flüssigkeit verrichten die äußeren Drucke eine Arbeit, wenn die Flüssigkeit von einer Stelle, wo der Druck hoch ist, nach einer anderen strömt, wo er niedriger ist.* Befindet sich z. B. die Flüssigkeit zwischen zwei Kolben a und b (Fig. 196), gegen die pro Flächeneinheit die Drucke p und p' wirken und die sich bis nach a' und b' fortbewegen, so findet man durch Anwendung der oben unter a angewandten Schlußfolgerung, daß die gesamte Arbeit der Drucke

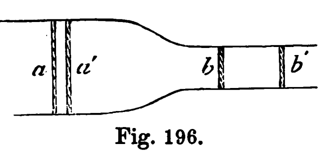


Fig. 196.

$$(p - p')\,V$$

ist.

Dabei ist V das Volum, welches zwischen a und a' oder zwischen b und b' enthalten ist, also auch das Flüssigkeits-

volum, welches durch einen beliebigen Durchschnitt zwischen a und b geströmt ist.

§ 208. **Anwendung des Prinzips der Arbeit auf das Gleichgewicht der Flüssigkeiten.** *Aus allen Erscheinungen ergibt sich, daß*, abgesehen von einem Umstand, der später besprochen werden wird, *die innere Energie einer Flüssigkeit durch das Volum und die Temperatur bestimmt ist. Bleiben diese unverändert und kann man von der Aufnahme oder Abgabe von Wärme absehen, so muß also jeder Arbeit der äußeren Kräfte eine Vermehrung der kinetischen Energie der sichtbaren Bewegungen entsprechen.* Wir werden im folgenden Paragraphen hiervon eine Anwendung auf eine Bewegungserscheinung machen; zunächst bemerken wir jedoch, daß die Schlußfolgerungen von §§ 155 und 156 und die aus ihnen abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen auch für Flüssigkeiten gelten.

Wir können sie z. B. auf den Fall anwenden, auf den sich Fig. 190 (S. 317) bezieht. Wir stellen uns zu diesem Zwecke vor, daß sich die Oberfläche a um einen unendlich kleinen Abstand δ aus der Gleichgewichtslage nach unten verschiebt; ist die Röhre überall gleichweit, so gehen hierdurch die Oberflächen b und c um ebensoviel nach oben. Es sei nun S der Querschnitt der Röhre, h der Höhenunterschied zwischen a und b, h' der zwischen b und c, s das spezifische Gewicht der unteren, s' das der oberen Flüssigkeit; dann hat die Energie der Lage der ersteren abgenommen (§ 206) um

$$h s S \delta$$

und die der letzteren zugenommen um

$$h' s' S \delta.$$

Die gesamte Verminderung der potentiellen Energie, d. h. die Arbeit der Schwerkraft, beträgt also

$$(h s - h' s') S \delta.$$

Soll in der ursprünglichen Lage Gleichgewicht bestehen, so muß dieser Ausdruck gleich Null sein, und hierdurch kommt man auf die bereits bekannte Bedingung zurück.

§ 209. **Ausfluß durch eine Öffnung in einer Wand.** a) Wir betrachten den Fall, daß sich in dem Boden eines Gefäßes Fig. 197) eine Öffnung $a b$ befindet; wir wollen annehmen, daß

während des Ausfließens der Flüssigkeit ihre Oberfläche auf einer konstanten Höhe h über ab gehalten wird. *Der Bewegungszustand wird dann unveränderlich (stationär); nicht allein in der Öffnung, sondern auch in einem beliebigen Punkt des mit Flüssigkeit gefüllten Raumes wird jederzeit dieselbe Geschwindigkeit angetroffen, obgleich in einen solchen Punkt immer wieder neue Flüssigkeit gekommen ist.*

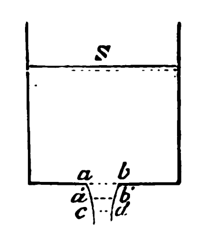


Fig. 197.

Wir achten nun auf die Menge Flüssigkeit, die sich in einem bestimmten Augenblick zwischen S und der Ebene ab befindet. Nach einer unendlich kleinen Zeit ist diese Masse unter S bis an die punktierte Ebene gesunken und erstreckt sich unten z. B. bis $a'b'$. Die potentielle Energie hat um ebensoviel abgenommen, als wenn eine dünne Schicht von der Oberfläche weggenommen und nach $aba'b'$ gebracht worden wäre. Die betreffende Verminderung beträgt also Ph, wenn P das Gewicht der ausgetretenen Menge bedeutet. Man kann ferner in dem dünnen Flüssigkeitsstrahl den Druck überall gleich dem Atmosphärendruck setzen; die betrachtete Menge Flüssigkeit erleidet also auf ihren Grenzflächen S und ab Drucke, die pro Flächeneinheit gleichgroß sind, so daß von einer Arbeit des äußeren Druckes keine Rede ist. Hieraus folgt, daß die kinetische Energie um Ph zugenommen haben muß. Nun ist diese Energie in dem Raum zwischen der punktierten Oberfläche und ab fortwährend dieselbe, aber während anfangs die Flüssigkeit zwischen dieser punktierten Ebene und S keine merkliche Bewegung hat (was man annehmen darf, wenn die Oberfläche S viel größer als ab ist), hat die ausgetretene Menge $aba'b'$ eine gewisse Geschwindigkeit v und also, wenn m die Masse ist, eine kinetische Energie

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = \frac{P v^2}{2g}.$$

Wir haben also

$$\frac{P v^2}{2g} = P h$$

oder

$$v = \sqrt{2gh}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

so daß die Ausflußgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit ist, die ein Körper bekommt, wenn er von der Höhe h herabfällt (Gesetz von Torricelli).

Diese Regel gilt auch, wenn die Flüssigkeit durch eine Öffnung in einer Seitenwand ausströmt, und selbst, wenn sie durch eine Öffnung in einer horizontalen Wand, z. B. durch die Wand AB in Fig. 185 (S. 313) nach oben spritzt. Durch seine Geschwindigkeit würde dann jedes Flüssigkeitsteilchen zu einer Höhe gleich der des Flüssigkeitsspiegels S emporsteigen können, wenn dies nicht durch das Entgegenkommen der zurückfallenden Teilchen verhindert würde. Außerdem wird in allen Fällen die Ausflußgeschwindigkeit durch die Reibung verkleinert.

Bestände überhaupt keine Reibung, so würde auch beim Ausströmen durch einen Heber die abgeleitete Formel gelten.

b) Sehr einfach ist auch die Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit, wenn auf die Oberfläche der Flüssigkeit noch ein Druck, z. B. der Druck eines komprimierten Gases wirkt. Man kann nämlich die Arbeit dieses Druckes in die Berechnung aufnehmen oder sich über S noch eine Flüssigkeitsmasse angebracht denken, die durch ihr Gewicht auf S einen Druck ausübt, der ebensogroß ist wie der Überschuß des wirklich vorhandenen Druckes über den Atmosphärendruck. Man muß dann in der Formel unter h die gesamte Höhe verstehen, welche die Flüssigkeit hierdurch bekommen hat.

Kann man von dem Einfluß der Schwerkraft absehen, und übertrifft der Druck im Gefäß den äußeren Druck um den Betrag p, während die Dichte d ist, so hat man für die Arbeit des Druckes beim Ausströmen einer kleinen Masse m, $p\,m/d$. Wenn man dies der erhaltenen kinetischen Energie gleichsetzt, findet man für die Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2p/d}$.

Bei gleichem Druck ist sie also umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte.

c) Die umgekehrte Bewegung, bei welcher die Flüssigkeit durch eine Öffnung in das Gefäß einströmt, ist ebenfalls möglich, wenn man nur dem Wasser eine nach innen gerichtete Geschwindigkeit von hinreichender Größe gibt. Findet z. B. die am Anfang dieses Paragraphen betrachtete Bewegung in umgekehrter Richtung statt, so wird beim Einströmen einer Menge Flüssigkeit vom Gewicht P eine Menge potentieller Energie Ph gewonnen, während eine Menge kinetischer Energie $Pv^2/2g$ verloren geht, woraus wieder $v = \sqrt{2gh}$ folgt. Die Flüssigkeit muß also

r das Einströmen dieselbe Geschwindigkeit haben, die sie durch das ısströmen bekommen würde.

§ 210. **Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit ausströmt.** 'enn sich eine Flüssigkeit (oder ein Gas) senkrecht zu einer ıgrenzten Ebene S durch diese hindurchbewegt, und zwar ›erall mit derselben Geschwindigkeit v, so geht während der ɜit τ ein Flüssigkeitszylinder mit der Höhe $v\tau$ durch die bene hindurch. Das Volum desselben ist $vS\tau$; für die Zeitɑheit ist also das Volum, welches durch die Ebene strömt, vS.

Man kann dies jedoch nicht auf die Öffnung ab in Fig. 197 ıwenden, da, wie aus der Figur zu ersehen ist, die Teilchen ɑ Umfang sich nicht in vertikaler Richtung bewegen. *Der üssigkeitstrahl zieht sich infolgedessen zusammen* und erst in ıiger Entfernung unterhalb ab, z. B. bei cd, wird er an.hernd zylindrisch. Da die Geschwindigkeiten dann alle rtikal geworden und nur wenig größer sind als die in § 209 rechnete Geschwindigkeit v, so erhält man die ausströmende ənge, indem man v mit dem Querschnitt des Strahls bei cd ıltipliziert.

Die Beobachtung hat gelehrt, daß, wenn O die Größe r Öffnung ab bedeutet, die Ausflußmenge annähernd $0{,}6\,v\,O$ ist.

§ 211. **Druckdifferenzen bei der Bewegung einer Flüssigit durch eine Röhre mit Erweiterungen oder Verengungen.** .e Gesetze, nach denen die Bewegung einer Flüssigkeit in ɔhren stattfindet, sind nicht dieselben bei verschiedenen ırchmessern dieser letzteren; vom Querschnitt hängt nämlich r Einfluß ab, den die Reibung auf die Erscheinungen aust. Wir wollen vorläufig annehmen, daß man die Röhren ›it genug nimmt, um von der Reibung ganz absehen zu nnen. Dann braucht man auf den verzögernden Einfluß der and keine Rücksicht zu nehmen und kann die Geschwindigit in allen Punkten eines Querschnittes als gleichgroß beıchten. Unter einem Querschnitt verstehen wir immer einen lchen, der auf der Länge der Röhre senkrecht steht. Ändert :h die Größe desselben von einem Punkt der Röhre zum deren nicht oder nur langsam, so können wir sagen, daß :h die Flüssigkeitsteilchen überall senkrecht zum Querschnitt wegen. Ist also S die Fläche desselben und v die Ge-

schwindigkeit, so ist das Volum, welches in der Zeiteinheit durch den Querschnitt strömt, $v S$. Bei nicht zusammendrückbaren Flüssigkeiten, welche die Röhre fortwährend vollständig füllen, muß diese Menge natürlich für jeden Querschnitt gleichgroß sein. *In einer zylindrischen Röhre ist daher die Geschwindigkeit in der ganzen Länge gleichgroß; in jedem anderen Falle ändert sie sich umgekehrt proportional dem Querschnitt.*

Wir wollen uns der Einfachheit halber auf Bewegungen beschränken, die dauernd in derselben Weise stattfinden. Außerdem wollen wir vorläufig annehmen, daß die Röhre horizontal liegt oder daß, wenn dies nicht der Fall ist, die Wirkung der Schwerkraft im Vergleich mit der Wirkung des Druckes, welcher die Bewegung verursacht, vernachlässigt werden kann.

Man kann nun in Gedanken durch zwei dicht nebeneinander liegende Querschnitte einen Teil der Flüssigkeit vom Rest absondern und diesen Teil bei seiner Bewegung verfolgen. Er wird durch die Flüssigkeit, welche hinter ihm liegt, fortgetrieben, aber durch die Flüssigkeit, welche vor ihm liegt, zurückgehalten. Je nachdem die Resultante der Drucke die eine oder die andere Richtung hat, wird die Bewegung beschleunigt oder verzögert sein.

Ist die Röhre überall gleichweit, so ist die Bewegung gleichförmig; es wirkt also keine Kraft auf den betrachteten Teil der Flüssigkeit, mit anderen Worten, der Druck an der Vorderseite ist gleich dem an der Rückseite. Bestände für einen Augenblick an der Rückseite ein größerer Druck, so würde eine Beschleunigung und eine kleine Zusammendrückung der mehr nach vorn gelegenen Flüssigkeit die Folge sein; dies würde so lange fortschreiten, bis der Druck wieder überall gleichgroß geworden ist.

Anders liegt die Sache bei einer Röhre, die sich erweitert oder verengt. Wenn z. B. die Flüssigkeit in der Richtung der Pfeile durch die in Fig. 198 abgebildete Röhre strömt, so muß die Geschwindigkeit in b kleiner sein als in a. Ein Flüssigkeitselement, wie das zwischen den Querschnitten c und d, hat daher beim Übergang in den weiteren Teil der Röhre eine

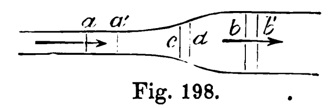


Fig. 198.

verzögerte Bewegung. Dies ist nur dann möglich, wenn der Druck rechts von d größer ist als links von c.

Man denke nicht, daß wegen der Verschiedenheit in der Größe zwischen den Querschnitten c und d bereits dann eine Kraft nach links auf das Element wirken würde, wenn der Druck pro Flächeneinheit auf beiden Seiten gleichgroß wäre. In diesem Fall würde nämlich die Flüssigkeit gegen die Wand zwischen c und d denselben Druck ausüben und also auch denselben Druck von der Wand erleiden; infolgedessen würde die Flüssigkeitsmasse an allen Seiten einem gleich großen Druck unterworfen sein, was keine resultierende Kraft liefert.

Zu dem Schluß, *daß der Druck in dem weiten Teil der Röhre größer ist als in dem engen,* kommt man auch, wenn sich die Flüssigkeit von dem ersteren nach dem letzteren bewegt; man muß dann beachten, daß die Bewegung beschleunigt ist.

Befindet sich ein enger Teil der Röhre zwischen zwei weiteren oder ein weiter zwischen zwei engeren, so kann man die Schlußfolgerung zweimal anwenden; *im ersten Fall ist der Druck in der Verengung kleiner als zu beiden Seiten derselben.* Bei hinreichender Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstromes kann eine lokale Verengung den Druck unter den Atmosphärendruck erniedrigen; ist hier nun eine Seitenröhre angebracht, so wird Luft aus dieser letzteren gesogen und durch den Wasserstrom mitgeführt werden. Es gibt sogenannte Wasserluftpumpen, welche auf diesem Prinzip beruhen.

Da die Flüssigkeitsbewegung sich so reguliert, daß durch jeden Querschnitt einer Röhre dieselbe Menge strömt, was allein bei den besprochenen Druckdifferenzen möglich ist, so müssen diese von selbst entstehen. Im einzelnen anzugeben, wie dies geschieht, ist jedoch nicht leicht.

Man vergleiche übrigens die oben angewandten Schlußfolgerungen mit denen von § 93.

Das Energiegesetz macht eine Berechnung der Druckdifferenzen möglich. Wir betrachten die gesamte Flüssigkeitsmasse, welche zwischen den Querschnitten a und b (Fig. 198) enthalten ist. Nach einer unendlich kleinen Zeit τ liegt sie zwischen a' und b'. Es sei p_1 der Druck auf die Flächeneinheit in a, p_2 der in b, ferner seien S_1 und S_2 die beiden Querschnitte, v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten, so daß $v_1 S_1 = v_2 S_2$ ist. Die Arbeit des Druckes links ist $p_1 v_1 S_1 \tau$, die des

Druckes rechts $-p_2 v_2 S_2 \tau$, und der Druck, den die Wand ausübt, verrichtet keine Arbeit, da er senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht. Die kinetische Energie muß also um $(p_1 - p_2) v_1 S_1 \tau$ zugenommen haben. Nun hat vor und nach der Zeit τ die Flüssigkeit zwischen a' und b dieselbe kinetische Energie, aber zu der Masse, die wir betrachten, gehörte erst das Volum $v_1 S_1 \tau$ mit der Geschwindigkeit v_1 und später das Volum $v_2 S_2 \tau$ mit der Geschwindigkeit v_2. Die kinetische Energie hat also zugenommen um

$$\tfrac{1}{2} v_1 S_1 \tau (v_2^2 - v_1^2) d,$$

wenn d die Dichte ist, und man bekommt:

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2} d (v_2^2 - v_1^2).$$

Die Druckdifferenz wird hierdurch in Dyn pro qcm gegeben, wenn man alles in C-G-S-Einheiten ausdrückt.

Das in diesem Paragraphen Gesagte gilt im wesentlichen auch für Gase; außerdem bestehen die Druckdifferenzen nicht allein bei der Bewegung in Röhren, sondern es findet sich überhaupt auf dem Wege einer Flüssigkeitsmasse oder einer Gasmasse immer da der kleinste Druck, wo sich dieser Weg verengt.

Zu den Erscheinungen, welche hierdurch ihre Erklärungen finden, gehören die folgenden.

a) Eine Scheibe ab (Fig. 199) hat in der Mitte eine Öffnung, in welcher die Röhre c steckt; in geringem Abstand von ab wird eine zweite Platte de gehalten. Ein kräftiger Luftstrom durch die Röhre in der Richtung des Pfeils bewirkt nun, wenn die Umstände richtig gewählt werden, daß sich die Scheibe de der Scheibe ab nähert. Die Luft, welche aus der Röhre kommt, breitet sich nämlich über den ganzen Raum zwischen den Scheiben aus; bei dieser Erweiterung des Weges muß der Druck zunehmen, und da nun am Umfang der Atmosphärendruck herrscht, findet sich überall zwischen den Scheiben und namentlich in der Mitte ein kleinerer Druck. Der Druck der äußeren Luft gegen die Unterseite von de bringt die Erscheinung hervor.

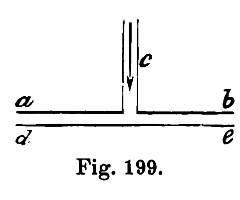


Fig. 199.

b) Wird ein Luftstrom aus der kegelförmig zugespitzten Röhre ab (Fig. 200) herausgetrieben, so breitet er sich nach dem Ausströmen sofort über einen größeren Raum aus. Bei b, wo der Strom die engste Stelle des Weges passiert, ist der

kleiner als in der umgebenden Luft; dadurch kann in
öhre *c*, die in einem Gefäß mit Flüssigkeit steht, diese
e aufgesogen werden, selbst so weit, daß
s obere Ende erreicht und in Tropfen
den Luftstrom mitgerissen wird.

Von solchen Saugwirkungen wird für
iedene Zwecke Gebrauch gemacht; die
gste Anwendung ist wohl die von Giffard
ene Speisepumpe (*Injektor*) für Dampf-
Aller Einzelheiten entkleidet, ist
Apparat in Fig. 201 abgebildet. *AB*
Seitenwand des Dampfkessels, in welchem das Wasser
steht. Wird der Hahn *K* geöffnet, so entweicht der
aus der Röhre *a*, die kegel-
ausläuft. In dem Raum *b*
it infolgedessen eine Luft-
nung, wodurch das Speise-
durch die Röhre *c* aus
Reservoir aufgesogen wird;
Wasser endlich wird durch
us *a* kommenden Dampf,
beim Zusammentreffen zu
gkeit verdichtet, in die Röhre
gerissen und mit so großer
vindigkeit gegen das Ventil *e*
en, daß es dieses öffnet und
Dampfkessel kommt. Schließt
, so wird durch den Druck
ssel auch *e* geschlossen.

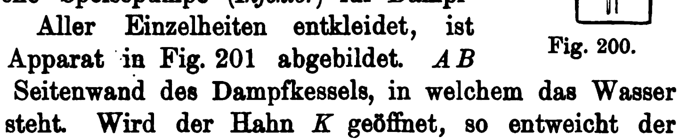


Fig. 200.

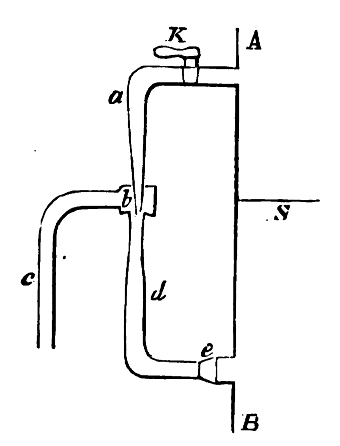


Fig. 201.

s eigentümliche dieser Wirkung besteht darin, daß sich ein
von dem Dampfraum nach einer Stelle bewegt, wo der Druck
ch oder eigentlich noch etwas höher ist. Dies ist nur deshalb
, weil erst eine Stelle von geringerem Druck, nämlich *b* erreicht
d weil der Stoff in den Dampfkessel in einem anderen Aggregat-
zurückkehrt, als er beim Verlassen desselben hatte. In Berüh-
it dem kälteren Wasser verdichtet sich der Dampf zu Wasser.
n in § 170 angeführten Satz über den Schwerpunkt folgt, daß
Vasser dieselbe Geschwindigkeit hat wie der Dampf, und wir be-
also einen Wasserstrahl von großer Geschwindigkeit. Da nun
sser eine viel größere Dichte hat, als der Dampf, so ist diese
ndigkeit mehr als hinreichend, um den Druck des Wassers

im Kessel zu überwinden (§ 208, *b* und *c*) und es kann sogar ein Teil der kinetischen Energie dazu verbraucht werden, um auch dem aufgesogenen Wasser die erforderliche Geschwindigkeit zu geben.

§ 212. **Druckdifferenzen bei der Bewegung in einer vertikalen Röhre.** Aus einem Gefäß, welches mit einer vertikal nach unten gehenden Röhre versehen ist, strömt oft eine Flüssigkeit als eine zusammenhängende Säule aus, welche die ganze Röhre füllt. Ist diese letztere, wie wir annehmen wollen, überall gleichweit, so muß die Flüssigkeit die Geschwindigkeit, mit der sie in die Röhre kommt, beibehalten, und dies ist nur möglich, wenn die gesamte Kraft, welche auf ein Element wirkt, Null ist. Der Druck reguliert sich daher so, daß für jeden Teil der Säule aus dem Druck an der Oberseite und der Unterseite eine Kraft entspringt, welche das Gewicht aufhebt; dazu muß der Druck nach oben abnehmen. *Die Druckdifferenzen müssen ebensogroß sein wie in dem Falle, daß die Flüssigkeit in einer unten geschlossenen Röhre ruht,* denn auch dann wird jedes Element durch die Druckdifferenz zwischen der Oberseite und der Unterseite getragen. Zwischen den beiden Fällen besteht aber der Unterschied, daß in der geschlossenen Röhre am unteren Ende ein Druck herrscht, welcher den Atmosphärendruck übertrifft, während beim Ausströmen der Flüssigkeit der Druck unten gleich dem Luftdruck ist und an der Spitze der Röhre einen kleineren Wert hat.

Man kann sich die Entstehung dieser Druckdifferenz in folgender Weise vorstellen. Wenn für einen Augenblick überall in der Röhre derselbe Druck herrschte, so würde die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen durch die Wirkung der Schwerkraft beschleunigt werden. Nach kurzer Zeit würden die Teilchen, welche sich weiter unten in der Röhre befinden und also einen längeren Weg durchlaufen haben, eine größere Geschwindigkeit bekommen haben als diejenigen, welche weiter oben liegen. Das Flüssigkeitsvolum, welches dazwischen liegt, wird also etwas vergrößert und der Druck, welcher in demselben herrscht, etwas verkleinert werden. Die Druckdifferenzen, welche auf diese Weise entstehen, werden so lange zunehmen, bis die Geschwindigkeit überall in der Röhre gleichgroß geworden ist, was nur möglich ist, wenn die Wirkung der Schwerkraft durch die entstandenen Druckdifferenzen aufgehoben wird.

Die Erniedrigung des Druckes am oberen Ende der Röhre ist um so größer, je länger die Röhre ist; da der Druck nicht immer kleiner und kleiner werden kann, muß bei fortwährender Verlängerung der Röhre endlich der Zusammenhang der Säule unterbrochen werden, so daß sie sich in Tropfen auflöst.

Wir wollen uns jedoch auf den Fall einer zusammenhängenden Flüssigkeitssäule beschränken. Wird das obere Ende der Röhre mit einem Gefäß verbunden, welches mit Luft gefüllt ist, so wird diese so lange aus demselben weggesogen und durch die Flüssigkeit mitgenommen werden, bis der Druck im Gefäß gleich dem Druck oben in der Röhre ist. Auf diesem Prinzip beruhen einige Wasser- und Quecksilberpumpen. Es ist klar, daß bei diesen Apparaten, wenn man ein ziemlich gutes Vakuum erzielen will, die Röhre für Wasser etwas über 10 m und für Quecksilber ungefähr 76 cm lang sein muß.

Man wird nun leicht einsehen, daß durch das Anbringen einer vertikalen Röhre unter der Öffnung ab von Fig. 197 (S. 323) die Ausflußgeschwindigkeit zunimmt; dadurch wird nämlich der Druck in ab kleiner als er vorher war. Man kann übrigens auch das untere Ende der Röhre als die Ausflußöffnung betrachten, so daß man in der Formel (1) für h eine größere Höhe nehmen muß als in § 209.

Endlich bemerken wir noch, daß auch eine Flüssigkeit, die in gesonderten Tropfen durch eine vertikale Röhre fällt, am oberen Ende derselben eine Saugwirkung ausübt, wenigstens wenn die Tropfen die Röhre vollständig abschließen. Jeder Tropfen wirkt als ein Kolben und nachdem er beim Herabgleiten bewirkt hat, daß aus einem mit der Röhre verbundenen Gefäß etwas Luft zuströmt, kann ein zweiter Tropfen diese Luft abschließen und vor sich austreiben.

§ 213. **Bewegung von Flüssigkeiten durch enge Röhren.** *Eine Flüssigkeit kann sich niemals einen festen Körper entlang bewegen, ohne daß dieser eine gewisse Reibung auf sie ausübt; außerdem besteht eine solche Kraft zwischen den Teilen der Flüssigkeit, die sich gegeneinander verschieben.* Um von dieser letzteren Kraft, der sogenannten *inneren Reibung (Viskosität)* eine Vorstellung zu bekommen, denken wir uns zwei Flüssigkeitsschichten A und B (Fig. 202), die sich parallel zur Grenzfläche V beide nach rechts bewegen, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten.

Die Schicht A, welche am schnellsten strömt, wird dann durch die andere zurückgehalten, aber sie strebt umgekehrt diese mitzuführen. *Die gleichen und entgegengesetzten Kräfte, die sie parallel zu V aufeinander ausüben, haben bei jeder Flüssigkeit bei einer gegebenen Geschwindigkeitsdifferenz einen bestimmten Wert pro Flächeneinheit, so daß für jede Flüssigkeit ein Koeffizient (Reibungskoeffizient) eingeführt werden kann, vermittelst dessen die Kräfte in jedem Fall angegeben werden können.* Setzt man diese Kräfte mit dem normalen Druck zwischen A und B zusammen, so ergibt sich, daß die Gesamtwirkung zwischen den Schichten gegen V schief gerichtet ist, etwas worauf bereits in § 201 hingedeutet wurde.

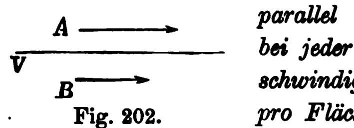


Fig. 202.

Aus den Beobachtungen hat man abgeleitet, daß bei der Bewegung einer Flüssigkeit durch eine Röhre in den meisten Fällen die äußerste Flüssigkeitsschicht durch die Wand vollständig festgehalten wird. Diese Schicht übt dann auf eine folgende Schicht eine verzögernde Wirkung aus, diese wieder auf eine dritte weiter nach innen liegende, usw. Schließlich bewegen sich diejenigen Schichten am schnellsten, welche von der Wand am weitesten entfernt sind. Teilt man die Flüssigkeitssäule in einer Röhre von kreisförmigem Querschnitt durch eine große Anzahl von Zylinderflächen, die mit der Wand der Röhre die Achse gemein haben, in ein volles Zylinderchen in der Mitte und eine Anzahl ineinander passender Hohlzylinder um dieses herum, so kann man sich leicht vorstellen, wie diese Teile der Flüssigkeit, jeder mit seiner eigenen Geschwindigkeit, fortgeschoben werden. Jeder Hohlzylinder der Flüssigkeit erleidet dabei sowohl an der Innenseite als auch an der Außenseite eine Reibung, aber eine nähere Betrachtung lehrt, daß die Reibung an der Außenseite, die der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist, die Reibung an der Innenseite übertrifft, und daß also für jeden Hohlzylinder die Reibung an beiden Seiten zusammengenommen sich der Bewegung widersetzt.

Es muß nun, auch wenn die Röhre überall gleich weit und also die Bewegung eines jeden Teilchens gleichförmig ist, ein Druckunterschied bestehen, um die Bewegung zu unterhalten.

Es seien (Fig. 203) A und B zwei durch die Röhre ab verbundene Gefäße, in denen in der einen oder anderen Weise

'lüssigkeit auf konstanten Höhen S_1 und S_2 gehalten so daß eine stationäre Bewegung entsteht. Man kann unterscheiden: den Druck p_1 im Gefäß A, nahe bei der ng der Röhre, den Druck p_1' in der Röhre nahe bei a und in derjenigen Stelle, wo die Flüssigkeitsteilchen len Geschwindigkeiten, ie weiter beibehalten, el zur Achse von ab en, ferner den Druck ıerhalb der Röhre nahe unmittelbar bevor die en beim Austreten die windigkeiten ändern, h den Druck p_2 in B, bei der Mündung der Röhre. Dann wird durch die ənz $p_1 - p_1'$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit hervor- ;ht, durch die Differenz $p_1' - p_2'$ unterhalten, endlich die Differenz $p_2 - p_2'$ wieder vernichtet.

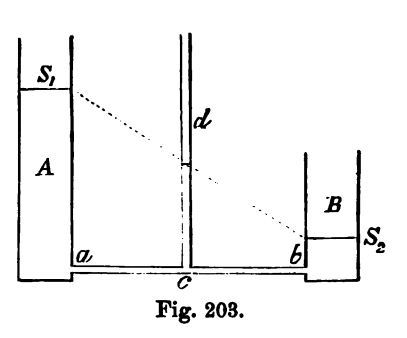


Fig. 203.

ɪei sehr engen (kapillaren) und nicht zu kurzen Röhren n die Geschwindigkeit so klein und die Reibung so be- ıd, daß wir die Differenzen $p_1 - p_1'$ und $p_2 - p_2'$ gegen- $p_1' - p_2'$ vernachlässigen und also annehmen können, *ie gesamte Druckdifferenz zur Überwindung der Reibung in ihre dient.*

us der Beobachtung hat sich ergeben, daß bei Röhren, welche Bedingung genügen, das Volum Flüssigkeit, welches in der heit durch einen Querschnitt geht, also das was wir die e" oder „Intensität" des Stromes nennen können, der Druck- ız zwischen den Enden proportional ist. Bezeichnet man die Druckdifferenz, welche erforderlich ist, um einen von der Stärke 1 durch die Röhre gehen zu lassen, teht also in jedem anderen Fall zwischen der Stärke i əm Druckunterschied die Beziehung

$$p_1 - p_2 = i r,$$

$$i = \frac{p_1 - p_2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Größe r ist um so größer, je schwerer die Röhre die Flüssigkeit durchläßt, und kann daher als Maß für den Widerstand dienen, den die Flüssigkeit in der Röhre zu überwinden hat, oder selbst der *Widerstand* genannt werden.

Will man die Widerstände zweier Röhren miteinander vergleichen, so kann man sie so verbinden, daß ein Flüssigkeitsstrom nacheinander durch beide hindurchgehen muß, und dann den Druck am Anfang der ersten Röhre, an der Verbindungsstelle und am Ende der zweiten messen, was sich in der Weise ausführen läßt, daß man in diesen Punkten aufrechtstehende Röhren anbringt und beobachtet, wie hoch die Flüssigkeit in ihnen steigt. Sind die drei Drucke, nachdem der Strom stationär geworden ist, p_1, p_2 und p_3, so sind $p_1 - p_2$ und $p_2 - p_3$ die Druckdifferenzen, die in den beiden Röhren für denselben Strom erfordert werden; diesen Größen sind also die Widerstände proportional.

Hat die Röhre in Fig. 203 überall denselben Querschnitt, so ist der Druck in der Mitte genau das Mittel zwischen den Drucken an den Enden, so daß in einer Röhre $c\,d$ die Flüssigkeit einen Punkt erreicht, der in der Mitte zwischen den beiden Ebenen S_1 und S_2 liegt. Da nämlich die beiden Hälften der Röhre gleiche Widerstände haben, muß der Druck von a bis c um ebensoviel abnehmen als von c bis b.

Zugleich ergibt sich nun aber, daß der Widerstand der ganzen Röhre $a\,b$ doppelt so groß ist, als der Widerstand der halben Röhre $a\,c$, denn derselbe Flüssigkeitsstrom erfordert bei dieser letzteren eine halb so große Druckdifferenz als bei der ersten. *Im allgemeinen ist der Widerstand einer Röhre der Länge derselben proportional; umgekehrt proportional der Länge ist also die Flüssigkeitsmenge, die bei einer gegebenen Druckdifferenz durch eine Röhre strömt.*

Aus dem Gesagten geht hervor, *daß in Fig. 203 der Druck allmählich von a nach b sinkt, so daß er, wenn man um gleiche Strecken fortschreitet, jedesmal gleichviel abnimmt, und daß überhaupt dies letztere der Fall ist, wenn die Teile der Röhre zwischen einer Reihe von Punkten alle denselben Widerstand haben.*

Außer von der Länge hängt der Widerstand einer Röhre noch von dem Querschnitt und von der Natur der Flüssigkeit ab; natürlich wird er kleiner, wenn der Querschnitt der Röhre größer wird.

Durch theoretische Betrachtungen hat man für die Stärke des Flüssigkeitsstromes, d. h. für das in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömende Volum den folgenden Ausdruck gefunden:

$$i = \frac{\pi (p_1 - p_2) a^4}{8 \mu l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

(Gesetz von Poiseuille). In diesem Ausdruck ist l die Länge der Röhre, a der Radius des Querschnittes und μ der Reibungskoeffizient der Flüssigkeit, dessen Bedeutung in folgender Weise näher angegeben werden kann. Wenn in dem Fall von Fig. 202 in der Nähe der Fläche V die nach rechts gerichtete Geschwindigkeit *allmählich* von unten nach oben zunimmt (die Veränderung der Geschwindigkeit von einem Punkte zum anderen findet tatsächlich immer allmählich statt), und zwar so, daß die Differenz der Geschwindigkeiten in zwei Ebenen, von denen die eine 1 cm über der anderen liegt, 1 cm pro Sekunde beträgt, so bedeutet μ die Kraft in Dyn und pro Quadratzentimeter, welche die Flüssigkeit auf der einen Seite der Fläche V auf die Flüssigkeit auf der anderen Seite ausübt.

Experimentelle Untersuchungen haben die in der Formel (3) enthaltenen Gesetze bestätigt.

Die Formel (2) setzt uns in den Stand, verschiedene Aufgaben über die Bewegung durch enge Röhren zu lösen.

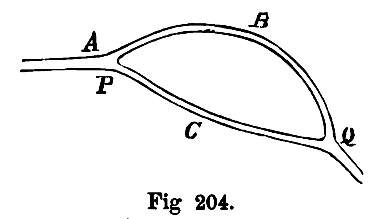


Fig 204.

a) Angenommen, die Röhre A (Fig. 204) teile sich in die beiden Zweige B und C, die sich bei Q wieder vereinigen, Es sei i_1 die Stromstärke in B, i_2 die in C, r_1 der Widerstand des ersten, x_2 der des zweiten Zweiges, endlich p der Druck in P, p' der in Q. Man hat dann

$$i_1 = \frac{p - p'}{r_1}, \quad i_2 = \frac{p - p'}{r_2},$$

also

$$i_1 : i_2 = r_2 : r_1 .$$

Will man zwischen P und Q eine einzige Röhre einschalten, die bei einem bestimmten Wert von $p - p'$ allein ebensoviel Flüssigkeit durchläßt wie B und C zusammen, so wird der Widerstand x derselben bestimmt durch

$$\frac{p - p'}{x} = \frac{p - p'}{r_1} + \frac{p - p'}{r_2}$$

oder

$$x = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

b) Wir können in einer Röhre mit dem Widerstand r einen Flüssigkeitsstrom hervorbringen, wenn wir die Röhre zwischen zwei zylindrische Gefäße bringen und auf Kolben, die in diese Gefäße passen, die äußeren Drucke p_1 und p_2 ausüben. Wir müssen dann (§ 207, c) pro Zeiteinheit die Arbeit $(p_1 - p_2)i$ verrichten, wofür wir $i^2 r$ schreiben können. Um diesen Betrag muß die Energie des Systems zunehmen, und dabei kann jetzt nur von der Wärmeentwickelung in den aneinanderreibenden Flüssigkeitsschichten die Rede sein. Die Wärmemenge, welche in der Sekunde entsteht, ist also

$$w = \frac{i^2 r}{E}$$

(E ist das mechanische Wärmeäquivalent).

Zu demselben Resultat kommt man, wenn man in dem Fall von Fig. 203 auf die Veränderung der potentiellen Energie achtet.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß das in diesem Paragraphen Gesagte auch größtenteils für Gase gilt; nur werden hier durch die Veränderungen der Dichte die Erscheinungen etwas verwickelter.

§ 214. **Einfluß der inneren Reibung auf andere Bewegungserscheinungen.** Nicht allein beim Strömen durch Röhren, sondern überhaupt bei jeder Bewegung einer Flüssigkeit bemerkt man den Einfluß sowohl der inneren Reibung zwischen den verschiedenen Flüssigkeitsschichten als auch der Kräfte, mit denen die Flüssigkeit und feste Körper, die sie berührt, aufeinander wirken. Man kann annehmen, wenigstens in den meisten Fällen, daß infolge dieser letzteren Kräfte die Flüssigkeitsschicht, welche in unmittelbarer Berührung mit einem festen Körper ist, in Ruhe bleibt, wenn dieser stillsteht, und andernfalls die Bewegungen desselben mitmacht.

Wir betrachten z. B. einen kugelförmigen festen Körper der sich in einer Flüssigkeit befindet; diese Flüssigkeit teilen wir durch Kugelflächen, die mit der festen Kugel konzentrisch sind, in unendlich dünne Schichten. Wird nun der feste

Körper um einen Durchmesser, etwa um den vertikalen Durchmesser gedreht, so reißt er die innerste Flüssigkeitsschicht mit; diese übt eine ähnliche Wirkung auf die folgende Flüssigkeitsschicht aus usw., so daß schließlich alle Schichten um eine vertikale Achse rotieren, aber mit Winkelgeschwindigkeiten, die nach außen hin fortwährend abnehmen. Während nun die Kugel in dieser Weise die Flüssigkeit mitreißt, wird sie selbst in ihrer Bewegung gehemmt. Die Folge davon ist, daß man, um die Kugel in Bewegung zu halten, fortwährend ein Kräftepaar auf sie einwirken lassen muß, und daß, wenn man dies nicht tut, die Bewegung nach und nach aufhört. Drehende Schwingungen, die bestehen können, wenn die feste Kugel mit einem Punkte ihrer Oberfläche an einem Faden aufgehängt ist, werden auf diese Weise gedämpft.

Etwas ähnliches gilt auch von Körpern von anderer Form, z. B. von einer kreisförmigen Scheibe, die in horizontaler Lage mit ihrem Mittelpunkt an einem Faden aufgehängt ist und von einer Flüssigkeit umgeben wird.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, daß die Bewegung, die durch einen festen Körper einer Flüssigkeit erteilt wird, durch diese auf einen anderen festen Körper übertragen werden kann. Befinden sich z. B. in einer Flüssigkeit zwei horizontale kreisförmige Scheiben, deren Mittelpunkte auf derselben vertikalen Linie liegen, so wird die Drehung der einen Scheibe um diese Linie zur Folge haben, daß sich die andere in derselben Weise in Bewegung setzt.

Die Reibung gibt auch zu einem Widerstand Veranlassung, wenn sich ein fester Körper durch eine Flüssigkeit fortbewegt. Auf die Art und Weise, wie sich in diesem Fall die Flüssigkeit bewegt, können wir hier nicht näher eingehen. Wir bemerken nur, daß die Untersuchung aller in diesem Paragraphen erwähnten Erscheinungen, sowie der Strömung durch Röhren gezeigt hat, daß die Größe der vorkommenden Geschwindigkeiten, z. B. die Größe der Geschwindigkeit eines festen Körpers oder die Größe der mittleren Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsstroms einen großen Einfluß hat. Bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten sind die Erscheinungen verhältnismäßig einfach; für die Bewegung in Röhren gelten dann die oben besprochenen Gesetze, und der Widerstand, der auf einen festen Körper wirkt, ist

proportional der Geschwindigkeit, mit welcher er rotiert oder fortschreitet. Bei größeren Geschwindigkeiten wird alles komplizierter. In der Flüssigkeit entstehen unregelmäßige drehende Bewegungen, und der Widerstand, den eine Röhrenwand einem Flüssigkeitsstrom oder eine Flüssigkeit der Bewegung eines festen Körpers entgegensetzt, nimmt schneller zu als die Geschwindigkeiten selbst.

Fünftes Kapitel.

Eigenschaften der Gase.

§ 215. **Boylesches Gesetz.** Die experimentelle Untersuchung der Eigenschaften der gasförmigen Körper hat zunächst den Zweck, *den Zusammenhang kennen zu lernen, welcher zwischen dem Druck, der Temperatur und dem Volum besteht.* Dabei kann man eine dieser Größen unverändert lassen. Man kann also untersuchen, wie sich bei konstanter Temperatur das Volum mit dem Druck ändert (Untersuchung der Zusammendrückbarkeit) wie sich bei konstantem Druck ein Gas bei Erwärmung ausdehnt, und endlich, wie in einem Gas von unveränderlichem Volum der Druck steigt, wenn die Temperatur erhöht wird. Bei allen diesen Fragen ist es einerlei, ob man von dem Druck spricht, den das Gas von außen erleidet, oder von demjenigen, den es selbst ausübt (Spannkraft).

Die zahlreichen Versuche, welche man zur Bestimmung der *Zusammendrückbarkeit* gemacht hat, haben das miteinander gemein, daß das Gas in einem gläsernen Gefäß durch Quecksilber abgesperrt war, welches entweder durch den Druck einer Quecksilbersäule oder durch eine Druckpumpe in daß Gefäß hineingetrieben werden konnte. Will man das erste Mittel benutzen, so kann der Apparat z. B. aus einer vertikal stehenden U-Röhre mit ungleichen Schenkeln bestehen, von denen der kürzere geschlossen und der längere offen ist. Das Gas befindet sich in dem ersteren Schenkel über einer in die Röhre gegossenen Menge Quecksilber; dadurch, daß man in dem anderen Schenkel Quecksilber zugießt, kann das Gas komprimiert werden.

Nach dem Gesetz von Boyle (1661) ist nun, solange die Temperatur unverändert bleibt, das Volum eines Gases dem Druck,

unter dem es sich befindet, umgekehrt proportional, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Spannkraft der Dichte proportional.

Kein Gas befolgt das Gesetz vollkommen; es bestehen Abweichungen, die desto bedeutender sind, je höher die Drucke sind, bei denen man experimentiert. Bei Gasen wie Luft und Wasserstoff kann man bei Drucken, die nicht vielmal größer sind als der Atmosphärendruck, von den Abweichungen absehen; wir werden das in diesem Kapitel immer tun.

§ 216. **Luftpumpe.** Mit Anwendung des Boyleschen Gesetzes kann man die Druckverminderung berechnen, die man durch die gewöhnliche in Fig. 205 schematisch dargestellte Luftpumpe erhält. Der Rezipient *R*, aus welchem die Luft entfernt werden muß, steht durch die Röhre *B* in Verbindung mit dem Zylinder *C*, in welchem der luftdicht schließende Kolben *Z* auf- und niederbewegt wird; bei *a* und *b* befinden sich Ventile, die sich nach oben öffnen. Geht der Kolben nach oben, so ist das Ventil *b* geschlossen, sowohl durch sein Gewicht und durch eine Feder als auch durch den Druck der äußeren Luft; dagegen wird durch einen geeigneten Mechanismus *a* geöffnet. Eine gewisse Menge Luft strömt dann aus *R* nach *C*. Sobald der Kolben nach unten geht, wird *a* geschlossen, und nun hat alsbald die Luft unter dem Kolben hinreichende Spannkraft, um *b* zu öffnen und nach außen zu entweichen.

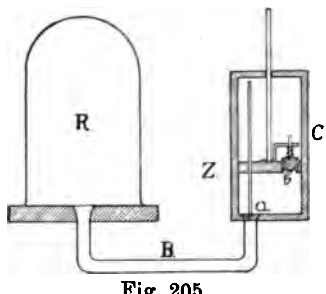


Fig. 205.

Die untere Fläche des Kolbens muß sich so gut wie möglich an die Bodenfläche des Zylinders anschließen. In dem kleinen „schädlichen Raum“, der unter dem Kolben in seiner tiefsten Stellung übrigbleibt, befindet sich nämlich Luft von 1 Atmosphäre Spannung, und es ist leicht einzusehen, daß hierdurch der Verdünnung in *R* eine Grenze gesetzt wird.

Ein derartiger schädlicher Raum kommt nicht vor bei der *Quecksilberluftpumpe*, mit der man daher auch viel höhere Verdünnungen erreichen kann als mit den gewöhnlichen Luftpumpen. Man denke sich, um eine Vorstellung von der Wir-

kung zu bekommen, einen Glasballon, der sich am oberen Ende einer vertikalen Röhre befindet, durch welche man Quecksilber in den Ballon emporsteigen oder aus demselben ausfließen lassen kann. Dieser Ballon muß mit dem Rezipienten, aus welchem man die Luft entfernen will, in Verbindung gebracht werden können, und außerdem muß ein Ausweg angebracht sein, durch den Luft aus dem Ballon ausgetrieben werden kann. Die beiden Wege werden auf die eine oder andere Weise in geeigneten Augenblicken geöffnet und geschlossen, und zwar so, daß beim Ausfließen des Quecksilbers aus dem Ballon Luft aus dem Rezipienten zuströmt und daß diese Luft, wenn das Quecksilber steigt, auf dem soeben erwähnten Ausweg entfernt wird. Der Ballon kann also mit dem Zylinder einer gewöhnlichen Luftpumpe und das Quecksilber mit dem Kolben verglichen werden, während der schädliche Raum vermieden ist, weil das Quecksilber mit der ganzen Wand des Ballons in Berührung kommen und diesen also vollständig füllen kann.

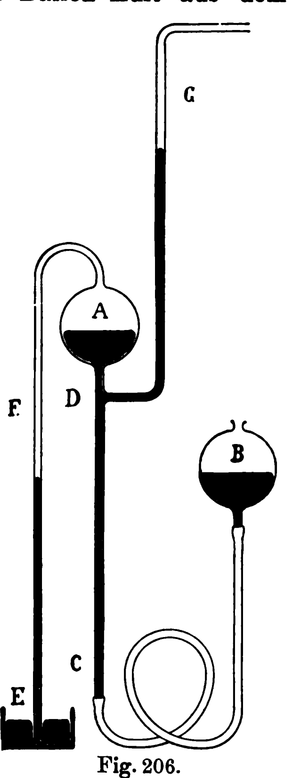


Fig. 206.

Wird das Öffnen und Schließen der Verbindungswege mit Hilfe von Hähnen bewirkt, was bei den älteren Quecksilberluftpumpen der Fall war, so wird das Quecksilber stets durch das Fett, mit dem die Hähne notwendigerweise eingeschmiert sein müssen, etwas verunreinigt, was die gute Wirkung beeinträchtigt. Die Quecksilberluftpumpe von Bessel-Hagen, die in Fig. 206 in ihrer einfachsten Form dargestellt ist, und bei der alle Hähne vermieden werden können, ist von diesem Mangel frei. Man kann hier das Quecksilber in der Kugel A steigen oder sinken lassen, indem man die Kugel B, die durch einen Kautschukschlauch mit der Röhre C verbunden ist, nach oben oder nach unten bewegt. Ist das Quecksilber aus A bis unter D

gesunken, so steht A durch die Röhre G mit dem auszupumpenden Raum in Verbindung. Läßt man das Quecksilber steigen, so wird dieser Verbindungsweg alsbald abgesperrt, und die Luft in A wird durch die Röhre F, die mit ihrer Öffnung in dem Quecksilbergefäß E steht, nach außen getrieben. Man kann sich leicht überzeugen, daß die Röhren C, F und G länger sein müssen als 76 cm.

Ein Glasgefäß, welches mit Hilfe der Quecksilberluftpumpe luftleer gemacht worden ist, kann dann *abgeschmolzen* werden. Man kann nämlich die Verbindungsröhre an einer bereits vorher verengten Stelle mit einer spitzen Flamme erhitzen. Sobald das Glas weich geworden ist, drückt die äußere Luft die Röhre zusammen.

§ 217. **Luftdruck in verschiedenen Höhen.** Mit Hilfe des Boyleschen Gesetzes kann man angeben, wie der Druck in der Atmosphäre abnimmt, wenn man zu höher gelegenen Punkten übergeht. Wir setzen dabei voraus, daß die Luft im Gleichgewicht ist und überall die Temperatur des schmelzenden Eises hat.

Es sei (Fig. 207) A_1, A_2, A_3, A_4 usw. eine Reihe von Punkten, die auf einer vertikalen Linie in Abständen von 1 m voneinander liegen. Die Drucke in diesen Punkten seien (in Dyn pro Quadratzentimeter) p_1, p_2, p_3, p_4 usw., und die Dichten (in Gramm pro Kubikzentimeter) d_1, d_2, d_3, d_4 usw. Nach dem Boyleschen Gesetz besteht zwischen der Dichte und dem Druck ein konstantes Verhältnis C, so daß

$$d_1 = Cp_1, \quad d_2 = Cp_2 \text{ usw.}$$

ist.

A_4
A_3
A_2
A_1

Fig. 207.

Aus der Tatsache, daß bei einem Druck von 76 cm und einer Temperatur von 0° ein Liter Luft eine Masse von 1,293 g hat, findet man

$$C = 1{,}275 \times 10^{-9}.$$

Der Unterschied zwischen p_1 und p_2 ist nun gleich dem Gewicht einer Luftsäule, die von A_1 bis A_2 reicht. Die Dichte der Luft zwischen A_1 und A_2 ist nicht überall dieselbe, sondern sie ändert sich von d_1 bis d_2. Wäre sie überall $= d_1$, so würde

$$p_1 - p_2 = 100\,g\,d_1 = 100\,g\,Cp_1, \quad \text{also } p_2 = 0{,}9998749\,p_1 \quad . \quad . \quad (1)$$

werden; wäre die Dichte dagegen überall gleich d_2, so würde man finden

$$p_1 - p_2 = 100\,g\,Cp_2, \quad \text{also } p_2 = \frac{p_1}{1{,}0001251}.$$

Führt man die letzte Division aus, so ergibt sich, daß das Resultat bis auf 7 Dezimalen mit (1) übereinstimmt; daher können wir uns weiter dieser letzteren Beziehung bedienen.

Dieselben Betrachtungen wie auf die Säule $A_1 A_2$ können auch auf die Säulen $A_2 A_3$ usw. angewandt werden; man kann das Gewicht von jeder Säule berechnen, als ob die Luft über ihre ganze Höhe dieselbe Dichte hätte wie am unteren Ende. Man findet also

$$p_3 = 0{,}9998749\,p_2, \quad p_4 = 0{,}9998749\,p_3 \text{ usw.},$$

mit anderen Worten, die Drucke bilden eine geometrische Reihe. Auf einer Höhe von h Meter wird der Druck

$$p = 0{,}9998749^h\,p_1,$$

woraus für die Höhe in Metern folgt

$$h = 18400 \log \frac{p_1}{p}.$$

Auf diese Weise würde man aus dem Barometerstand auf dem Gipfel eines Berges, wenn man den am Meeresspiegel gleich 76 cm setzt, die Höhe des Berges ableiten können. In Wirklichkeit wird die Sache etwas weniger einfach, da die Temperatur nicht 0° ist.

§ 218. **Gesetz von Gay-Lussac.** Um bei konstantem Druck die Ausdehnung eines Gases durch die Wärme zu untersuchen, können wir uns einer Glaskugel bedienen, die mit einer geteilten Röhre versehen ist und in welcher sich das zu untersuchende Gas befindet, und zwar abgesperrt durch eine kleine Quecksilbersäule in der horizontal gerichteten Röhre. Dieses Quecksilber verschiebt sich so leicht, daß der Druck des Gases immer gleich dem Atmosphärendruck ist. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß der Barometerstand sich während der Dauer der Versuche nicht verändert, und daß sich das Gefäß selbst nicht ausdehnt; in Wirklichkeit muß mit Rücksicht auf die Volumveränderung dieses letzteren eine Korrektion angebracht werden.

Wenn man nun eine Anzahl der beschriebenen Apparate, die mit verschiedenen Gasen gefüllt sind, miteinander vergleicht, so zeigt sich, *daß durch dieselbe Temperaturerhöhung bei allen Gasen das Volum in demselben Verhältnis zunimmt.* Dies ist das Gesetz von Gay-Lussac (1816). Es gilt auch für den Fall, daß sich das Gas unter einem anderen Druck als dem Atmosphärendruck befindet. Untersucht man nämlich die Ausdehnung zweimal, einmal, während der Druck immer gleich einer Atmosphäre ist, und ein andermal, während er auf zwei Atmosphären gehalten wird, so nimmt wieder bei einer bestimmten Temperaturerhöhung in beiden Fällen das Volum in demselben Verhältnis zu.

Wird der Apparat zuerst in schmelzendes Eis gebracht und dann in Dampf von Wasser, welches bei einem Barometerstand von 76 cm siedet, so ist die Volumvermehrung gleich dem ursprünglichen Volum multipliziert mit 0,366.

Wir können einen solchen Apparat als Thermometer *(Luftthermometer)* benutzen. Wir setzen zu diesem Zwecke bei die Punkte der Röhre, bis zu denen bei den genannten Versuchen die Gasmasse reicht, die Zahlen 0 und 100, teilen den Abstand der beiden Punkte in 100 gleiche Teile und sagen, daß die Temperatur t^0 ist, wenn sich das Gas bis zu dem Teilstrich erstreckt, bei welchem die Zahl t steht. Offenbar *involviert diese Bestimmung der Temperatur, daß sich das Gas für jeden Grad Temperaturerhöhung um gleichviel ausdehnt.*

Unter dem Ausdehnungskoeffizienten versteht man den Bruch, der angibt, welcher Teil die Volumvermehrung bei 1^0 Temperaturerhöhung vom Volum bei 0^0 ist. Ist α dieser Koeffizient, v_0 das Volum bei 0^0 und v_t das Volum bei t^0, so ist

$$v_t = v_0 (1 + \alpha t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Der Wert des Ausdehnungskoeffizienten ist nach dem Gesagten

$$\alpha = 0{,}00366 = \tfrac{1}{273}.$$

Mißt man nun ferner die Temperatur mit dem soeben erwähnten Thermometer und untersucht man die Ausdehnung von anderen Gasen, so ergibt sich, wegen des Gesetzes von Gay-Lussac, daß auch bei diesen das Volum für jeden Grad um $\frac{1}{273}$ des Wertes zunimmt, den es bei 0^0 hat. *Daher gilt für alle Gase die Formel (2) und hat für alle der Ausdehnungskoeffizient denselben Wert.*

In Wirklichkeit zeigen die Gase ähnliche Abweichungen von dem Gay-Lussacschen Gesetz wie von dem Boyleschen; wir wollen aber auch von diesen absehen.

§ 219. **Allgemeiner Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und Volum.** Wie sich bei unveränderlichem Volum der Druck einer Gasmasse beim Erwärmen ändert — der dritte Punkt, welcher in § 215 erwähnt wurde —, braucht nicht mehr besonders untersucht zu werden, sondern kann aus dem, was wir jetzt wissen, abgeleitet werden. Wir nehmen an, daß das

Gas bei 0° den Druck p_0 ausübt. Um dann den Druck p_t für den Fall zu finden, daß bei konstantem Volum die Temperatur auf t^0 gebracht wird, denken wir uns erst, daß bei der Erwärmung der Druck konstant gehalten wird. Das Volum wird dann $1 + \alpha t$mal größer. Wir lassen ferner die Temperatur konstant und bringen durch Erhöhung des Druckes das Volum auf den ursprünglichen Wert zurück. Nach dem Boyleschen Gesetz muß zu diesem Zweck der Druck $1 + \alpha t$mal größer gemacht werden, und hätten wir gleich bei dem Erwärmen den Druck in diesem Maße gesteigert, so würde sich das Volum nicht geändert haben. Also:

$$p_1 = p_0 (1 + \alpha t) \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

Aus diesem Resultat ergibt sich, *daß man den Ausdehnungskoeffizienten durch Versuche bestimmen kann, bei denen überhaupt keine Ausdehnung stattfindet, nämlich dadurch, daß man den Druck mißt, den eine eingeschlossene Gasmasse bei verschiedenen Temperaturen ausübt.*

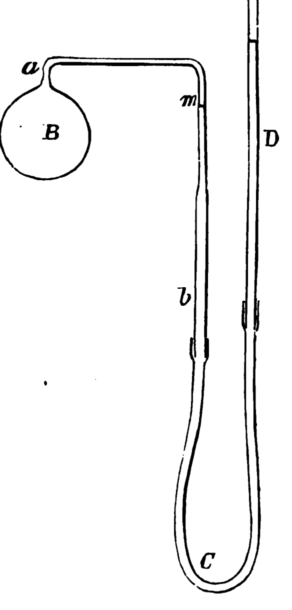


Fig. 208.

Hierzu kann z. B. der in Fig. 208 abgebildete Apparat dienen. Das Gas befindet sich in der Glaskugel *B*, die an die Röhre *a b* angeschmolzen ist; diese steht durch eine Kautschukröhre *C* in Verbindung mit einer vertikalen Röhre *D*, die auf- und niedergeschoben werden kann. In *m b*, *C* und *D* befindet sich Quecksilber, durch welches das Gas abgesperrt ist, und man kann durch Heben oder Senken von *D* bewirken, daß das Quecksilber sowohl bei niedriger als bei höherer Temperatur immer bis an eine feste Marke *m* reicht, die auf *a b* angebracht ist. Aus dem Höhenunterschied zwischen dem Quecksilber in *a b* und dem in *D*, in Verbindung mit dem Barometerstand, ergibt sich der Druck des Gases. Natürlich darf man bei der Berechnung der Versuche die Ausdehnung

des Glases nicht vernachlässigen. Daß man, wenn α bekannt ist, mit diesem Apparat auch Temperaturen messen kann, daß er also als Luftthermometer bezeichnet werden kann, ist leicht einzusehen.

Die allgemeinste Frage über die Veränderungen von Druck, Volum und Temperatur ist die folgende: *Wenn unter dem Druck p und bei der Temperatur t ein Gas das Volum v einnimmt, wie groß ist dann das Volum v', wenn der Druck p' und die Temperatur t' wird?* Läßt man erst den Druck konstant und läßt allein die Temperatur in t' übergehen, so wird das Volum $v(1 + \alpha t')/(1 + \alpha t)$. Sodann kann man bei der konstanten Temperatur t' den Druck auf p' zunehmen lassen und hierbei das Boylesche Gesetz anwenden. Die Antwort auf die Frage ist daher

$$v' = v \frac{p}{p'} \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Formel findet in allen Fällen Anwendung, in denen man die Menge eines Gases durch Messen des Volums ermittelt. Man muß dann auch den Druck und die Temperatur beobachten und kann, um verschiedene Resultate vergleichbar zu machen, jede Messung auf den Druck von 76 cm und die Temperatur von 0^0 reduzieren.

Da $\alpha = 1/273$ ist, kann man statt (4) schreiben

$$v' = v \frac{p}{p'} \frac{273 + t'}{273 + t} .$$

Denkt man sich nun einen Punkt auf der Thermometerskala 273^0 unter dem Nullpunkt, so stellen $273 + t$ und $273 + t'$ die Temperaturen vor, die das Gas nacheinander gehabt hat, wenn man die Anzahl der Grade von dem betreffenden Punkt aus zählt. Wir wollen diese Temperatur die *absolute* nennen und mit T und T' bezeichnen. Die Gleichung kann dann so geschrieben werden:

$$\frac{p\,v}{T} = \frac{p'\,v'}{T'} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

d. h. *das Produkt aus Druck und Volum,* welches nach dem Boyleschen Gesetz bei einer bestimmten Temperatur konstant ist, *ändert sich proportional der absoluten Temperatur.*

Daß in (5) die Beziehungen (2) und (3) enthalten sind, ist leicht einzusehen.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß in vielen Fällen das Volum eines Gases, welches unter konstantem Druck gehalten wird, auch dann noch für jeden Grad Temperaturerniedrigung um gleich viel abnimmt, wenn die Temperatur unter 0° C. sinkt. Dann gilt also die Formel (2) auch für negative Werte von t, und solange auch das Boylesche Gesetz angenommen werden darf, gilt die Gleichung (5) auch für Werte von T oder T', die kleiner als 273 sind.

Aus den Gesetzen von Boyle und Gay-Lussac kann man endlich noch einen wichtigen Satz ableiten. Wenn man zwei Gase betrachtet, die sich unter demselben Druck befinden und dieselbe Temperatur haben, so kann man das Verhältnis ihrer Dichten ermitteln. *Für dieses Verhältnis wird nun dieselbe Zahl gefunden, wenn man die beiden Körper unter einem anderen Druck und bei einer anderen Temperatur miteinander vergleicht, wenn man nur dafür sorgt, daß der Druck und die Temperatur bei dem einen Gase ebensohoch sind wie bei dem anderen.* Dies wird immer vorausgesetzt, wenn die relative Dichte des einen Gases in bezug auf das andere angegeben wird.

Zum Schlusse bemerken wir noch, daß die Formeln dieses und des vorigen Paragraphen nur dann gelten, wenn die Temperaturen mit einem Luftthermometer, wie das in § 218 beschriebene gemessen werden. Ein gewöhnliches Quecksilberthermometer gibt, wie sich später zeigen wird, nicht immer dieselbe Anzahl von Graden an wie ein Luftthermometer, wenn auch der Unterschied in der Regel ziemlich gering ist. *Man ist übereingekommen, bei genauen Untersuchungen die Temperaturen immer in Graden des Luftthermometers anzugeben, und wir wollen in der Folge immer annehmen, daß dies geschieht* Dies schließt nicht aus, daß man bei den Versuchen ein Quecksilberthermometer benutzen kann, wenn dieses nur zuvor mit einem Luftthermometer verglichen worden ist.

§ 220. **Kinetische Gastheorie.** Die Annahmen über Moleküle und molekulare Bewegungen, von denen im vorhergehenden so oft die Rede gewesen ist, haben zu einer vollständigen Theorie über das Wesen der gasförmigen Körper geführt; *die einfachen Eigenschaften dieser Stoffe erklären sich leicht aus der Wärmebewegung, wenn man ihnen eine so geringe Dichte zuschreibt, daß die Dimensionen der Moleküle und die Entfernungen,*

auf welche zwei Teilchen merklich aufeinander einwirken, sehr klein sind im Vergleich mit der mittleren Entfernung zweier aufeinander folgender Teilchen.

Aus dieser Hypothese folgt, daß jedes Gasmolekül seine Bewegung zum größten Teil ausführt, während es vollkommen sich selbst überlassen ist. *Es fliegt in gerader Linie fort, bis es in eine sehr kleine Entfernung von einem anderen Teilchen oder einer festen Wand kommt.* Mit veränderter Richtung setzt es dann seine Bewegung wieder während einiger Zeit in gerader Linie fort, so daß die ganze Bahn zickzackförmig wird.

Was die gegenseitige Einwirkung zweier Moleküle betrifft, so besteht diese ohne Zweifel zum Teil in einer Anziehung, was man annehmen muß, weil ein Gas zu einer Flüssigkeit verdichtet werden kann. Verschiedene Erscheinungen machen es aber wahrscheinlich, daß zwei Moleküle, wenn sie sich berühren oder in sehr kleine Entfernung voneinander kommen, auch abstoßende Kräfte aufeinander ausüben. Beständen nur solche Kräfte, so würde man sich die Teilchen unter dem Bilde elastischer Kugeln vorstellen können, die in einem Raum hin- und herfliegen und dabei wiederholt zusammenstoßen. Der Deutlichkeit halber werden wir im folgenden von diesem Bild vielfach Gebrauch machen, obgleich es ohne Zweifel von der Wirklichkeit erheblich abweicht.

Auch über die Einwirkung zwischen einem Gasmolekül und einer festen Wand machen wir eine Annahme, die zwar für die Ableitung der Resultate nicht notwendig ist, aber zur Vereinfachung der Vorstellung leitet; wir wollen nämlich annehmen, daß die Wände vollkommen glatte, elastische Oberflächen sind, von denen die Moleküle in der in § 119 besprochenen Weise zurückgeworfen werden.

Der durch das Gas gegen die umgebenden Wände ausgeübte Druck ist nun nach dieser Auffassung nichts anderes als die Folge der Stöße, welche die Wände unaufhörlich von den Molekülen erleiden. Er muß also von *drei* Größen abhängen, nämlich von der Anzahl der Moleküle, von der Geschwindigkeit, mit welcher sie sich bewegen, und von der Masse der einzelnen Teilchen. Es ist leicht einzusehen, daß, wie es das Boylesche Gesetz verlangt, der Druck zunimmt, wenn mehr Teilchen in einen Raum gebracht werden, und ebenso, daß die Spannung eines Gases,

dessen Volum unverändert bleibt, beim Erwärmen zunimmt, und daß das Gas sich dabei ausdehnt, wenn eine der einschließenden Wände zurückweichen kann. Ein Gas „erwärmen“ ist nämlich nichts anderes als den Molekülen eine größere Geschwindigkeit erteilen.

Wir wollen der Einfachheit halber ein Gefäß von der Einheit des Volums betrachten. Daß der Druck der Anzahl der in demselben anwesenden Moleküle und der Masse jedes einzelnen Teilchens proportional ist, ist leicht einzusehen. Was die Geschwindigkeit betrifft, so ergibt sich bei näherer Betrachtung, daß der Druck 4 mal, 9 mal usw. größer wird, wenn die Geschwindigkeiten aller Moleküle verdoppelt, verdreifacht werden usw. Dies ist leicht begreiflich, wenn man bedenkt, daß bei Vergrößerung der Geschwindigkeiten die Wände mehr Stöße von den hin- und hergehenden Molekülen bekommen und daß außerdem jeder Stoß heftiger wird.

Man kann das Resultat, zu welchem man durch theoretische Berechnung kommt, am kürzesten ausdrücken, indem man sagt, daß der Zahlenwert des Druckes pro Flächeneinheit zwei Drittel des Zahlenwertes der kinetischen Energie ist, die infolge der fortschreitenden Bewegung der Moleküle in der Volumeinheit vorhanden ist.

Hat man also den Druck (in Dyn pro Quadratzentimeter) gemessen, so kennt man auch diese kinetische Energie (in Erg pro Kubikzentimer). Da man auch die Masse eines Kubikzentimeters bestimmen kann, ist man imstande, die Geschwindigkeit der Moleküle oder besser, da sich nicht alle gleich schnell zu bewegen brauchen, eine gewisse mittlere Geschwindigkeit zu berechnen. Für Wasserstoff von 0° ist diese mittlere Geschwindigkeit 184000 cm pro Sekunde und auch bei anderen Gasen beträgt sie Hunderte von Metern, was mit dem Resultat von § 145 gut in Einklang steht.

§ 221. **Ableitung der Beziehung zwischen dem Druck und der molekularen Bewegung.** Wir nehmen an, daß sich das Gas in einem zylinderförmigen Gefäß V (Fig. 209) von der Höhe h befindet, daß die obere Grundfläche dieses Zylinders ein beweglicher Kolben Z ist und daß die Teilchen so klein sind, daß sie so gut wie gar nicht zusammenstoßen. Ein Teilchen P, welches die in der Figur angegebene Zickzacklinie durchläuft, wird in einer Richtung senkrecht zu Z immer dieselbe Geschwindigkeit haben. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeits-

komponente mit u_1, so ist die Anzahl der Stöße, welche dieses Molekül allein gegen Z ausübt, $u_1/(2h)$.

Um Z an seinem Platz festzuhalten, müssen wir fortwährend von außen eine Kraft K ausüben, und diese ist es, die wir berechnen wollen. Ganz in Ruhe bleibt der Kolben eigentlich nicht. Durch jeden Stoß erhält er nämlich eine kleine Geschwindigkeit nach außen, aber zwischen zwei aufeinander folgenden Stößen treibt die Kraft ihn wieder nach innen und er steht scheinbar still, wenn die Bewegungsgröße, die er in der Zeiteinheit von der Kraft K erhält, gleich der Summe der Bewegungsgrößen ist, die ihm in der Zeiteinheit von den Molekülen mitgeteilt werden.

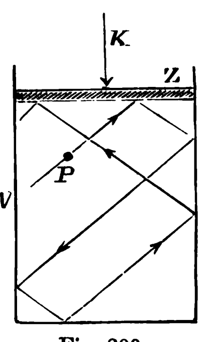


Fig. 209.

Die Masse des Kolbens ist so groß im Vergleich mit der eines Moleküls, daß die Zurückwerfung dieses letzteren in der in § 119 angegebenen Weise stattfindet. Wir wollen die Masse des Kolbens μ und die Masse eines Moleküls m nennen.

Das Teilchen P bekommt jedesmal, wenn es Z trifft, eine Geschwindigkeit $2u_1$ zu derjenigen hinzu, welche es bereits hatte; es erteilt daher dem Kolben die Geschwindigkeit $2mu_1/\mu$ und also die Bewegungsgröße $2mu_1$. Die Summe aller Bewegungsgrößen, welche dieses eine Molekül in der Zeiteinheit dem Kolben Z mitteilt, ist mu_1^2/h. Die Bewegungsgröße, welche Z von der Kraft K bekommen muß, ist also $(m/h)\Sigma u_1^2$, wobei die Summierung über alle Gasmoleküle erstreckt werden muß. Die Kraft K wird nun durch dieselbe Zahl dargestellt, also

$$K = \frac{m}{h}\Sigma u_1^2.$$

Ist endlich S die Oberfläche des Kolbens, so findet man für den Druck pro Flächeneinheit

$$p = \frac{m}{hS}\Sigma u_1^2.$$

Die hierin vorkommende Summe kann durch einen einfachen Kunstgriff gefunden werden. Wenn man nämlich in der Gasmasse drei aufeinander senkrechte Koordinatenachsen annimmt, von denen die erste senkrecht auf Z steht, so besteht für jedes Molekül zwischen der Geschwindigkeit u und den drei Komponenten derselben u_1, u_2, u_3 die Beziehnung

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2,$$

also auch für das gesamte Gas die Gleichung

$$\Sigma u_1^2 + \Sigma u_2^2 + \Sigma u_3^2 = \Sigma u^2.$$

Da das Gas in allen Richtungen dieselben Eigenschaften hat, muß man annehmen, daß

$$\Sigma u_1^2 = \Sigma u_2^2 = \Sigma u_3^2$$

ist. Hieraus folgt

$$\Sigma u_1^2 = \tfrac{1}{3} \Sigma u^2$$

und also

$$p = \frac{m}{3 h S} \Sigma u^2,$$

oder, wenn $v = h S$ das Volum ist,

$$p = \frac{m}{3 v} \Sigma u^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die kinetische Energie ist

$$A = \tfrac{1}{2} m \Sigma u^2$$

und man bekommt also

$$p = \frac{2 A}{3 v}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

womit das oben Gesagte bewiesen ist.

Nennen wir ferner die Anzahl der Moleküle in dem Gefäß n und bestimmen wir eine Geschwindigkeit U durch die Gleichung

$$U^2 = \frac{1}{n} \Sigma u^2,$$

so können wir für (6) schreiben

$$p = \frac{M U^2}{3 v}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

wobei wir noch für die gesamte Masse M geschrieben haben.

Wir wollen die Größe U die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen nennen, obgleich sie eigentlich die Geschwindigkeit ist, deren Quadrat gleich dem Mittel aller Geschwindigkeitsquadrate ist.

Durch die Formeln (7) und (8) kann man A und U aus den Größen ableiten, welche direkt gemessen werden können. Betrachten wir als Beispiel 1 g Wasserstoff von 0°, unter einem Druck von 76 cm, so ist $M = 1$, $v = 11160$, $p = 1{,}013 \times 10^6$ (§ 205, f); man findet hieraus

$$U = 184\,000 \text{ cm pro Sekunde.}$$

Hätte man die Berechnungen für dieselbe Temperatur, aber einen anderen Druck ausgeführt, so würde man, da sich v umgekehrt proportional mit p ändert, dasselbe Resultat erhalten haben. *Bei einer bestimmten Temperatur ist also die molekulare Geschwindigkeit des Gases unabhängig von der Dichte.* Hätte man dies als naheliegend vorausgesetzt, so würde aus der Gleichung (8) das Boylesche Gesetz *folgen.*

Da das Produkt $p v$ beim Erwärmen der absoluten Temperatur proportional zunimmt, so ist nach (7) dasselbe bei A der Fall, während nach (8) die mittlere Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur proportional ist.

Vergleicht man endlich zwei verschiedene Gase bei derselben Temperatur und unter demselben Druck, so ist in gleichen Volumen beider Körper dieselbe kinetische Energie enthalten; die mittlere Geschwindig-

keit U ist also umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte. Sie ist bei Wasserstoff größer als bei irgend einem anderen Gas.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß die der Einfachheit halber gemachte Voraussetzung, daß die Moleküle nicht zusammenstoßen, wie sich gezeigt hat, nicht notwendig ist, um die mitgeteilten Resultate zu bekommen. Allerdings wird durch das Zusammenstoßen zuweilen ein Molekül, welches sonst gegen die Wand gestoßen sein würde, hieran verhindert, aber ebensogut werden auch Teilchen durch das Zusammentreffen mit anderen gegen eine Wand geworfen werden.

Solange nur die Moleküle im Vergleich mit den Zwischenräumen sehr klein sind, gelten die abgeleiteten Formeln auch dann, wenn eine sehr große Anzahl von Zusammenstößen stattfindet.

Auch in einem Gefäß von beliebiger Form wird der Druck durch die Gleichung (7) bestimmt.

§ 222. **Bewegung der Bestandteile der Moleküle. Dissoziationserscheinungen.** Während sich der Schwerpunkt eines Moleküls fortbewegt (vgl. § 170, a), können sich außerdem die Atome, aus denen es besteht, in bezug auf diesen Punkt bewegen; das Molekül kann z. B. als Ganzes rotieren und die Atome können kreisförmige Bahnen um ihren gemeinsamen Massenmittelpunkt beschreiben oder um eine Gleichgewichtslage hin- und herschwingen. Diese Bewegungen würden, wenn sie auch anfangs nicht beständen, von selbst entstehen durch die Kräfte, die bei einem Zusammenstoß zwischen den am nächsten aneinander kommenden Atomen wirken; diese würden Geschwindigkeiten bekommen, die um so größer sind, je größer die Geschwindigkeiten sind, mit denen die Moleküle selbst fortschreiten. *Wird die Temperatur des Gases immer mehr erhöht, so werden sich die Atome schließlich so heftig bewegen, daß die Kräfte, durch welche sie zusammengehalten werden, nicht mehr hinreichen, um das Zerfallen des Moleküls zu verhindern.*

Die Chemiker haben bei gasförmigen Körpern eine Anzahl sog. *Dissoziationserscheinungen* beobachtet, wie z. B. die Spaltung von N_2O_4 in $2NO_2$ und die Spaltung von PCl_5 in PCl_3 und Cl_2. *In diesen und ähnlichen Fällen kann man nicht sagen, daß für das Zerfallen eine bestimmte Temperatur erforderlich ist, so daß unter dieser Temperatur gar keine und oberhalb derselben eine vollständige Spaltung in die beiden Bestandteile stattfinden würde.* Im Gegenteil, die Temperatur, bei welcher sich die Dissoziation zuerst bemerklich macht, und diejenige, bei welcher sie vollendet oder wenigstens weit fortgeschritten ist, liegen mehr oder weniger aus-

einander, und bei jeder zwischenliegenden Temperatur ist ein bestimmter Teil des Stoffes dissoziiert. Dieser Teil wird bei weiterer Erwärmung immer größer. Kehrt man nach einer Erwärmung zur ursprünglichen Temperatur zurück, so stellt sich auch wieder der ursprüngliche Grad der Dissoziation her.

Um dies alles zu begreifen, muß man zunächst berücksichtigen, *daß sich in einer Gasmasse nicht alle Moleküle mit derselben Geschwindigkeit bewegen.* Zwei elastische Kugeln, die anfangs dieselbe Geschwindigkeit haben, aber in Richtungen, die einen Winkel miteinander bilden, werden in der Regel nach einem Stoß mit verschiedenen Geschwindigkeiten auseinander gehen. Etwas Ähnliches findet bei den Molekülen eines Gases statt, so daß, wenn auch für einen Augenblick alle Geschwindigkeiten gleichgroß wären, durch das Zusammenstoßen Verschiedenheiten entstehen würden. *Selbst bei verhältnismäßig niedriger Temperatur können einige Moleküle Geschwindigkeiten haben, die mit der mittleren Geschwindigkeit bei erheblich höherer Temperatur übereinstimmen, Geschwindigkeiten, die groß genug sind, um beim Zusammenstoßen ein Zerfallen zu bewirken.*

Daß aber bei jeder Temperatur immer nur ein bestimmter Teil des Stoffes dissoziiert ist, hat die folgende Ursache. Sobald einige Moleküle dissoziiert sind, ist auch Gelegenheit für die umgekehrte Erscheinung gegeben. Zwei von den Atomgruppen, welche durch die Dissoziation entstanden sind, können zusammentreffen, und dabei kann es geschehen, wenn es auch nicht immer stattfindet, daß sie sich wieder vereinigen. Je mehr Moleküle nun bereits zerfallen sind, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit, daß der letztere Vorgang eintritt. *Schließlich entsteht ein Zustand, in welchem während einer gewissen Zeit ebensoviel Teilchen wieder aufgebaut werden als zerfallen,* und dann werden die Mengen dissoziierten und nicht dissoziierten Gases und damit auch alle wahrnehmbaren Eigenschaften der Masse ferner unverändert bleiben, obwohl es nicht fortwährend dieselben Moleküle sind, die sich im unzersetzten Zustand in dem Gas befinden. Man kann einen in dieser Weise entstandenen stationären oder dauernden Zustand einen *Gleichgewichtszustand* nennen, obschon hier das Wort „Gleichgewicht" in einem anderen Sinne gebraucht wird, als es gewöhnlich in der Mechanik der Fall ist.

Das Gleichgewicht wird gestört, sobald man die Temperatur ändert. Beim Erwärmen nimmt die Anzahl der Moleküle, welche in einer bestimmten Zeit zerfallen, zu, während die Anzahl der Vereinigungen noch nicht sofort größer wird. Alsbald wird aber diese letztere Anzahl, gerade weil mehr freie Atome oder Atomgruppen entstanden sind, wieder so weit gestiegen sein, daß sie aufs neue gleich der Anzahl der Zersetzungen geworden ist.

§ 223. **Avogadrosches Gesetz.** *Wenn zwei Körper, welche sich berühren, hinsichtlich des Wärmeaustausches in einen Gleichgewichtszustand gekommen sind, wenn sie also dieselbe Temperatur angenommen haben, so muß eine gewisse Beziehung zwischen der Stärke der molekularen Bewegungen in dem einen und in dem anderen bestehen.* Bei gasförmigen Körpern ist es gelungen, diese Beziehung aus der Theorie abzuleiten; man hat bewiesen, *daß bei derselben Temperatur in allen Gasen die mittlere kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls gleichgroß ist.*

Vergleicht man ferner zwei Gase nicht allein bei derselben Temperatur, sondern auch unter demselben Druck, so muß nach dem in § 220 Gesagten auch für beide *die gesamte kinetische Energie aller in der Volumeinheit enthaltenen Teilchen* gleichgroß sein. Wenn man beide Sätze miteinander verbindet, so kommt man zu dem Avogadroschen Gesetz, welches besagt, *daß bei derselben Temperatur und unter demselben Druck gleiche Raumteile verschiedener Gase gleichviel Moleküle enthalten, daß also die Molekulargewichte den Dichten unter den genannten gleichen Umständen proportional sind.*

Dieses Gesetz ist für die Chemiker von großer Bedeutung, weil es die Bestimmung des Molekulargewichts gasförmiger Körper ermöglicht. Umgekehrt kann es dazu dienen, wenn man die Molekularformel eines Gases im Gedächtnis hat, die Dichte desselben in bezug auf Wasserstoff anzugeben.

Das Avogadrosche Gesetz gilt auch für Gasgemische, denn auch bei diesen hängt der Druck in derselben Weise wie bei einem einfachen Gas von der in der Volumeinheit anwesenden kinetischen Energie ab, und bei derselben Temperatur ist die mittlere kinetische Energie eines Moleküls in allen Gasen, einerlei ob sie gemischt sind oder nicht, gleichgroß.

Im allgemeinen kann also die Anzahl der Moleküle in

der Masseneinheit eines gasförmigen Körpers, der mit Wasserstoff von derselben Temperatur und unter demselben Druck verglichen die Dichte d hat, durch N/d ausgedrückt werden, wenn N die Anzahl der Moleküle in der Masseneinheit Wasserstoff bedeutet.

Der Umstand, daß der Wasserstoff die Gesetze von Boyle und Gay-Lussac fast ganz genau befolgt, rechtfertigt die Annahme, daß diese Zahl N bei allen Temperaturen und Drucken gleichgroß ist. Auch bei jedem anderen Gas, welches die genannten Gesetze befolgt und für welches also d eine Konstante ist (§ 219), muß die Anzahl der Moleküle unveränderlich sein. *Wenn man aber, wie z. B. bei N_2O_4, beobachtet, daß d bei Temperaturerhöhung kleiner wird, so muß man schließen, daß die Anzahl der Moleküle zugenommen hat, daß also eine Dissoziation stattgefunden hat.*

Natürlich involviert das Kleinerwerden von d, daß N_2O_4 vom Gay-Lussacschen Gesetz abweicht und daß der Druck des Gases, wenn es in einem Gefäß von unveränderlichem Volum eingeschlossen ist, schneller zunimmt als die absolute Temperatur. Die Sache ist die, daß von den Molekülen, die infolge der Dissoziation mehr entstehen, jedes für sich gegen die Wand stößt; die Geschwindigkeit, mit der sie dies tun, wird durch die Regel bestimmt, daß die mittlere kinetische Energie dieser Moleküle ebensogroß ist wie die der Moleküle jedes anderen Gases bei derselben Temperatur.

Wir bemerken hierbei, daß bei der Spaltung der Moleküle die anziehenden Kräfte zwischen den Atomen überwunden werden müssen und daß sie also Zufuhr von Energie erfordert.

§ 224. **Diffusion der Gase.** Wenn die Gasmoleküle überhaupt nicht zusammenstießen, würden sie infolge ihrer großen Geschwindigkeiten bereits in einem kleinen Teil einer Sekunde beträchtliche Wege in geraden Linien durchlaufen. Zwei nebeneinander liegende Gasmassen würden sich daher sehr schnell miteinander vermischen. Die Beobachtung lehrt jedoch, daß dies nicht der Fall ist, wird z. B. in der einen Ecke eines Zimmers ein Gas entwickelt, welches am Geruch kenntlich ist, so kann es ziemlich lange dauern, bevor es an der gegenüberliegenden Seite wahrgenommen wird.

Dies ist eine Folge des Zusammenstoßens mit anderen Teilchen,

wodurch ein Molekül nach der Seite, von der es herkommt, zurückgeworfen werden kann; es beschreibt in einer Sekunde eine Zickzacklinie, die zwar viele Hundert von Metern lang ist, auf der sich aber das Molekül trotzdem nicht weit vom Ausgangspunkt entfernt zu haben braucht.

Eine *langsame* Vermischung oder *Diffusion* zweier Gase findet jedoch immer statt; sie ist um so langsamer, je öfter ein Molekül mit einem anderen zusammenstößt, also je kleiner die Entfernung ist, die es zwischen zwei aufeinander folgenden Zusammenstößen durchläuft. Diese Entfernung ist natürlich nicht für alle Moleküle dieselbe, so daß nur von einer Bestimmung ihres mittleren Wertes die Rede sein kann. Zu diesem Zwecke können eben die Versuche über die Diffusion sowie andere Erscheinungen, die wir in den beiden folgenden Paragraphen besprechen werden, dienen.

Um eine Vorstellung von der großen Anzahl der Zusammenstöße zu geben, erwähnen wir, daß in Wasserstoff von 0^0 unter einem Druck von 76 cm der betreffende Abstand durchschnittlich nur 0,000017 cm beträgt. Mit Berücksichtigung des früher für die Geschwindigkeit angeführten Wertes findet man, daß ein Molekül in der Sekunde ungefähr 10^{10} Zusammenstöße erleidet.

Als Beispiel eines Versuches über die Diffusion möge eine der Beobachtungen von Loschmidt dienen. Zwei Glasröhren von je 48,7 cm Länge und 2,6 cm Durchmesser, die an dem einen Ende geschlossen waren, wurden, die eine mit Kohlensäure und die andere mit Wasserstoff gefüllt, in vertikaler Stellung mit der Mündung aufeinandergesetzt, und zwar so, daß sich die mit Kohlensäure gefüllte Röhre unten befand. Das letztere war notwendig, damit eine Vermischung nur durch die molekularen Bewegungen und nicht viel schneller durch den Einfluß der Schwerkraft stattfinden konnte. Als der Inhalt der Röhren nach einer halben Stunde untersucht wurde, zeigte es sich, daß nur 37 % der Kohlensäure in die obere Röhre eingedrungen war.

§ 225. **Wärmeleitung.** Auch in einem Raum, der ganz mit einem und demselben Gase gefüllt ist, findet eine fortwährende Vermischung der verschiedenen Schichten statt. Wir können dies bemerken, wenn anfangs zwischen den Schichten

irgend ein Unterschied besteht, wenn z. B. die oberen eine höhere Temperatur haben als die unteren. Diejenigen Moleküle, denen es trotz der Zusammenstöße gelingt, aus der oberen Hälfte des Gefäßes in die untere zu kommen, bringen ihre Geschwindigkeit mit und bewirken, daß die mittlere Geschwindigkeit unten im Gefäß zunimmt; oben im Gefäß dagegen wird diese Geschwindigkeit kleiner, da die eben erwähnten Teilchen hier durch andere ersetzt werden, die von einer Stelle niedrigerer Temperatur kommen und daher eine kleinere Geschwindigkeit besitzen.

Daß nun nach einiger Zeit nicht in jeder Hälfte des Raumes derselbe Stoff enthalten ist wie anfangs, können wir nicht beobachten; das einzige, was wir bemerken, ist das, daß die Temperatur unten höher und oben niedriger geworden ist. Die Erscheinung ist scheinbar von derselben Art wie die Wärmeleitung in einem kupfernen Stab und man gebraucht für dieselbe auch denselben Namen, aber eigentlich würde man von der Diffusion zweier Gasmassen von ungleicher Temperatur sprechen können. Auch diese Diffusion geht langsam vor sich, mit anderen Worten, *die Gase sind schlechte Wärmeleiter*. Ihr Leitungsvermögen würde viel größer sein, wenn ein Molekül nicht immer wieder nach kurzer Zeit durch andere zurückgehalten würde.

Es verdient bemerkt zu werden, daß auch die Zusammenstöße der Teilchen der einen gegen die der anderen Schicht den Übergang einer gewissen Menge kinetischer Energie, d. h. einer gewissen Menge „Wärme" zur Folge haben. Bei Gasen von nicht zu großer Dichte tritt dies jedoch in den Hintergrund und kann man die Wärmeleitung als eine Vermischung der Schichten von verschiedener Temperatur auffassen.

§ 226. **Innere Reibung.** Von dieser (§ 213) kann bei gasförmigen Körpern eine ähnliche Erklärung gegeben werden wie von der Wärmeleitung. Hat ein Gas eine strömende Bewegung, so haben alle Moleküle außer der unregelmäßigen Wärmebewegung noch eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit („Strömungsgeschwindigkeit") in einer bestimmten Richtung. Ist nun diese (Fig. 202, S. 332) nach rechts gerichtet und oberhalb der Ebene V größer als unterhalb derselben, so wird dieser Unterschied durch den Austausch von Teilchen zwischen den

beiden Schichten kleiner werden. Dabei werden nämlich unterhalb V Moleküle, die außer der Wärmebewegung eine kleine Geschwindigkeit nach rechts haben, durch andere mit einer größeren Geschwindigkeit ersetzt. Beim Zusammenstoßen derselben mit Molekülen, die bereits unterhalb V waren, wird sich die größere Geschwindigkeit auf alle Teilchen unterhalb V verteilen, aber dann wird natürlich die Geschwindigkeit, welche die ganze Schicht nach rechts besitzt, größer als sie anfangs war. Oberhalb V findet das entgegengesetzte statt und für den Beobachter kommt alles auf dasselbe hinaus, als ob keine Materie durch die Ebene hindurchgegangen sei, sondern das, was über derselben liegt, den anderen Teil durch eine tangentiale Kraft mitgerissen habe.

Wir sahen in § 213, daß infolge der inneren Reibung ein gewisser Druckunterschied erforderlich wird, um eine Flüssigkeit oder ein Gas durch eine enge Röhre zu treiben. Bei einem Gas kann man sich von dem, was in der Röhre stattfindet, in folgender Weise eine Vorstellung machen. Die Röhrenwand ist selbst aus Molekülen zusammengesetzt und mit einer verdichteten Gasschicht bedeckt. In diese Schicht kommen unaufhörlich neue Teilchen aus dem Innern der Röhre, während andere Moleküle die Grenzschicht verlassen. Wenn nun die ersteren Moleküle außer der Wärmebewegung eine Geschwindigkeit in der Längsrichtung der Röhre haben, so werden sie diese, wenn sie in der Wandschicht angekommen sind, schnell verlieren, und die Moleküle, welche an ihre Stelle treten, verlassen die Wand ohne eine solche Geschwindigkeit. Strömte nun das Gas anfangs im Innern der Röhre fort, aber würde die Strömung nicht *unterhalten,* so würde sie nach einiger Zeit infolge dieses Austausches von Molekülen vollständig verschwunden sein. Soll eine konstante Strömungsgeschwindigkeit bestehen bleiben, so muß immer wieder neuen Molekülen — nämlich denjenigen, die aus der Wandschicht stammen, — eine Geschwindigkeit erteilt werden, und hierzu ist ein fortwährender Druckunterschied nötig.

Da die molekularen Geschwindigkeiten bei Temperaturerhöhung zunehmen, ist es begreiflich, daß der Austausch von Teilchen durch die Ebene V in Fig. 202 hindurch oder zwischen der Wandschicht und dem Innern in einer Kapillarröhre durch eine Temperaturerhöhung befördert

wird. Wirklich ergibt sich aus Versuchen über das Strömen von Gasen durch enge Röhren, daß die innere Reibung beim Erwärmen größer wird. Bei Flüssigkeiten ist das entgegengesetzte der Fall.

Die innere Reibung der Gase macht sich außer bei der Strömung durch enge Röhren auch bei vielen anderen Erscheinungen bemerkbar (vgl. § 214). *Alle Bewegungen in einer Gasmasse werden durch sie gedämpft.* Sie trägt dazu bei, die Stürme zur Ruhe zu bringen und die Schallschwingungen zu dämpfen.

Nach dem Gesagten wird es einleuchten, daß das Studium einfacher Fälle, bei denen die innere Reibung im Spiel ist, zu einem Schluß über die Länge des Weges führen kann, den ein Molekül durchschnittlich zwischen zwei aufeinander folgenden Zusammenstößen durchläuft. Auch die Wärmeleitung kann zur Bestimmung dieses Weges dienen. Die auf diese Weise erhaltenen Resultate stehen sowohl untereinander als auch mit denjenigen, welche man aus den Diffusionserscheinungen abgeleitet hat, in befriedigender Uebereinstimmung.

Diese Länge steht im Zusammenhang mit der Größe der Moleküle und mit ihrer Anzahl; denn je kleiner die Teilchen sind und je geringer ihre Anzahl ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß eins derselben eine größere Strecke durchläuft, ohne mit einem anderen zusammenzustoßen.

Die mathematische Theorie der inneren Reibung hat zu dem merkwürdigen Resultat geführt, daß sie bis zu sehr hohen Verdünnungen von der Dichte des Gases unabhängig ist (obgleich sie, wenn die Dichte noch weiter abnimmt, doch schließlich kleiner wird). Allerdings wird die Anzahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit durch die Ebene V (Fig. 202) gehen, bei Verdünnung kleiner, aber da die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes vermindert wird, so werden die Teilchen aus der einen Schicht tiefer in die andere eindringen, wodurch die Vermischung befördert wird. Die Beobachtung lehrt wirklich, daß das in § 214 besprochene Mitführen der einen Scheibe durch die andere bei der höchsten Verdünnung, die man mit einer gewöhnlichen Luftpumpe erreichen kann, noch in demselben Grade geschieht wie beim gewöhnlichen Luftdruck. Dies ist eine der bemerkenswertesten Bestätigungen der kinetischen Gastheorie.

§ 227. **Druck einer Gasschicht gegen eine andere.** Im vierten Kapitel haben wir wiederholt von dem Druck gesprochen, den der eine Teil eines Gases gegen den anderen ausübt; wir stellten uns dabei vor, daß jeder Teil fortwährend

aus derselben Materie besteht. Man würde diese Auffassung aufgeben müssen, wenn in den Raumteilen, welche man betrachtet, nur wenig Moleküle enthalten wären. Enthielte z. B. 1 cbm eines Gases 100 Teilchen, so würden die Teilchen, die sich in einem bestimmten Augenblick in einer Schicht von 1 cm Dicke befinden, infolge ihrer Bewegung schnell nach allen Richtungen hin zerstreut sein; auch würde man dann schwerlich von einem Druck sprechen können, der von den angrenzenden Teilen des Gases ausgeübt wird, da die Schicht die meisten Moleküle, die von diesen Teilen angeflogen kommen, ungehindert durchlassen würde.

In Wirklichkeit liegt die Sache bei Gasen von gewöhnlicher Dichte anders. Da die mittlere Weglänge zwischen zwei Zusammenstößen noch kein zehntausendstel Zentimeter beträgt, so wird z. B. bei einer Schicht von 1 mm Dicke der Austausch von Molekülen mit der Umgebung auf die Nähe der Seitenflächen beschränkt bleiben und kann eine solche Schicht während geraumer Zeit als aus denselben Teilchen bestehend angesehen werden. Teilchen, welche aus der Umgebung kommen, stoßen in geringer Entfernung von der Oberfläche gegen Moleküle, die zu der Schicht gehören und üben also gegen diese einen Druck aus in einer Weise, die nicht sehr verschieden von dem Vorgang ist, der stattfinden würde, wenn sie gegen eine feste Wand stießen.

§ 228. **Temperaturänderungen bei adiabatischer Ausdehnung und Zusammendrückung.** Wenn ein Kolben, der eine Gasmasse in einem zylinderförmigen Gefäß abschließt, festgehalten wird, so wird ein Molekül mit derselben Geschwindigkeit zurückgeworfen, mit der es gegen den Kolben stößt. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn sich der Kolben bewegt. Weicht er zurück, so kehrt ein Teilchen mit geringerer Geschwindigkeit zurück als die, mit der es den Kolben erreichte; wird der Kolben nach innen getrieben, so ist das entgegengesetzte der Fall.

Da diese Geschwindigkeitsänderungen bei allen Teilchen vorkommen, die den Kolben treffen, so wird die mittlere Geschwindigkeit der molekularen Bewegung und also die Temperatur des Gases verändert werden. Dies ist auch der Fall, wenn das Gas durch eine Quecksilbersäule, die zurückweicht oder nach innen geschoben wird, oder selbst durch eine andere

Gasmasse begrenzt wird (vgl. § 227). *Im allgemeinen sinkt die Temperatur eines Gases, wenn es sich ausdehnt, und steigt sie, wenn es zusammengedrückt wird,* wenn nicht die Temperatur durch Wärmezufuhr von außen oder durch Abgabe von Wärme an die Umgebung konstant gehalten wird.

Volumänderungen, die bei konstanter Temperatur stattfinden, wollen wir *isothermische* nennen; dagegen werden Änderungen, bei denen jeder Wärmeaustausch mit der Umgebung ausgeschlossen ist, *adiabatische* genannt. Um diese vollkommen zu verwirklichen, müßte man das Gas in ein Gefäß einschließen, dessen Wände keine Wärme durchlassen.

Solche Wände gibt es in Wirklichkeit nicht; *man kann jedoch sehr schnelle Änderungen als adiabatische betrachten,* da bei diesen die für einen merklichen Wärmeaustausch mit dem Gefäß erforderliche Zeit fehlt.

Man beobachtet daher auch beim plötzlichen Niederdrücken eines Kolbens in einem starken Glaszylinder (pneumatisches Feuerzeug) eine Wärmeentwicklung, die hinreicht, um etwas Schwefelkohlenstoffdampf, den man in die Luft im Zylinder gebracht hat, zu entzünden. Umgekehrt sinkt bei schneller Luftverdünnung die Temperatur unter der Glocke einer Luftpumpe so weit, daß, wenn die Luft feucht ist, ein Nebel entsteht.

Die Beobachtungen über die adiabatischen Volumänderungen einer Luftmasse haben gelehrt, daß, wenn z. B. Luft von 15° plötzlich auf ein Fünftel des ursprünglichen Volums zusammengedrückt wird, die Temperatur auf 280° steigt; bei Ausdehnung auf das Fünffache des ursprünglichen Volums würde sich das Gas, wenn die gewöhnlichen Gesetze fortwährend gültig blieben, auf — 120° abkühlen.

§ 229. **Übereinstimmung mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie.** Daß die besprochenen Erscheinungen mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie in Übereinstimmung sind, ist leicht einzusehen. Eine Gasmasse, die sich in einem Zylinder unter einem Kolben befindet, übt gegen diesen einen Druck aus und verrichtet also bei der Ausdehnung eine Arbeit, was nur möglich ist, wenn die innere Energie abnimmt. Was die Moleküle an kinetischer Energie verlieren, findet sich als kinetische Energie des Kolbens selbst wieder, wenn dieser

eine merkliche Geschwindigkeit bekommt, oder als potentielle Energie, wenn durch die Bewegung des Kolbens ein Gewicht gehoben wird; sie kann auch dazu gedient haben, eine Maschine, die mit dem Kolben verbunden ist, in Bewegung zu setzen.

Umgekehrt entspricht beim Niedergehen des Kolbens die Vermehrung der Energie der Moleküle der Arbeit der äußeren Kraft, die den Kolben nach innen treibt, also einer Verminderung der Energie in dem Körper des Experimentators, wenn dieser selbst die Kraft ausübt.

Natürlich verrichtet ein Gas keine Arbeit, wenn es sich ausdehnt, ohne einen anderen Körper in Bewegung zu setzen, d. h. wenn es in einen luftleeren Raum eindringt. Dann bleibt also die innere Energie unverändert, und die kinetische Gastheorie, nach welcher diese Energie kinetische Energie ist, erfordert, daß die molekulare Geschwindigkeit und die Temperatur unverändert bleiben.

Ein Versuch von Joule hat diese Erwartung bestätigt. Er verband zwei gleiche Zylinder durch eine Röhre mit einem Hahn und stellte beide in das Wasser eines Kalorimeters. Anfangs war der eine Zylinder luftleer, der andere mit komprimierter Luft gefüllt, und es zeigte sich dann, daß beim Öffnen des Hahnes die Temperatur des Kalorimeters keine Änderung erfuhr, so daß auch das Gas, ohne Wärme aufzunehmen oder abzugeben, seine ursprüngliche Temperatur behalten hat.

Um die Bedeutung dieses wichtigen Versuches besser hervortreten zu lassen, wollen wir für einen Augenblick von der kinetischen Gastheorie absehen und bei unseren Schlüssen nur das Gesetz der Energie gebrauchen. Das Wasser im Kalorimeter hat dieselbe Temperatur behalten, und das Gas hat also keine Wärme aufgenommen. Außerdem hat es keine Arbeit verrichtet; deshalb ist die innere Energie nicht verändert, wenn auch das Volum größer geworden ist. Der Versuch lehrt uns also, *daß die innere Energie einer Gasmasse, welche auf konstanter Temperatur gehalten wird, unabhängig vom Volum ist.* Die kinetische Theorie gibt nun von dieser Unabhängigkeit Rechenschaft, indem sie annimmt, daß sich die Teilchen des Gases nicht merklich anziehen, so daß von einer potententiellen Energie, die bei Ausdehnung zunehmen würde, keine

Rede ist, und daß die Moleküle bei einer bestimmten Temperatur immer dieselbe Geschwindigkeit haben, einerlei ob das Volum groß oder klein ist.

Das Gesagte ist jedoch ebenso wie die Gesetze von Boyle und Gay-Lussac nur annähernd richtig. In Wirklichkeit erleidet die Temperatur bei adiabatischer Ausdehnung, auch wenn keine äußere Arbeit verrichtet wird, eine Erniedrigung, die, wenn die ursprüngliche Dichte nicht zu groß ist, sehr gering ist, aber, wenn man mit einem stark zusammengedrückten Gas beginnt, erheblich werden kann. Man hat diese Temperaturerniedrigung sogar zur Verflüssigung von Gasen benutzt.

§ 230. **Spezifische Wärme bei konstantem Volum und bei konstantem Druck.** Wir wollen annehmen, in einem Zylinder befinde sich unter einem Kolben ein Gramm irgendeines Gases; die Temperatur desselben sei 0°. Dieses Gas erwärmen wir nun auf 1°, und zwar, während wir den Kolben festhalten und also eine Ausdehnung verhindern. Die Wärmemenge, welche wir hierzu dem Gas zuführen müssen, heißt die *spezifische Wärme bei konstantem Volum* und soll mit c_v bezeichnet werden. *Sie dient dazu, um dem Gas die innere Energie zu geben, die es bei 1° mehr hat als bei 0°.*

Wir wiederholen jetzt den Versuch mit dem Unterschied, daß wir den Kolben sich frei bewegen lassen und dafür sorgen, daß das Gas fortwährend denselben Druck ausübt. Um die innere Energie zu vergrößern, ist wieder dieselbe Wärmemenge erforderlich wie soeben; diese Energie hat nämlich bei 1° einen bestimmten Wert, einerlei ob das Gas einen kleinen oder einen großen Raum einnimmt. Aber das Gas verrichtet jetzt, während es den Kolben forttreibt, eine Arbeit, und aus diesem Grund muß mehr Wärme zugeführt werden als bei dem ersten Versuch.

Die Anzahl der Kalorien, welche jetzt erforderlich ist, heißt die *spezifische Wärme bei konstantem Druck* und soll mit c_p bezeichnet werden.

Man kann die Versuche auch umkehren. Kühlt sich das Gas bei konstantem Volum von 1° auf 0° ab, so gibt es eine Wärmemenge c_v ab; aber es gibt mehr Wärme ab, nämlich eine Menge c_p, wenn der Druck konstant bleibt und es sich also zusammenzieht. Der Überschuß von Wärme ist in diesem Fall durch die Arbeit *entstanden*, welche die äußeren Kräfte verrichten.

Um die spezifische Wärme eines Gases zu messen, läßt man es erst durch eine erwärmte, spiralförmig gewundene Röhre und dann durch eine ebensolche Röhre strömen, die sich in einem Kalorimeter befindet. Die Temperaturerhöhung dieses letzteren, die Temperaturen, mit denen das Gas das Kalorimeter erreicht und verläßt, die Gasmenge und der Wasserwert des Kalorimeters sind die Daten, aus denen man die spezifische Wärme ableiten kann. *Das Resultat ist die spezifische Wärme bei konstantem Druck.* Man würde dies unmittelbar einsehen, wenn das Gas auf seinem Weg durch das Kalorimeter überall denselben Druck ausübte, aber man kann beweisen, daß es auch richtig ist, wenn ein merkbarer Druckunterschied nötig ist, um das Gas fortzubewegen.

Zu diesem Zwecke kann man Betrachtungen wie die von § 211 (S. 325) und eine Figur wie Fig. 198 benutzen; nur ist es jetzt nicht nötig, daß die Durchschnitte a und b verschiedene Größe haben. Wir wollen annehmen, daß der Teil der Röhre zwischen a' und b sich im Kalorimeter befindet, daß also a und a' in dem warmen und b und b' in dem abgekühlten Gas liegen. Es sei t_1 die Temperatur in dem Raum $a\,a'$ und t_2 die in $b\,b'$, p_1 der Druck in a, p_2 der in b, v_1 das Volum zwischen a und a' und v_2 das zwischen b und b'. Da angenommen wird, daß dieselbe Gasmasse, die erst zwischen a und b liegt, sich später zwischen a' und b' befindet, hat man bei einer stationären Bewegung

$$\frac{p_1 v_1}{1 + \alpha t_1} = \frac{p_2 v_2}{1 + \alpha t_2}.$$

Die Arbeit der äußeren Kräfte auf die Masse zwischen a und b ist

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Da man von der kinetischen Energie absehen kann, die das Gas bei seiner geringen Strömungsgeschwindigkeit hat, so kommt eine dieser Arbeit äquivalente Wärmemenge zum Vorschein, außerdem noch die Wärme, welche der von dem Gas verlorenen inneren Energie entspricht.

Wäre aber eine Gasmenge gleich derjenigen, welche zwischen a und a' enthalten ist, in ein Gefäß gebracht und bei dem konstanten Druck p_1 von t_1 auf t_2 abgekühlt worden, so würde das Volum

$$v_2' = v_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}$$

geworden sein, und die Arbeit des äußeren Druckes würde

$$p_1 (v_1 - v_2')$$

sein, was gleich dem Wert (9) ist.

Für Luft fand Regnault

$$c_p = 0{,}2377,$$

wobei noch zu bemerken ist, daß, abgesehen von kleinen Abweichungen, diese Zahl immer die spezifische Wärme bei konstantem Druck angibt, einerlei wie hoch der Druck ist.

Aus einem naheliegenden Grunde ist es nicht möglich, die spezifische Wärme bei konstantem Volum durch einen direkten Versuch zu bestimmen. Da aber der Unterschied zwischen c_p und c_v in engem Zusammenhang mit den in den vorhergehenden Paragraphen besprochenen Erscheinungen steht, so hat man in der Beobachtung der letzteren ein Mittel, durch welches man c_v finden kann, wenn c_p bekannt ist. Auf diese Weise hat man gefunden

$$c_v = 0{,}1692.$$

§ 231. **Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes.** Der Unterschied $c_p - c_v = 0{,}0685$ Kalorien ist nun die Wärmemenge, welche verbraucht wird, um den Kolben oder sonst einen begrenzenden Körper fortzubewegen, wenn 1 g Luft bei konstantem Druck von 0^0 auf 1^0 erwärmt wird. Es sei der Druck p Dyn pro Quadratzentimeter und das Volum v Kubikzentimeter, also die Ausdehnung bei der Erwärmung αv. Die Arbeit, welche das Gas verrichtet, ist dann (§ 207, b) $\alpha p v$ Erg, und da nun für diese Arbeit $c_p - c_v$ Kalorien gedient haben, findet man für das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit

$$E = \frac{\alpha p v}{c_p - c_v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Ist der Druck gleich 76 cm Quecksilber, so ist $p = 1{,}013 \times 10^6$ und $v = 1/0{,}001293$. Man findet also

$$E = \frac{1{,}013 \times 10^6}{273 \times 0{,}001293 \times 0{,}0685} = 419 \times 10^5.$$

Dies ist die Bestimmung, an welche bereits in § 143 gedacht wurde. Da sie auf der Kenntnis von c_v beruht, die man durch Versuche über die Temperaturveränderung bei adiabatischer Zusammendrückung oder Ausdehnung bekommen hat, kann man auch sagen, daß der Wert von E aus *diesen* Versuchen abgeleitet ist. Daß dies möglich ist, sieht man leicht ein. Wird ein Gas adiabatisch zusammengedrückt, so kann man aus der Volumverminderung und dem äußeren Druck die Arbeit des letzteren ableiten; anderseits lehrt uns die Temperaturerhöhung in Verbindung mit der spezifischen Wärme des Gases die Menge der

entwickelten Wärme kennen, so daß man alle nötigen Daten hat, um zum mechanischen Äquivalent der Wärmeeinheit gelangen zu können. Dasselbe ist der Fall, wenn man die Abkühlung bei einer Ausdehnung gemessen hat; man weiß dann, wieviel Wärme verschwunden ist und wieviel Arbeit durch diese Wärme verrichtet worden ist.

§ 232. **Betrachtung einer unendlich kleinen adiabatischen Volumveränderung.** Eine der Arten, wie die Temperaturveränderung bei einer adiabatischen Zusammendrückung gemessen werden kann, ist die folgende. Aus einem großen Glasballon C (Fig. 210), welcher durch einen Hahn A mit weiter Durchbohrung geschlossen werden kann, wird zunächst etwas Luft herausgesogen; nach dem Schließen des Hahns wird dann der Apparat sich selbst überlassen, bis er die Temperatur der Umgebung angenommen hat. Mit Hilfe eines Manometers kann der Druck des Gases gemessen werden; sobald sich dieser nicht mehr ändert, ist man sicher, daß die Temperatur der Umgebung erreicht ist.

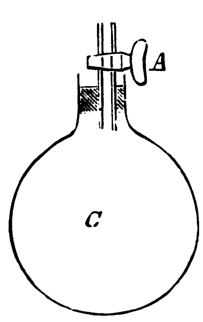


Fig. 210.

Nun wird der Hahn A geöffnet und, sobald der Druck gleich dem der Atmosphäre geworden ist, was sehr schnell geschieht, wieder geschlossen. In diesem Augenblick ist durch das Einströmen der Luft die Temperatur gestiegen; nach dem Schließen des Hahnes sinkt sie wieder auf den ursprünglichen Wert, und dabei nimmt der Druck ab.

Es sei p der Atmosphärendruck, p_1 der Druck, der anfangs im Ballon herrschte, p_2 der Enddruck, alles in Dyn pro Quadratzentimeter. Dann ist $p_1 < p$ und $p_2 < p$, während auch $p_1 < p_2$ *sein muß, da am Schlusse* bei derselben Temperatur mehr Luft im Ballon ist als anfangs.

Ferner sei die absolute Temperatur der Umgebung T. Bei der letzten Zustandsänderung ist der Druck von p auf p_2 gesunken, während das Volum unverändert geblieben ist. In dem Augenblick, in welchem der Hahn geschlossen wurde, war daher die Temperatur $T' = (p/p_2)\,T$. *Das Resultat des Versuches ist also, daß, wenn eine Luftmasse von der Temperatur T und dem Druck p_1 adiabatisch auf den Druck p zusammengedrückt wird, die Temperatur auf $T' = (p/p_2)\,T$ steigt.*

Dasselbe würde auch der Fall sein, wenn dieselbe Druckänderung adiabatisch stattfände, während sich die Luft in einem Zylinder unter einem Kolben befindet. Man kann nun leicht Ausdrücke finden für die Arbeit, die dann durch den äußeren Druck verrichtet wird, und für die Vermehrung der inneren Energie; indem man diese einander gleichsetzt, bekommt man eine Gleichung, die mit (10) zusammen zur Berechnung von c_v und E dient.

Nimmt man nämlich an, daß die Gasmenge, welche adiabatisch zusammengedrückt wird, 1 g beträgt, und versteht man ebenso wie oben

unter v das Volum dieser Menge bei 0° unter dem Druck p, so ist das Volum *vor* der adiabatischen Zusammendrückung (Druck $= p_1$, Temperatur $= T$)

$$\frac{T}{273} \cdot \frac{p}{p_1} v = \alpha T \frac{p}{p_1} v,$$

und nach derselben (Druck $= p$, Temperatur $= T' = T(p/p_2)$)

$$\alpha T \frac{p}{p_2} v.$$

Die Volumverminderung ist also gewesen

$$\alpha T p \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Der Druck, der von außen auf den Kolben wirken mußte, ist nicht fortwährend derselbe gewesen, allein wenn die Unterschiede $p - p_1$ und $p - p_2$ und also auch die Volumveränderungen sehr klein sind, so kann man hiervon absehen und die Arbeit so berechnen als ob der Druck fortwährend gleich p_1 gewesen wäre. Die Arbeit ist also das Produkt (11) und p_1, d. h.

$$\alpha T p \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Was die innere Energie betrifft, so muß man bedenken, daß die Vermehrung derselben durch die Temperaturerhöhung bestimmt wird und, wenn diese 1° und die Menge des Gases 1 g beträgt, gleich c_v Kalorien, also gleich $E c_v$ Arbeitseinheiten ist. Bei dem Versuch, den wir betrachten, ist die Temperaturerhöhung $T' - T = T(p/p_2 - 1)$, also die Vermehrung der inneren Energie $E c_v T(p/p_2 - 1)$. Wenn man dies gleich von (12) setzt, so findet man

$$E c_v = \alpha p v \cdot \frac{p_2 - p_1}{p - p_2}.$$

Aus dieser Gleichung und (10) können nun c_v und E berechnet werden. Eliminiert man die letztere Größe, so erhält man

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Durch den beschriebenen Versuch wird also das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen bestimmt.

§ 233. **Ausströmen von Gasen.** Wir wollen annehmen, ein Gas befinde sich in einem Gefäß, welches an dem einen Ende durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen ist, auf den eine konstante äußere Kraft ausgeübt wird, und es ströme infolgedessen durch eine Öffnung gegenüber dem Kolben in einen Raum, in welchem ein unveränderlicher niedrigerer Druck herrscht. Die Frage, mit welcher Geschwindigkeit dann das Gas durch die Öffnung geht, kann ebenso wie die entsprechende Frage für eine Flüssigkeit (§ 209) mit Hilfe des

Gesetzes der Energie beantwortet werden; man muß dabei aber nicht nur auf die positive Arbeit des Druckes auf den Kolben und die negative Arbeit des Druckes, der sich dem Ausströmen entgegensetzt, achten, sondern auch auf die innere Energie und, wenn nötig, auch auf die Wärmemenge, die dem Gas von außen zugeführt wird. Ist die Wand, in welcher sich die Öffnung befindet, sehr dünn und ist also das Gas nur über eine kleine Oberfläche mit einem festen Körper in Berührung, so kann man von dieser Wärme absehen, aber da sich das Gas dann adiabatisch ausdehnt, sinkt die Temperatur und nimmt die innere Energie ab. Die Ausströmungsgeschwindigkeit ist also anders als man finden würde, wenn man die kinetische Energie, welche ihr entspricht, nur aus der Arbeit der Drucke berechnete.

Wir können die Erscheinung hier nicht näher betrachten. Es mag nur unter Hinweisung auf das in § 209 Gesagte bemerkt werden, daß bei ein und derselben Druckdifferenz die Geschwindigkeit um so größer ist, je leichter das betreffende Gas ist, und daß sie erheblich größer ist als die Geschwindigkeit, mit der eine Flüssigkeit ausströmen würde, wenn bei dieser an beiden Seiten der Öffnung dieselben Drucke herrschten wie in dem Gas.

Sechstes Kapitel.

Thermodynamische Betrachtungen.

§ 234. **Temperaturgleichgewicht.** Während man mit Hilfe der Molekulartheorie manche Erscheinungen bei Gasen und, wie wir später sehen werden, auch bei Flüssigkeiten, erklären kann, ist es doch in vielen Fällen noch unmöglich, sich von der Bewegung der Moleküle und der Wirkung, die sie aufeinander ausüben, bis ins einzelne Rechenschaft zu geben. Bereits früher (§ 112) wurde darauf hingewiesen, von welcher Bedeutung unter diesen Umständen das Gesetz der Erhaltung der Energie ist. Wir werden uns jetzt mit allgemeinen Sätzen anderer Art beschäftigen, die ebenfalls die Erscheinungen bis zu einem gewissen Grade begreiflich machen, wenn uns auch der Mechanismus, durch den sie hervorgebracht werden, verborgen bleibt.

Da bei den folgenden Betrachtungen der Begriff der Temperatur eine wichtige Rolle spielt, beginnen wir damit, daß wir nochmals an die Bedeutung dieses Wortes erinnern. Wenn wir eine Anzahl von Körpern untersuchen, jeden in einem bestimmten Zustand genommen, so können wir für jeden derselben eine gewisse Zahl so angeben, daß es von der Größe dieser Zahlen abhängt, ob bei der Berührung zweier Körper Wärme von dem einen zum anderen übergeht und in welcher Richtung dies geschieht. Sind die betreffenden Zahlen für zwei Körper gleichgroß, so werden diese bei der Berührung unverändert bleiben; in jedem anderen Fall geht Wärme von dem Körper mit der größeren Zahl nach dem Körper mit der kleineren Zahl über. Die so gewählten Zahlen, für die z. B. diejenigen genommen werden können, welche das Volum einer

bestimmten Gasmasse angeben, die, immer unter demselben Druck, nacheinander mit den verschiedenen Körpern in Berührung gebracht wird, nennen wir die *Temperaturen* der Körper.

Zunächst verdient nun bemerkt zu werden, *daß es keineswegs selbstverständlich ist, sondern daß es als das Ergebnis unserer Beobachtungen angesehen werden muß, daß Zahlen der genannten Art wirklich angegeben werden können und daß also von einer Temperatur gesprochen werden kann.* Um dies einzusehen, stelle man sich drei Körper A, B und C vor, die sich in solchen Zuständen befinden, daß kein Wärmeübergang stattfindet, wenn man A mit B, und ebensowenig, wenn man A mit C in Berührung bringt. Versucht man nun Zahlen zu wählen, welche die oben genannte Eigenschaft haben, so muß offenbar dem Körper B und auch dem Körper C dieselbe Zahl beigelegt werden wie dem Körper A, und wenn diese Zahlen *in Fallen allen* dafür entscheidend sein sollen, ob ein Übergang von Wärme stattfindet oder nicht, so ist es nötig, daß dann auch B und C bei der Berührung keine Wärme aneinander abgeben. Die Beobachtung lehrt, daß dies tatsächlich so ist, aber es ist doch *denkbar,* daß B Wärme an C abgeben würde, wenn auch beide mit A keine Wärme austauschen.

Sodann muß darauf hingewiesen werden, *daß die Temperaturgleichheit oder, wie man zu sagen pflegt, das „Temperaturgleichgewicht“ von selbst entsteht, wenn wir zwei oder mehr Körper unter solchen Umständen sich selbst überlassen, daß in einer der in § 146 genannten Weisen Wärme von dem einen auf den anderen übergehen kann.* In kürzerer oder längerer Zeit werden dann alle Temperaturunterschiede ausgeglichen.

§ 235. **Gleichgewichtszustände.** Im vorhergehenden Paragraphen wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß in dem betrachteten System keine andere Veränderung stattfinden kann als ein Übergang von Wärme von dem einen Körper zum anderen. *In Wirklichkeit kann oft manche andere Erscheinung eintreten, aber die Erfahrung lehrt, daß auch dann stets ein bestimmter Endzustand entsteht, der sich weiter nicht mehr ändert.* Wenn z. B. in ein geschlossenes Gefäß eine Gasmasse gebracht wird, die anfangs nur einen Teil des Raumes einnimmt, so wird sie sich nach einiger Zeit über das ganze Volum verbreitet haben; die Dichte wird, wenn von dem Ein-

fluß der Schwerkraft abgesehen werden kann, überall gleichgroß geworden sein, und wenn sich dieser Einfluß bemerkbar macht, nach einem bestimmten Gesetz von unten nach oben abnehmen.

Hat man in dem Gefäß erst eine Flüssigkeit und darüber einen leeren Raum, so wird die Flüssigkeit, wenn die Menge derselben klein ist, vollständig in den gasförmigen Zustand übergehen und sich als *Dampf* über den Raum verbreiten. *In einem gegebenen Volum kann jedoch bei bestimmter Temperatur nur eine bestimmte Menge Flüssigkeit verdampfen;* bringt man noch mehr in das Gefäß, so entsteht ein Zustand, in welchem ein Teil der Flüssigkeit als solche übriggeblieben ist und der Raum über derselben Dampf *von einer bestimmten Dichte d und einer bestimmten Spannung* enthält. Man nennt diesen Dampf, welcher schließlich in Berührung mit der Flüssigkeit besteht, *gesättigten* Dampf.

Derselbe Zustand, zu dem wir soeben gekommen sind, entsteht (bei derselben Temperatur) auch, wenn zuerst über der Flüssigkeit ein Dampf mit größerer Dichte als die angegebene anwesend ist. Es findet dann eine Verwandlung von Dampf in Flüssigkeit, eine *Verdichtung* oder *Kondensation* statt; diese wird so weit fortschreiten, bis wieder die Dichte d erreicht ist.

Wenn in Fällen wie die hier besprochenen der Endzustand erreicht ist, sagt man, *daß das System ins Gleichgewicht gekommen ist.* Als weitere Beispiele von solchen Gleichgewichtszuständen können noch dienen: ein Körper, der teilweise geschmolzen ist, ein fester Stoff in Berührung mit einer „gesättigten“ Lösung desselben, und endlich der Fall, daß auf Wasser eine Schicht Äther gegossen ist, wobei es sich zeigt, daß sich im Wasser eine gewisse Menge Äther und im Äther etwas Wasser löst.

Wenn ein System aus verschiedenen Teilen besteht, die jeder für sich homogen und ganz oder teilweise aus denselben Stoffen zusammengesetzt sind, so unterscheidet man diese voneinander als verschiedene *Phasen.*

Die Gleichgewichtszustände, welche wir nun kennen gelernt haben, sind nach der Molekulartheorie von anderer Art als die gewöhnlichen Gleichgewichte, die in der Mechanik behandelt werden. *Obgleich nämlich die für uns wahrnehmbaren*

Teile des Körpers dieselbe Zusammensetzung und Eigenschaften behalten, würde ein Beobachter, der die einzelnen Moleküle sehen könnte, Zeuge von sehr komplizierten Bewegungserscheinungen sein. Daß trotz dieser Veränderungen das ganze System sich in einem unveränderlichen Zustand befindet, ist der großen Anzahl von Molekülen zu verdanken, aus denen die Körper aufgebaut sind.

Denken wir uns z. B. zwei Stücke Kupfer *A* und *B*, die miteinander in Berührung gebracht werden, nachdem sie einige Zeit in schmelzendem Eis gelegen haben. Ebenso wie in einem Gas bei einer bestimmten Temperatur die verschiedenen Teilchen ungleiche Geschwindigkeiten haben (§ 222), wird dies auch in dem Kupfer der Fall sein. Es ist also sehr gut möglich, daß in dem einen Punkt der Berührungsfläche ein Molekül von *A* eine viel größere Geschwindigkeit hat als ein Teilchen von *B*, mit dem es in Berührung kommt, während in einem anderen Punkt das Entgegengesetzte der Fall ist. An der ersteren Stelle wird dann einige Wärme von *A* nach *B* und an der letzteren Stelle von *B* nach *A* übergehen.

Daß im ganzen genommen weder in der einen noch in der anderen Richtung Wärme übergeht, ist dem Umstand zuzuschreiben, daß sich längs der Grenzfläche sehr verschiedene Zustände finden, aber so, daß im Durchschnitt die Geschwindigkeiten in dem einen Körper ebensogroß sind wie im anderen.

Auch die gleichmäßige Verteilung eines Gases über den verfügbaren Raum ist nur durch die große Anzahl der Teilchen möglich. Bewegten sich in einem Gefäß nicht mehr als 100 Moleküle hin und her, so würden wohl nicht in jeder Hälfte genau 50 sein.

Die Verdampfung einer Flüssigkeit kann man sich so vorstellen, daß einige Moleküle, und zwar diejenigen, welche die größte Geschwindigkeit haben, aus der Flüssigkeit entweichen und sich in dem Raum über derselben als Gasmoleküle bewegen. Unaufhörlich werden einige Teilchen dies tun, und die Dampfmenge würde fortwährend zunehmen, wenn nicht auch etwas anderes stattfände. Moleküle des Dampfes können nämlich durch ihre Bewegung wieder in die Flüssigkeit kommen und durch die Anziehung derselben festgehalten werden. Dies

wird um so mehr geschehen, je mehr Dampf bereits vorhanden ist. *Schließlich ist der Dampf mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht, wenn ebensoviel Teilchen als die Flüssigkeit verlassen in dieselbe zurückkehren* (vgl. § 222).

Andere Gleichgewichte zwischen zwei Phasen kann man in ähnlicher Weise auffassen.

§ 236. **Kennzeichen eines Gleichgewichtszustandes.** Wie sich auch die Dichte des Stoffes von einem Punkt zum anderen ändert und wie sehr auch die nebeneinander bestehenden Phasen verschieden sind, *immer wird in allen Teilen des Systems die Temperatur gleichhoch sein.*

Es hat sich ferner gezeigt, daß alle sichtbaren relativen Bewegungen des einen Teils der Materie in bezug auf den anderen durch die Reibung vernichtet werden. *Wenn das betreffende System von ruhenden Wänden umschlossen ist, so finden im Gleichgewichtszustand überhaupt keine sichtbaren Bewegungen mehr statt.*

§ 237. **Adiabatische und isothermische Veränderungen.** Faßt man den Ausdruck, daß ein System sich selbst überlassen werden soll, buchstäblich auf, dann ist damit natürlich auch gesagt, daß dem System weder Wärme zugeführt noch Wärme entzogen werden darf, daß es also z. B. von einer Hülle umschlossen sein muß, die überhaupt keine Wärme durchläßt. Die Veränderungen, welche dann noch stattfinden können, verlaufen *adiabatisch* (§ 228).

Nicht nur in diesem Fall nimmt das System einen Gleichgewichtszustand an, sondern auch dann, wenn, wie wir uns oft vorstellen werden, die Temperatur konstant gehalten wird und also die Veränderungen *isothermisch* sind. Um sich dessen zu versichern, muß man das System mit einem Körper von so großer Wärmekapazität in Berührung bringen, daß sich die Temperatur desselben nicht merklich ändert, wenn er einige Wärme an das System abgibt oder von demselben empfängt. Wir wollen einen solchen Körper ein *Wärmereservoir* nennen.

§ 238. **Richtung, in welcher die Veränderungen stattfinden.** Ein System von Körpern, in welchem zuerst kein Gleichgewicht bestand und welches schließlich in einen stationären Zustand gekommen ist, kehrt nicht von selbst in den ursprüng-

lichen Zustand zurück. Mit anderen Worten, *die Veränderungen, welche es erlitten hat, können nicht in umgekehrter Richtung stattfinden.*

So wird z. B. durch Wärmeleitung oder Wärmestrahlung ein Temperaturunterschied niemals größer. Die Beobachtung lehrt uns zwar, daß auch Körper von niedriger Temperatur z. B. ein Stück Eis, etwas Wärme ausstrahlen, und davon kann ein Körper von höherer Temperatur etwas aufnehmen, aber die Wärme, welche er in dieser Weise von dem kälteren Körper erhält, beträgt stets weniger als die Wärme, die er an diesen durch Strahlung abgibt.

Ein Gas verteilt sich gleichförmig über den verfügbaren Raum, aber niemals wird es sich von selbst in einem Teil des Raumes mehr anhäufen als in einem anderen, und ebensowenig werden die Bestandteile eines Gemisches zweier Gase sich von selbst voneinander trennen.

Eine Veränderung, welche oft vorkommt, wenn sich ein System einem Gleichgewichtszustand nähert, ist die *Umsetzung „mechanischer" Energie in Wärme*, z. B. infolge von Reibung. Unter mechanischer Energie verstehen wir hierbei sowohl die kinetische Energie sichtbarer Bewegungen als auch die potentielle Energie, welche den auf sichtbare Massen wirkenden Kräften entspricht.

Die umgekehrte Veränderung würde nun die Umsetzung von Wärme in solche mechanische Energie oder, mit anderen Worten, die Verrichtung mechanischer Arbeit durch Wärme sein. Diese Umsetzung ist zwar möglich, aber sie ist viel mehr als die zuerst genannte an bestimmte Bedingungen gebunden und von geschickten Kunstgriffen abhängig.

Dies liegt übrigens in der Art der unregelmäßigen molekularen Bewegungen. Wenn sich ein Körper als Ganzes fortbewegt, so können wir ihn, z. B. dadurch, daß wir einen Draht an ihm befestigen, ein Gewicht auf eine gewisse Höhe heben lassen (§ 116). Ebenso können wir die kinetische Energie eines Wasserstroms in welchem sich alle Teilchen in derselben Richtung bewegen, nutzbar machen; wir können das Wasser auf die Schaufeln eines Rades wirken lassen. Schwieriger würde es schon sein, das Wasser Arbeit verrichten zu lassen, wenn in demselben zahlreiche kleine Wirbelströme beständen. Und

vollständig unmöglich ist es, die kinetische Energie der in allen Richtungen umherfliegenden Moleküle eines Gases ganz für mechanische Arbeit zu gebrauchen, da wir nicht mit den einzelnen Molekülen operieren und nicht jedes Molekül gegen eine kleine Fläche drücken lassen können, die senkrecht zur Bewegungsrichtung gehalten wird.

Die innere Energie der molekularen Bewegungen ist uns viel weniger zugänglich als die Energie, welche sichtbare Teile der Körper im ganzen haben. Trotzdem kann man sie wenigstens bis zu einem gewissen Grade nutzbar machen, und dies ist namentlich dann der Fall, wie wir sogleich sehen werden, *wenn man über Körper von verschiedener Temperatur verfügen kann.*

§ 239. **Umsetzung von Wärme in mechanische Energie.** Ohne auf technische Einzelheiten einzugehen, wollen wir uns jetzt klar machen, in welcher Weise bei der Dampfmaschine und den Heißluftmaschinen Wärme in mechanische Energie umgesetzt wird.

Zunächst verdient bemerkt zu werden, daß diese „kalorischen Maschinen" dazu bestimmt sind, solange man will, unaufhörlich Arbeit zu verrichten, und daß der Körper, dessen man sich zu diesem Zwecke bedient (der „arbeitende Körper"), gegen einen in einem Zylinder hin- und hergehenden Kolben drückt[1], dessen Bewegung auf ein Schwungrad übertragen wird. Wir wollen annehmen, daß die Erscheinungen vollkommen periodisch sind und daß man fortwährend von derselben Masse des arbeitenden Körpers Gebrauch macht; dieser muß sich dann jedesmal, wenn der Kolben einen Hin- und Hergang gemacht hat, wieder in demselben Zustand befinden, er muß also einen *Kreislauf von Veränderungen* durchlaufen haben.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß er dabei nur mit der einen Seite des Kolbens in Berührung kommt und daß auf die andere Seite der Atmosphärendruck wirkt. Der letztere verrichtet bei einem Hin- und Hergang, alles zusammengenommen, keine Arbeit.

Der arbeitende Körper tut eine positive Arbeit, wenn er

---

[1] Maschinen wie die Dampfturbinen von De Laval, bei denen ein Dampfstrahl mit großer Geschwindigkeit die Schaufeln eines Rades trifft, lassen wir außer Betrachtung.

den Kolben nach außen treibt, und eine negative, wenn dieser zurückkehrt, mit anderen Worten, während durch den Druck, den er ausübt, im ersten Fall die Drehung des Schwungrades beschleunigt wird, muß dieses Energie abgeben, um den Kolben wieder nach innen zu treiben.

Soll die Gesamtarbeit des arbeitenden Körpers während einer Periode positiv sein, so muß dieser, während der Kolben nach außen geht, einen größeren Druck ausüben als während er zurückkehrt. Dies ist möglich, wenn der Körper während der beiden Hälften des Kreislaufs verschiedene Temperaturen hat.

§ 240. **Heißluftmaschinen.** Als Beispiel mag die Einrichtung einer der einfachsten Maschinen dienen, in welcher abwechselnd erhitzte und abgekühlte Luft benutzt wird. Ein Luftkessel A (Fig. 211) wird unten bei B erhitzt und oben bei C durch kaltes Wasser, welches sich in einem ringförmigen Mantel um C befindet, auf niedriger Temperatur gehalten. In dem Kessel befindet sich ein Körper D, den wir den „Verdränger“ nennen wollen; er kann sich, mit einigem Spielraum am Umfang, auf und nieder bewegen und läßt dabei oben oder unten einen gewissen Raum übrig, der mit Luft gefüllt ist. Der Verdränger hat den Zweck, diese Luft abwechselnd in den erhitzten und den abgekühlten Teil von A zu bringen, damit sie eine hohe oder niedrige Temperatur annimmt. Die hierdurch bewirkten Druckveränderungen werden benutzt, um den Kolben Z in einem Zylinder E, der mit dem Luftkessel verbunden ist, hin- und herzubewegen. Man läßt den Kolben nach außen gehen, wenn der Verdränger hoch steht, und nach innen, wenn er tief steht.

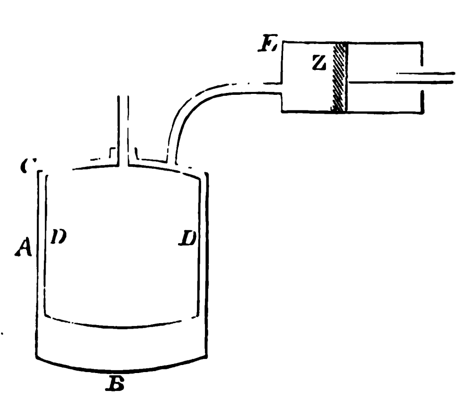


Fig. 211.

Der Kolben ist in der gewöhnlichen Weise mit der Achse eines Schwungrades verbunden, und der Verdränger erhält in

den geeigneten Augenblicken seine Bewegung von dieser Achse, mit der er durch einen Mechanismus, der hier nicht beschrieben zu werden braucht, verbunden ist.

§ 241. **Dampfmaschine.** Als zweites Beispiel mag die in Fig. 212 schematisch dargestellte Dampfmaschine dienen. C ist der Zylinder mit dem Kolben Z, P der Dampfkessel, Q der *Kondensator*, d. h. ein Raum, der durch kaltes Wasser, welches ihn umgibt, auf einer niedrigen Temperatur T_2 gehalten wird. Im Dampfkessel herrscht eine hohe Temperatur T_1. C ist mit P und Q durch die Röhren p und q verbunden; diese können nach Belieben geöffnet und geschlossen werden.

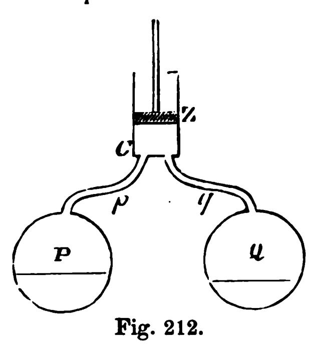


Fig. 212.

Da die Spannung des gesättigten Wasserdampfes (§ 235) bei Erhöhung der Temperatur zunimmt, herrscht in P eine hohe und in Q eine niedrige Dampfspannung. Daher haben wir, um den Dampf Arbeit verrichten zu lassen, nur die Röhre p zu öffnen, wenn der Kolben steigt, und die Röhre q, wenn er sinkt; dann werden nämlich wirklich in den beiden Fällen auf die untere Fläche von Z verschiedene Drucke ausgeübt, beim Steigen die Spannung p_1 des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur T_1, beim Sinken die Spannung p_2 bei der Temperatur T_2. Wenn nämlich der Zylinder mit dem Kondensator Q in Verbindung gesetzt ist, strömt der Dampf in diesen ein und verdichtet sich zum Teil, so daß der Druck p_2 wird.

Wenn nun, wie wir uns vorstellen wollen, das Wasser, welches im Kondensator aus dem Dampf entsteht, zum Speisen des Dampfkessels benutzt wird, so kann die Maschine fortwährend mit derselben Menge Wasser arbeiten, welches einen Kreislauf von Veränderungen durchmacht.

§ 242. **Graphische Darstellung der Veränderungen einer Gasmenge.** Da die Erscheinungen in der Heißluftmaschine von § 240 ziemlich verwickelt sind, wollen wir unsere weiteren Betrachtungen an eine ideale Maschine anknüpfen, in welcher ein Gas einen besonders einfachen Kreislauf von Veränderungen durchmacht.

Wir wollen uns vorstellen, eine Gasmasse befinde sich im Gleichgewichtszustand, während sie die Temperatur T hat und keinen anderen äußeren Kräften als einem Druck p ausgesetzt ist. Das Volum sei v, und der Einfachheit halber denken wir uns, das Gas befinde sich in einem Zylinder unter einem verschiebbaren Kolben. Wird nun dieser Kolben *schnell* nach außen bewegt, sei es durch den Druck des Gases oder durch eine äußere Kraft, so würden sehr komplizierte Zustände entstehen können. Das Gas würde eine bedeutende Strömungsgeschwindigkeit bekommen, von der es nicht sicher ist, daß sie in allen Teilen der Masse dieselbe ist; außerdem könnten auch Verschiedenheiten in Dichte und Temperatur entstehen. Ließen die Wände keine Wärme durch, so würde sich das Gas abkühlen, aber der eine Teil wohl mehr als der andere, und wollte man durch ein Wärmereservoir, mit welchem die Wände des Zylinders in Berührung sind, die Temperatur konstant halten, so würde dennoch bei schnellen Veränderungen in einiger Entfernung von der Wand eine Abkühlung eintreten können. Kurz, man kann nicht sagen, daß während einer schnellen Verschiebung des Kolbens das Gas sich in jedem Augenblick in einem Gleichgewichtszustand, d. h. in einem Zustand befindet, der dauernd bestehen könnte.

Um nun die Komplikationen, welche sich hieraus ergeben, zu vermeiden, wollen wir annehmen, daß die Verschiebung des Kolbens, sei es, wie oben angenommen wurde, nach außen, sei es nach innen, *äußerst langsam* erfolgt. Es ist wohl klar, daß man, wenn auch streng genommen das Gas immer noch etwas von Gleichgewichtszuständen abweichen wird, bei solchen sehr langsamen Bewegungen hiervon absehen kann; *die Veränderungen, welche wir betrachten, bestehen also in einer Aufeinanderfolge von allmählich ineinander übergehenden Gleichgewichtszuständen.*

Da zwischen dem Durck p des Gases, der absoluten Temperatur T und dem Volum v immer der in § 219 besprochene Zusammenhang besteht, so ist der Zustand in jedem Augenblick bestimmt, wenn man zwei dieser drei Größen angibt. Wir wollen das Volum und den Druck wählen und nun die Veränderungen des Gases in einer naheliegenden Weise graphisch darstellen.

Wir wollen nämlich zwei aufeinander senkrecht stehende

Koordinatenachsen OV und OP (Fig. 213) annehmen und das Volum durch die Abszisse und den Druck durch die Ordinate eines Punktes darstellen, so daß, wenn z. B. Oa das Volum und aA den Druck angibt, der Punkt A gefunden wird. Dieser bestimmt dann durch seine Lage den Zustand des Gases Wenn sich der letztere ändert, so hat man für jeden Augenblick wieder einen anderen Punkt; es ist z. B. möglich, daß nach einiger Zeit das Volum og und der Druck gG geworden ist, so daß dann der Punkt G den Zustand des Gases angibt. Offenbar wird nun jeder Veränderung des Gases eine Linie von bestimmter Gestalt wie z. B. die Linie AB entsprechen.

Fig. 213.

Wir können dann kurz von dem „Zustand A“ und von der „Änderung AB“ sprechen.

Besonders wichtig sind nun die Linien, welche isothermische und adiabatische Änderungen darstellen, oder, wie man auch zu sagen pflegt, die *isothermischen Linien* (*Isothermen*) *und die adiabatischen Linien.* Zu den ersteren gehören z. B. AB, EF und DC. Daß sich diese Linien nach rechts der Abszissenachse nähern müssen, leuchtet ein.

Jede isothermische Linie entspricht einer bestimmten Temperatur, und es ist ein Wärmereservoir von dieser Temperatur nötig, wenn das Gas eine solche Änderung erleiden soll wie durch die Linie dargestellt wird. Es ist ferner leicht einzusehen, daß man eine isothermische Linie sowohl in der einen als auch in der anderen Richtung durchlaufen kann.

Beispiele von adiabatischen Linien hat man in AD, GH und BC. Auch diese können nach beiden Seiten hin durchlaufen werden. Geschieht dies in der Richtung einer Aus-

dehnung, d. h. in unseren Figuren nach rechts, so sinkt die Temperatur; der Druck nimmt dann mehr ab als es bei konstanter Temperatur der Fall sein würde. *Deshalb sinken die adiabatischen Linien nach rechts schneller als die isothermischen.*

Daß durch jeden Punkt des in Frage kommenden Teils der Ebene sowohl eine adiabatische als auch eine isothermische Linie gezogen werden kann, bedarf wohl keines Beweises.

§ 243. **Graphische Darstellung der Arbeit.** Bleibt während der Ausdehnung eines Gases der Druck unverändert, so findet man die Arbeit, die es verrichtet, indem man (§ 207, b) den Druck pro Flächeneinheit mit der Volumvermehrung multipliziert. Ist der Druck veränderlich, so muß man (vgl. § 113, d) die Gesamtausdehnung in unendlich kleine Teile teilen; während einer dieser unendlich kleinen Volumvermehrungen kann der Druck als konstant betrachtet werden, so daß die gegebene Regel angewandt werden kann.

Das Resultat, zu welchem man in dieser Weise kommt, kann in sehr einfacher Weise mit Hilfe der graphischen Darstellung ausgedrückt werden. Wird nämlich die Veränderung der Gasmasse durch die Linie PQ (Fig. 214) dargestellt, und nimmt also das Volum von OA bis OB zu, so entspricht der erwähnten Teilung der Gesamtausdehnung eine Teilung von AB in unendlich kleine Teile wie CD. Stellen nun ferner die Ordinaten die Werte des Druckes pro Flächeneinheit dar, und betrachtet man den Druck während der Volumvermehrung CD als konstant $= CR$, so ist einer der Teile der gesuchten Arbeit $CD \times CR$. Die Größe dieses Produkts wird durch die Fläche des auf CD stehenden Rechtecks dargestellt und also die *ganze verrichtete Arbeit* durch den Grenzwert der Summe aller in der Figur gezeichneten Rechtecke, d. h. *durch die Fläche der Figur $PQBA$, die an der oberen Seite durch die krumme Linie PQ begrenzt wird.*

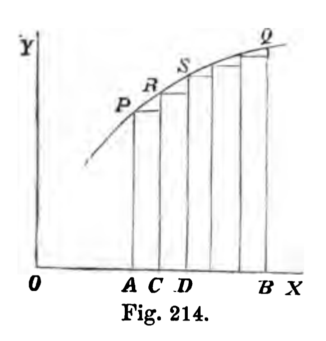


Fig. 214.

Es ist leicht einzusehen, daß die Arbeit des Gases bei der durch QP dargestellten Zusammendrückung gleich der

Fläche der genannten Figur, mit negativem Vorzeichen genommen, ist.

§ 244. **Kreisprozeß bestehend aus zwei isothermischen und zwei adiabatischen Veränderungen.** Kehrt das Gas in den ursprünglichen Zustand zurück, so muß der Punkt, dessen Koordinaten das Volum und den Druck angeben, wieder seine ursprüngliche Stelle einnehmen. Einem Kreisprozeß von Veränderungen entspricht also eine geschlossene Linie; umgekehrt ist immer ein Kreisprozeß denkbar, der einer willkürlich gewählten Linie dieser Art entspricht.

Der im Anfang von § 242 erwähnte einfache Kreisprozeß wird nun dargestellt *durch ein krummliniges Viereck (Fig. 215), in welchem zwei gegenüberliegende Seiten AB und CD isothermische Linien und die beiden anderen Seiten BC und AD adiabatische Linien sind.* Wir nehmen an, daß der Kreisprozeß in der Richtung $ABCD$ stattfindet, und bezeichnen mit T_1 und T_2 die absoluten Temperaturen, die zu den Linien AB und CD gehören. Die Wärmereservoire, welche dabei zur Anwendung kommen, nennen wir R_1 und R_2.

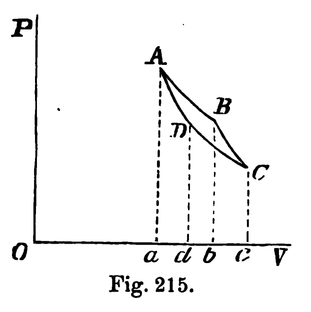


Fig. 215.

Nach allen Vorhergehenden wird klar sein, daß jetzt mit der Gasmasse die folgenden Veränderungen stattfinden müssen: 1. Ausdehnung vom Volum Oa auf das Volum Ob, während das Gas vermittelst des Reservoirs R_1 auf der hohen Temperatur T_1 gehalten wird, 2. nach Aufhebung der Verbindung mit diesem Reservoir eine adiabatische Ausdehnung auf das Volum Oc, wodurch die Temperatur auf die des zweiten Wärmereservoirs R_2 sinkt, 3. während das Gas in Berührung mit diesem letzteren bleibt, eine Zusammendrückung auf das Volum Od, und 4. eine adiabatische Zusammendrückung da, durch die wieder das ursprüngliche Volum und auch die hohe Temperatur erreicht werden. Man kann sich vorstellen, daß diese Veränderungen in einer wirklichen Heißluftmaschine stattfinden, die durch das Reservoir R_1 als „Feuertopf" und das Reservoir R_2 als Kühler in Bewegung gehalten wird. Der Kolben, unter welchem sich das Gas befindet, kann nämlich in der gewöhnlichen Weise mit

einem Schwungrad verbunden sein, und in irgend einer Weise kann durch die Drehung der Schwungradachse in geeigneten Augenblicken die Berührung des Gases mit dem einen oder dem anderen Reservoir hergestellt oder aufgehoben werden.

Nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten wird nun die bei dem betrachteten Kreisprozeß durch das Gas verrichtete Arbeit dargestellt durch:

Fläche $ABba$ + Fläche $BCcb$ — Fläche $CDdc$ — Fläche $DAad$,

d. h. *durch die Fläche der Figur $ABCD$.*

Da aber das Gas schließlich in den ursprünglichen Zustand zurückgekehrt ist, kann diese Arbeit nur auf Kosten einer äquivalenten Wärmemenge verrichtet worden sein. Nun hat bei der Ausdehnung AB das Reservoir R_1 eine gewisse Menge Wärme, die wir Q_1 nennen wollen, abgegeben, während bei der Zusammendrückung CD eine Menge Wärme Q_2 an das Reservoir R_2 abgegeben worden ist. Es muß also $Q_1 > Q_2$ sein; *die Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ ist verschwunden und hat dazu gedient, die soeben berechnete mechanische Arbeit zu verrichten.*

§ 245. **Isothermische Kreisprozesse.** Bei dem Kreisprozeß, den wir im letzten Paragraphen betrachtet haben, sahen wir, daß die Verrichtung einer mechanischen Arbeit auf das engste mit dem Umstand zusammenhängt, daß der arbeitende Körper im Laufe seiner Veränderungen auf zwei verschiedene Temperaturen gebracht wird. Die Untersuchung der Erscheinungen hat nun zu der Erkenntnis geführt, daß dies wirklich eine notwendige Bedingung für das Verrichten einer Arbeit bei dem Kreisprozeß ist, und *daß also, alles zusammengenommen, keine positive Arbeit von dem arbeitenden Körper verrichtet werden kann, wenn er während seines ganzen Kreisprozesses auf konstanter Temperatur gehalten wird.*

Ein solcher isothermischer Kreisprozeß ist bei einem Gas eigentlich nicht möglich. Soll sich nämlich die Temperatur desselben überhaupt nicht ändern, so kann man, wenn man auf einer isothermischen Linie eine Strecke weit fortgeschritten ist, nichts anderes tun als auf derselben Linie wieder zurückkehren. Einen „Kreisprozeß“ kann man dies kaum nennen, und daß *jetzt* die gesamte Arbeit gleich Null ist, ist wohl selbstverständlich.

Andere Körper dagegen, die einer größeren Verschiedenheit von Zuständen fähig sind, können derartige isothermische Kreisprozesse durchlaufen.

Als Beispiel kann ein fester Stab dienen, der ausgedehnt und tordiert werden kann. Wenn wir einen solchen Körper erst ausdehnen und dann, während die Länge unverändert gehalten wird, um einen gewissen Winkel tordieren, ihn dann, während die Torsion bestehen bleibt, sich auf die ursprüngliche Länge zusammenziehen lassen und dann schließlich die Torsion aufheben, so haben wir tatsächlich einen Kreislauf, der sehr gut bei konstanter Temperatur ausgeführt werden kann. Natürlich ist dabei ein Wärmereservoir nötig; oft können wir uns aber vorstellen, daß die umgebende Luft als solches dient.

Solche isothermische Kreisprozesse, die auch bei vielen anderen Körpern denkbar sind, bestimmen wir jetzt noch näher durch die Annahme, daß sie in einer *Aufeinanderfolge von Gleichgewichtszuständen* bestehen, daß also in jedem Augenblick der Zustand des Körpers derselbe ist, in dem er sich befinden würde, wenn die äußeren Kräfte, die dann auf ihn wirken, dauernd beständen. Dazu ist nur nötig, daß die Veränderungen sehr langsam vor sich gehen, so daß den sichtbaren Bewegungen keine nennenswerte kinetische Energie entspricht.

Wir können z. B. die vier erwähnten Veränderungen eines Stabes dadurch bewirken, daß wir die ausdehnende Kraft und das Kräftepaar, welches die Torsion bewirkt, in geeigneter Weise sehr langsam verändern.

Während eines gewissen Teils seines Kreisprozesses kann der arbeitende Körper sehr gut eine positive oder negative Arbeit verrichten. Bei dem Stab ist z. B. diese Arbeit positiv, wenn er sich zusammenzieht oder detordiert, dagegen negativ, wenn er ausgedehnt wird oder wenn der Torsionswinkel zunimmt.

Der oben erwähnte Satz besagt nun, daß die Gesamtarbeit eines Körpers niemals positiv sein kann.

Es ist ferner leicht einzusehen, daß bei einem Kreisprozeß, der auch in umgekehrter Richtung durchlaufen werden kann, also in allen Fällen, in denen man es mit einer Aufeinanderfolge von Gleichgewichtszuständen zu tun hat, die Arbeit auch

keinen negativen Wert haben kann. Wenn nämlich der Körper bei der einen Richtung des Kreisprozesses eine negative Arbeit verrichtete, so würde die Arbeit bei der entgegengesetzten Richtung positiv sein, was mit unserem Satze in Widerspruch steht.

Wir kommen daher zu dem Schluß: *Bei jedem umkehrbaren isothermischen Kreislauf ist die Gesamtarbeit gleich Null.*

Um einzusehen, daß in diesem Satz etwas ausgedrückt wird, was nicht bereits aus dem Gesetz der Erhaltung der Energie folgt, muß man bedenken, daß bei einem isothermischen Kreisprozeß immer ein Wärmereservoir vorhanden ist und daß vielleicht auf Kosten von Wärme, die diesem entlehnt ist, hätte Arbeit verrichtet werden können.

Aus dem Gesetz der Erhaltung der Energie kann man nur ableiten, daß die Arbeit bei einem *adiabatisch* ausgeführten Kreisprozeß gleich Null ist.

§ 246. **Freie Energie.** Die am Schlusse von § 238 gemachte Bemerkung über das ungleiche Maß, in welchem uns verschiedene Formen von Energie zugänglich sind, bringt uns dazu, die Energie, welche in einem System von Körpern *anwesend ist,* und die Energie, über die wir unter gegebenen Umständen *verfügen können,* zu unterscheiden.

Wie es sich mit dem Betrag dieser letzteren verhält, wollen wir zunächst in einem einfachen Fall untersuchen.

Wir wollen uns eine Gasmasse denken, die durch ein Wärmereservoir auf konstanter Temperatur gehalten wird, so daß alle Veränderungen, die sie erleiden kann, *isothermisch* sind; außerdem wollen wir uns vorstellen, daß diese Veränderungen in äußerst langsamen und also *umkehrbaren* Ausdehnungen und Zusammendrückungen bestehen.

Da bei Ausdehnung Arbeit verrichtet werden kann, so schließen wir, daß in dem System, welches aus dem Gas und dem Wärmereservoir besteht, eine gewisse Menge Energie verfügbar ist. Um eine bestimmte Zahl dafür angeben zu können, setzen wir fest, wie weit wir die Ausdehnung gehen lassen wollen (vgl. § 126). Wir wählen also irgend ein bestimmtes großes Volum V und fassen die Arbeit ins Auge, welche das Gas verrichten kann, wenn es sich bis zu diesem Volum ausdehnt.

Indem wir jetzt den Ausdruck „verfügbare Energie“ durch den unter den festgesetzten Umständen gebräuchlicheren Ausdruck *freie Energie* ersetzen, können wir sagen:

Die freie Energie wird durch die Arbeit gemessen, die das Gas verrichten kann, wenn es sich isothermisch und in umkehrbarer Weise von dem Volum, welches es in Wirklichkeit einnimmt, bis auf das festgesetzte große Volum V ausdehnt.

Aus dieser Definition folgt ohne weiteres:

a) Die freie Energie ist um so größer, auf ein je kleineres Volum das Gas zusammengedrückt ist.

b) Dehnt sich das Gas wirklich aus, aber nicht bis auf das Volum V, so nimmt die freie Energie ab um einen Betrag gleich der verrichteten Arbeit.

c) Umgekehrt kostet Zusammendrückung des Gases eine Arbeit gleich der Zunahme der freien Energie.

Daß die freie Energie etwas anderes ist als die in dem Gas vorhandene Energie, erkennt man sofort, wenn man bedenkt, daß diese letztere, solange die Temperatur unverändert bleibt, bei jedem Volum gleichgroß ist (§ 229) und daß also die Arbeit bei einer isothermischen Ausdehnung auf Kosten des Wärmereservoirs verrichtet wird. Gleichwohl spricht man von der freien Energie *des Gases*, womit man jedoch weiter nichts sagen will, als daß die Möglichkeit, bei einem gegebenen Reservoir eine Arbeit zu verrichten, der Anwesenheit des Gases zu verdanken ist, welches sich mehr oder weniger weit ausdehnen kann.

Von anderen Körpern oder Systemen von Körpern gilt dasselbe wie von der hier betrachteten Gasmasse. Wir nehmen wieder an, daß die Temperatur durch ein Wärmereservoir konstant gehalten wird und beschränken uns auf umkehrbare Veränderungen, bei denen eine Reihe von Gleichgewichtszuständen durchlaufen wird. *Kann nun das System beim Übergang aus dem Zustand S, in welchem wir es betrachten, in einen gewissen „Nullzustand“ N eine Arbeit ψ verrichten, so sagen wir, daß es in dem Zustand S eine freie Energie ψ hat.* Verrichtet es wirklich beim Übergang aus dem Zustand S in einen anderen Zustand S' eine gewisse Arbeit, so hat die freie Energie um einen dieser Arbeit gleichen Betrag abgenommen. Dagegen entspricht

jeder Arbeit, die wir auf das System tun, einer dieser Arbeit gleiche Zunahme der freien Energie.

In folgender Weise können wir die gegebene Definition erläutern und die beiden letzten Sätze beweisen.

Wir wollen annehmen, daß ein System auf zwei verschiedenen Wegen (isothermisch und umkehrbar) aus dem Zustand S in den Zustand S' übergehen kann und daß es auf dem einen Weg eine Arbeit A_1 und auf dem anderen Weg eine Arbeit A_2 verrichtet. Man kann das System auf dem ersteren Weg aus dem Zustand S in den Zustand S' übergehen lassen und es auf dem zweiten Weg in den Zustand S zurückbringen. Die Arbeit ist dann $A_1 - A_2$. Wir wissen aber (§ 245), daß die Arbeit bei einem isothermischen umkehrbaren Kreisprozeß gleich Null ist; folglich ist $A_1 = A_2$, d. h. die Arbeit ist nur abhängig vom Anfangszustand und vom Endzustand.

Weil dies so ist, kann man die freie Energie in einem Zustand S durch die Arbeit messen, welche daß System beim Übergang in den Nullzustand N verrichten kann, ohne daß man anzugeben braucht, auf welchem Wege der Übergang stattfinden soll.

Betrachten wir ferner zwei Zustände S und S', denen die Werte ψ und ψ' der freien Energie entsprechen. Wollen wir wissen, welche Arbeit das System beim Übergang von S nach S' verrichtet, so können wir diesen Übergang auf einem beliebigen Wege stattfinden lassen. Wir stellen uns vor, daß das System erst in den Nullzustand N und dann in den Endzustand S' gebracht wird. Beim Übergang von S nach N verrichtet es eine Arbeit ψ, beim Übergang von N nach S' eine Arbeit $-\psi'$; also ist bei jedem Übergang von S nach S' die Arbeit $A = \psi - \psi'$. Dies Resultat gilt auch, wenn $\psi' > \psi$ und A negativ ist. Dann können wir auch sagen, daß die von uns auf das System getane Arbeit $-A$ gleich der Zunahme der freien Energie ist.

Da wir die kinetische Energie, die der Bewegung eines Körpers im ganzen oder der sichtbaren Teile desselben zu verdanken ist, vollständig benutzen können, und ebenso die potentielle Energie, welche Kräften wie die Schwerkraft entspricht, *wollen wir diese beiden Formen von Energie zu der freien Energie rechnen.* Die freie Energie besteht also im allgemeinen aus drei Teilen, den beiden zuletzt genannten und der freien Energie, die der Körper haben würde, wenn er ohne sichtbare Bewegung und frei von den genannten Kräften sich in demselben Zustand befände, in dem er sich tatsächlich befindet.

§ 247. **Veränderungen der freien Energie bei umkehrbaren und nicht umkehrbaren Erscheinungen.** a) Wir betrachten als Beispiel einen festen elastischen Körper, und zwar, um

einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, einen Stab (Fig. 124, S. 250), der mit dem einen Ende festgeklemmt ist. Vom Gewicht sehen wir ab und nehmen an, daß ein Wärmereservoir (z. B. die umgebende Luft) dafür sorgt, daß die Temperatur konstant bleibt. Wir denken uns den Stab zuerst in dem Zustand, den er annimmt, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn wirken, und den wir den *natürlichen Zustand* nennen wollen; sodann bringen wir durch eine am freien Ende senkrecht zur Länge wirkende Kraft eine Biegung hervor. Dadurch, daß wir nicht plötzlich eine große Kraft ausüben, sondern mit einer sehr kleinen Kraft beginnen, die wir dann nach und nach zunehmen lassen, versichern wir uns, daß sich der Stab in jedem Augenblick in einem Gleichgewichtszustand befindet, d. h. in einem Zustand, der unter dem Einfluß der in dem betreffenden Augenblick wirkenden Kraft dauernd bestehen könnte, so daß die Deformation auf umkehrbare Weise zustande kommt.

Zum Schluß haben wir eine gewisse Arbeit ψ getan und eine ebensogroße Arbeit kann der Stab verrichten, wenn er langsam in den natürlichen Zustand zurückkehrt. Wählen wir diesen letzteren als Nullzustand (§ 246), so müssen wir dem gebogenen Stab eine freie Energie ψ zuschreiben. Zur Unterscheidung können wir diese *die freie Energie der Deformation* nennen.

b) Heben wir die Kraft, welche die Biegung hervorgebracht hat, plötzlich auf, so schwingt der Körper um die natürliche Lage hin und her. Bei gänzlicher Abwesenheit von Widerständen hört diese Bewegung niemals auf und *bleibt im Laufe derselben die gesamte freie Energie unverändert.* In dem Augenblicke, in welchem der natürliche Zustand erreicht ist, ist allerdings die freie Energie der Deformation verschwunden, aber der Stab hat dann infolge seiner (sichtbaren) Bewegung eine kinetische Energie, also eine andere Form von freier Energie bekommen, deren Betrag, wie man beweisen kann, gleich der verlorenen freien Energie der Deformation ist.

Um dies zu beweisen, stellen wir uns den folgenden Kreisprozeß vor. Nachdem der Stab in der angegebenen Weise in den natürlichen Zustand gekommen ist und die kinetische Energie E bekommen hat, entziehen wir ihm diese plötzlich, indem wir ihn die Arbeit E verrichten

lassen. Sodann bringen wir den Körper langsam durch eine allmählich zunehmende Kraft in den deformierten Zustand zurück, wobei wir eine Arbeit ψ verrichten und der Stab also eine Arbeit $-\psi$ tut. Da nun ein isothermischer Kreisprozeß vollendet ist und alles auch in entgegengesetzter Richtung hätte stattfinden können, muß die gesamte Arbeit gleich Null sein. Hieraus folgt: $E - \psi = 0$, $E = \psi$.

c) Zur weiteren Erläuterung bemerken wir noch das Folgende: Wenn man von allen Wärmeerscheinungen absehen dürfte (so daß auch von einem Wärmereservoir keine Rede sein könnte) und man sich vorstellen könnte, daß die Teilchen des Stabes, wenn dieser im Ganzen betrachtet in Ruhe ist, feste Lagen haben, bei denen die anziehenden und abstoßenden Kräfte, die sie durch Vermittlung eines Mediums aufeinander ausüben, mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind, so würde man sagen können, daß der gebogene Stab eine gewisse *potentielle Energie* hat und daß bei den Schwingungen ein abwechselnder Übergang dieser potentiellen Energie in kinetische Energie und umgekehrt stattfindet. Wie bereits in § 144 bemerkt wurde, ist diese Auffassung nicht ganz richtig, wenn sie vielleicht auch bei manchen festen Körpern nicht viel von der Wahrheit abweicht. Es ist deshalb sicherer, wenn wir uns in den Mechanismus der Erscheinungen nicht vertiefen und einfach von der *Energie eines deformierten Körpers* sprechen. Dies haben wir am Anfang von Kapitel II getan. Da wir an jener Stelle noch nicht vom Übergang von Wärme von einem Körper zum anderen gesprochen hatten, wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Veränderungen adiabatisch stattfinden. Wenn dies der Fall ist, kann man wirklich sagen (§ 117), daß die Arbeit, die wir auf das Deformieren verwenden, gleich einer Vermehrung der Energie des Körpers ist und daß bei schwingenden Bewegungen die Summe der inneren Energie und der kinetischen Energie konstant bleibt.

Die Sätze über die freie Energie gelten in einem anderen Fall, nämlich, woran wir nochmals ausdrücklich erinnern, für isothermische Veränderungen. Wenn wir einen Stab bei konstanter Temperatur biegen, dürfen wir nicht sagen, daß die Energie, die im Körper anwesend ist, um einen Betrag gleich der von uns verrichteten Arbeit zunimmt; es kann nämlich etwas Wärme an das Reservoir abgegeben oder diesem ent-

zogen worden sein (in welchem Falle sich die Temperatur geändert haben würde, wenn die Veränderung adiabatisch stattgefunden hätte). Ebensowenig dürfen wir sagen, daß bei der schwingenden Bewegung die gesamte Energie *des Stabes selbst* unveränderlich bleibt; auch in diesem Fall kann Wärme von dem Stab nach dem Reservoir übergehen und umgekehrt. Indes können wir versichert sein, erstens von der Unveränderlichkeit der Energie, welche in diesem letzteren Fall der Stab und das Reservoir zusammen haben, und zweitens von der Richtigkeit der Regeln, die sich auf die freie Energie beziehen.

Dabei verdient besonders hervorgehoben zu werden, daß diese Regeln in der Form mit anderen übereinstimmen, die in der Mechanik vorkommen und welche die potentielle Energie betreffen. Ebenso wie diese letztere in der Gleichgewichtslage eines Pendels ein Minimum ist, wird unter allen Zuständen, in welche der betrachtete Stab durch Volumveränderung gebracht werden kann, der natürliche Zustand dadurch gekennzeichnet, *daß für diesen die freie Energie kleiner ist als für jeden anderen.* Daß die Unveränderlichkeit der gesamten Energie eines hin- und herschwingenden Pendels analog der Unveränderlichkeit der gesamten freien Energie eines schwingenden Stabes ist, leuchtet ohne weiteres ein; man würde übrigens auch beim Pendel (§ 246) von „freier Energie“ sprechen können.

d) Allein Sätze wie diejenigen, welche wir in Kapitel II für die Gesamtmenge der Energie kennen gelernt haben, gelten im allgemeinen nicht für die freie Energie. *Diese nimmt nicht nur ab, wenn das System eine Arbeit verrichtet, sondern in manchen Fällen auch, wenn es dies nicht tut.* Eine solche, man könnte sagen „nutzlose“ Verminderung der freien Energie („Vergeudung oder Dissipation von Energie“) wird bei vielen nicht umkehrbaren Erscheinungen beobachtet.

Als erstes Beispiel kann wieder der elastische Stab dienen. In Wirklichkeit werden die Schwingungen desselben durch Widerstände verschiedener Art gedämpft und geht also die anfänglich vorhandene freie Energie der Deformation verloren. Ebenso nimmt, jedesmal wenn sichtbare Bewegungen durch Reibung vernichtet werden, die freie Energie ab, weil die ursprüngliche kinetische Energie, welche wir dazu rechnen müssen,

verschwindet. Auch mit der in § 246 betrachteten Gasmasse kann ein Versuch ausgeführt werden, bei welchem die freie Energie kleiner wird, ohne daß eine Arbeit verrichtet wird. Dies ist der Fall, wenn das Gas in einen luftleeren Raum eindringt, wobei die Temperatur, wie wir wissen (§ 229) unverändert bleibt, so daß wir die freie Energie vor und nach der Ausdehnung miteinander vergleichen können. Nach dem Versuch ist das Gas weniger imstande, durch eine isothermische und umkehrbare Ausdehnung auf das Volum V (§ 246) eine Arbeit zu verrichten als ursprünglich. Daß hierin kein Widerspruch mit dem Gesetz der Erhaltung der Energie liegt, ist leicht einzusehen: die gesamte Energie eines Systems von Körpern kann unverändert bleiben und doch sehr gut für uns weniger zugänglich werden.

Das Bestreben der freien Energie, kleiner zu werden, zeigt sich bei vielen Erscheinungen, auf die wir hier nicht näher eingehen können, unter anderem auch dadurch, daß, wenn ein Körper eine Arbeit verrichtet, die freie Energie oft mehr abnimmt, als dieser Arbeit entspricht. *Wird weder durch noch* [illegible] *ist die Regel, daß bei nicht um-* [illegible] *bei denjenigen, durch welche ein* [illegible] *wenn sie bei konstanter* [illegible] *abnimmt. Der Gleichgewichts-* [illegible] ein Satz, der bei Betrachtungen [illegible] Gleichgewichte vielfach angewendet wird.

Zum Schluß [illegible] Wort [illegible] Bezeichnungen, welche wir von der [illegible] In dieser war ausdrücklich [illegible] Arbeit [illegible] das System verrichten kann, wenn es [illegible] wirklich bestehenden [illegible] Wort [illegible] wenn der [illegible] nicht diese [illegible] sich auf das [illegible] über einen [illegible] würde [illegible]

Der [illegible] Veränderungen gesprochen wurde, [illegible] gegebenen Te-

finition nur für Zustände, in denen der Körper dieselbe Temperatur hat, den Wert der freien Energie vergleichen können (siehe jedoch § 253, b).

§ 248. **Carnotsche Kreisprozesse.** Wir kehren jetzt zu Kreisprozessen zurück, bei denen der arbeitende Körper zwei verschiedene Temperaturen annimmt. *Nicht nur bei einem Gas, sondern auch bei anderen Körpern kann ein solcher Kreisprozeß aus zwei isothermischen und zwei adiabatischen Veränderungen zusammengesetzt werden;* wenn dies der Fall ist, so spricht man von einem Kreisprozeß von Carnot, weil dieser Physiker zuerst (1824) aus der Betrachtung eines solchen Zyklus von Veränderungen wichtige Schlüsse gezogen hat.

Wir können uns z. B. vorstellen, daß ein vertikal aufgehängter Metalldraht, auf den eine spannende Kraft wirkt, die man regulieren kann, zuerst isothermisch ausgedehnt wird, daß dann die Ausdehnung adiabatisch fortgesetzt wird (wobei sich die Temperatur ändert), daß hierauf eine isothermische Zusammenziehung folgt und daß endlich durch eine adiabatische Zusammenziehung wieder der ursprüngliche Zustand erreicht wird. Hierbei kann zum Schluß eine gewisse Arbeit verrichtet worden sein, und man würde dieselbe wirklich benutzen können, indem man die Bewegung des unteren Endes auf ein Schwungrad überträgt und auf die eine oder andere Weise in geeigneten Augenblicken den Draht automatisch mit den Wärmereservoiren in Verbindung bringt oder von denselben trennt.

Man würde dann eine Vorrichtung haben, die ebensogut wie eine Dampfmaschine eine kalorische Maschine heißen könnte, und ähnliche Maschinen mit Carnotschen Kreisprozessen können auch für allerlei andere arbeitende Körper ersonnen werden.

Wir wollen die beiden Wärmereservoire R_1 und R_2 und die *absoluten* Temperaturen derselben T_1 und T_2 nennen, und zwar sei $T_1 > T_2$.

Ferner nehmen wir an, daß die Veränderungen sehr langsam vor sich gehen, und daß der arbeitende Körper erst dann mit einem Wärmereservoir in Berührung gebracht wird, wenn er durch die vorausgegangene adiabatische Änderung die Temperatur dieses Reservoirs angenommen hat. Der Kreisprozeß kann dann sowohl in der einen als auch in der anderen Richtung durchlaufen werden.

Bei einer dieser Richtungen — wir wollen sie die *erste*

nennen — liefert der Kreisprozeß eine gewisse *positive* mechanische Arbeit A; man hat gefunden, daß dabei der Körper immer eine Wärmemenge Q_1 von dem Reservoir R_1 von der höheren Temperatur aufnimmt und eine Menge Q_2 an R_2 abgibt. Natürlich ist $Q_1 > Q_2$; der Unterschied $Q_1 - Q_2$ entspricht nämlich der Arbeit. Wir können füglich sagen, daß, während die Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ verbraucht worden ist, um Arbeit zu verrichten, die Menge Q_2 vom Reservoir R_1 nach dem Reservoir R_2 übertragen worden ist. Also:

Es ist unmöglich, durch einen Carnotschen Kreisprozeß Wärme, die aus einem Reservoir von hoher Temperatur entnommen wird, vollständig in mechanische Energie umzusetzen; ein Teil dieser Wärmemenge wird als Wärme wiedergefunden, und zwar in einem Körper, nämlich R_2, von niedrigerer Temperatur.

Der Bruch

$$m = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

welcher angibt, welcher Teil der dem Reservoir R_1 entzogenen Wärme zum Verrichten von Arbeit verbraucht wird, nennen wir den *Wirkungsgrad* des Kreisprozesses.

Die Zahl

$$n = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{m} - 1$$

gibt an, wieviel Kalorien von R_1 nach R_2 übergeführt werden gegen eine Kalorie, die für mechanische Arbeit dient.

Wird der Kreisprozeß in umgekehrter Richtung, also in der zweiten Richtung durchlaufen, so ist die Arbeit des wirkenden Körpers negativ, nämlich $-A$, mit anderen Worten, die äußeren Kräfte verrichten eine Arbeit $+A$. Dem Reservoir R_2 wird jetzt eine Wärmemenge Q_2 entzogen und dem Reservoir R_1 eine Menge Q_1 zugeführt, die größer als Q_2 ist. Also: *Es ist möglich, mit einem Carnotschen Kreisprozeß in der „zweiten" Richtung eine Wärmemenge Q_2 von dem kalten Reservoir nach dem warmen zu bringen; dazu müssen aber äußere Kräfte eine positive Arbeit verrichten. Für die Energie, welche dabei außerhalb des wirkenden Körpers verschwindet, tritt Wärme auf, nämlich $Q_1 - Q_2$, und zwar wird diese Wärme nebst der übergeführten in dem Reservoir von hoher Temperatur gefunden.*

Ebenso wie wir uns eine kalorische Maschine vorstellen önnen, in welcher der arbeitende Körper einen Carnotschen reisprozeß in der ersten Richtung ausführt, können wir uns ıch eine solche Maschine denken, in welcher ein Kreisprozeß der zweiten Richtung stattfindet. Während aber in der sten Maschine die Drehung des Schwungrades durch die beit des wirkenden Körpers beschleunigt wird, verliert in r zweiten Maschine das Schwungrad Energie und muß also rch äußere Kräfte in Bewegung gehalten werden.

Wir bemerken noch, daß man jede wirklich ausgeführte lorische Maschine nach Anbringung einiger Abänderungen entgegengesetzter Richtung als gewöhnlich laufen lassen nnte. Man kann es z. B. so einrichten, daß bei der Dampfschine von Fig. 212 (S. 377) der Kolben nach oben geht, nn der Zylinder mit dem Kondensator Q, und nach unten, nn er mit dem Dampfkessel P verbunden ist. Die Maschine dann eine *Pumpe* geworden, mit der man Wasserdampf s dem Kondensator saugt und im Kessel verdichtet.

Hierbei wird jedoch die Wirkung nicht *vollkommen* umkehrt, denn es kommen, wie man leicht einsehen wird, nicht hr ganz dieselben Zustände vor. Es hängt dies damit zummen, daß in der in Fig. 212 angedeuteten Maschine nicht in lem Augenblick ein Gleichgewichtszustand besteht. Wenn z. B. r mit Dampf von hoher Spannung gefüllte Zylinder C mit dem ndensator, welcher Dampf von geringerer Spannung enthält, Verbindung kommt, so ist der Dampf nicht im Gleichgewicht.

Die Carnotschen Kreisprozesse dagegen sind vollkommen ıkehrbar.

§ 249. **Größe des Wirkungsgrades.** *Zwei Carnotsche eisprozesse mit verschiedenen arbeitenden Körpern, aber mit derben hohen und niedrigen Temperatur haben denselben Wirkungsgrad.*

Man kann dies aus dem folgenden Prinzip ableiten, welches n Clausius (1850) zum Ausgangspunkt seiner Betrachtungen er die mechanische Wärmetheorie (Thermodynamik) genommen ırde.

Es ist unmöglich, daß Wärme von einem Körper von niedrigerer mperatur auf einen Körper von höherer Temperatur übergeht, ohne ß gleichzeitig noch andere Veränderungen stattfinden.

Aus diesem Prinzip wird der obengenannte Satz in folgender Weise abgeleitet:

Wir nehmen an, daß bei zwei Carnotschen Kreisprozessen mit den Temperaturen T_1 und T_2 der Wirkungsgrad verschiedene Werte m_1 und m_2 hat. Dann wird auch die Zahl n (§ 248) verschiedene Werte n_1 und n_2 haben. Gesetzt, es sei $n_2 > n_1$. Wir denken uns nun, in einer kalorischen Maschine finde der erste Kreisprozeß in der ersten Richtung und in einer zweiten Maschine der zweite Kreislauf in der zweiten Richtung statt; die beiden Maschinen sollen ein gemeinsames Schwungrad haben und mit denselben Wärmereservoiren R_1 und R_2 versehen sein. Die Energie des Schwungrades wird dann durch die erste Maschine vergrößert und durch die zweite verkleinert. Wir können die Mengen der arbeitenden Körper so wählen, daß die eine Maschine gerade so viel Arbeit verrichtet als für die Bewegung der anderen erfordert wird; dann kann die eine Maschine gerade die andere treiben, und alles zusammengenommen wird weder Wärme in mechanische Energie umgesetzt, noch umgekehrt.

Wenn nun in der ersten Maschine a Kalorien, die aus R_1 entnommen werden, verbraucht werden, so bringt die zweite ebensoviel Wärme in dies Reservoir zurück. Aber bei dem ersten Kreisprozeß gehen außerdem $n_1 a$ Kalorien von R_1 nach R_2, und bei dem zweiten $n_2 a$ Kalorien von R_2 nach R_1 über. Da $n_2 > n_1$ ist, würde schließlich eine gewisse Wärmemenge, nämlich $(n_2 - n_1) a$ Kalorien, von dem kalten nach dem warmen Reservoir übergegangen sein, was dem Clausiusschen Prinzip widerspricht.

Durch eine ähnliche Schlußfolgerung, bei der man jedoch den ersten Kreisprozeß in der zweiten und den anderen in der ersten Richtung stattfinden lassen muß, beweist man, daß n_2 nicht kleiner als n_1 sein kann. Folglich muß $n_1 = n_2$ und also auch $m_1 = m_2$ sein.

Man kann nun aus den Eigenschaften der Gase ableiten, daß bei einem Carnotschen Kreisprozeß mit einem Gas, welches die im fünften Kapitel behandelten Eigenschaften hat, der Wirkungsgrad den Wert

$$m = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hat, wenn T_1 und T_2 die absoluten Temperaturen sind. Daher hat auch für jeden anderen Carnotschen Kreisprozeß, einerlei welcher Körper benutzt wird, der Wirkungsgrad diesen Wert. Hieraus folgt:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

oder

$$Q_1 : Q_2 = T_1 : T_2 \quad , \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

eine Gleichung, die zu wichtigen Schlußfolgerungen Veranlassung gegeben hat.

Um die Formel (1) für ein Gas abzuleiten, wollen wir die Proportion (2) beweisen. Zu diesem Zwecke beachten wir, daß bei einer isothermischen Ausdehnung die innere Energie sich nicht ändert (§ 229) und daher die aufgenommene Wärme der verrichteten Arbeit äquivalent ist. Wenn also $ABCD$ (Fig. 213) den Kreisprozeß vorstellt, so müssen wir beweisen:

$$\text{Fläche } ABba : \text{Fläche } DCcd = T_1 : T_2 \ldots \ldots \quad (3)$$

Es sei EF eine isothermische Linie, die in unendlich kleinem Abstand von AB gezogen ist und also einer Temperatur T' entspricht, die unendlich wenig niedriger als T_1 ist. Wir ziehen zwischen AB und EF eine beliebige adiabatische Linie GH und vergleichen die Volume und die Drucke in den Zuständen G und H. Wie wir wissen, ist das Produkt aus dem Druck und dem Volum proportional der absoluten Temperatur und kann also durch RT dargestellt werden, wenn R eine Konstante ist. Wenn wir dies auf die Zustände G und H anwenden, so finden wir

$$Og \times gG = RT_1 \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und

$$Oh \times hH = RT' \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Ferner beachten wir, daß die Arbeit des Gases bei der adiabatischen Ausdehnung GH gleich der Verminderung der inneren Energie ist. Da nun die innere Energie auf der ganzen Linie AB denselben Wert hat, und ebenso auf der Linie EF, so muß die betreffende Arbeit für jede adiabatische Linie zwischen AB und EF denselben Wert haben. Diesen Wert wollen wir mit ε bezeichnen. Dann ist also, da für den Inhalt des Streifens $gGHh$ mit der unendlich kleinen Basis gh das Produkt aus dieser Basis und gG genommen werden kann,

$$gh \times gG = \varepsilon \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Aus (4) und (6) folgt $gh/Og = \varepsilon/(RT_1)$, und also für das Verhältnis Oh/Og der Volume in H und G ein Wert

$$\alpha = 1 + \frac{\varepsilon}{RT_1},$$

welcher unabhängig von der Lage G auf der Linie AB ist. Ferner folgt aus (4) und (5), wenn man das Verhältnis der Drucke hH/gG mit β bezeichnet,

$$\alpha\beta = \frac{T'}{T_1},$$

so daß auch β unabhängig von der Lage von G sein muß. Man kann also die Figur $aABb$ in $eEFf$ übergehen lassen, indem man alle Abszissen im Verhältnis von 1 zu α, und alle Ordinaten im Verhältnis von 1 zu β verändert. Die Fläche ändert sich dann im Verhältnis von 1 zu $\alpha\beta$, woraus folgt:

$$\frac{\text{Fläche } EFfe}{\text{Fläche } ABba} = \frac{T'}{T_1}.$$

Stellt man sich nun vor, daß zwischen AB und DC unendlich viele isothermische Linien eingeschaltet werden, die Temperaturen entsprechen, welche mit unendlich kleinen Differenzen abnehmen, und wendet man auf je zwei aufeinander folgende Linien das soeben erhaltene Resultat an, so kommt man leicht zu der Proportion 3.

§ 251. **Wirkungsgrad bei einem nicht umkehrbaren Kreisprozeß.** Wir betrachten jetzt einen Kreisprozeß mit den Wärmereservoiren R_1 und R_2, welcher *nicht* umkehrbar ist, z. B. den Kreisprozeß, welcher in der Dampfmaschine von Fig. 212 stattfindet. Wir nehmen an, daß dabei Wärme für mechanische Arbeit gebraucht wird und [illegible] den Wirkungsgrad mit [illegible] $\eta_1 = 1$ [illegible] $- 1$. Wir können nun diesen Kreisprozeß [illegible] in der am Anfang des vorigen Paragraphen [illegible] Weise mit einem umkehrbaren Kreisprozeß [illegible] Wirkungsgrad wir mit η_2 bezeichnen wollen, während wir $\eta_2 = 1$ [illegible] $- 1$ setzen. Durch die im vorigen Paragraphen benutzte Schlußfolgerung können wir dann beweisen, daß η_1 nicht kleiner als η_2 und also η_1 nicht größer als η_2 sein kann. [illegible] kleiner als η_2, also kleiner als [illegible] ausgeschlossen. Und in der Tat lehrt [illegible]

[illegible]

[illegible] vielleicht [illegible] Dampfmaschine [illegible] höchsten [illegible] Wirkungsgrad [illegible] nicht die Temperatur [illegible] Wassers im Dampfkessel [illegible] bestimmt die [illegible] durch ein Wärmereservoir [illegible] Temperatur [illegible]

setzen können, wenn dieses nur hinreichende Wärmekapazität besäße und schnell genug Wärme an das Wasser abgeben könnte.

Was man zu tun hat, um einen möglichst hohen Wirkungsgrad zu erzielen, ist nach dem vorhergehenden klar. *Erstens muß man die Maschine so viel als möglich der Umkehrbarkeit annähern, und zweitens muß man T_1 möglichst hoch und T_2 möglichst niedrig zu machen suchen* (für den Wirkungsgrad kann nämlich geschrieben werden: $1 - T_2 / T_1$. Welchen arbeitenden Körper man benutzen will, hängt von verschiedenen Erwägungen ab, z. B. von der, welcher Körper am besten eine Erhitzung auf hohe Temperatur gestattet. Aber, hiervon abgesehen, liegen keine theoretischen Gründe vor, weshalb man dem einen Körper den Vorzug vor einem anderen geben sollte.

§ 251. **Beliebiger Kreisprozeß.** Es gibt einen wichtigen Satz, der für jeden Kreisprozeß gilt, wenn er nur der Bedingung genügt, daß der arbeitende Körper, den wir M nennen wollen, in jedem Augenblick in allen seinen Teilen dieselbe Temperatur T hat. Diese Temperatur kann sich in der einen oder anderen Weise, vielleicht fortwährend ändern, und verschiedenartige Zustände, die durchaus keine Gleichgewichtszustände zu sein brauchen, können aufeinander folgen. Im allgemeinen werden während der Veränderungen gewisse Wärmemengen aufgenommen oder abgegeben werden; wir wollen aufgenommene Wärme mit dem positiven Vorzeichen und abgegebene Wärme mit dem negativen Vorzeichen andeuten.

Wir teilen den Kreisprozeß in unendlich kleine Schritte und nennen für einen derselben Q die, natürlich unendlich kleine, aufgenommene Wärmemenge. Der betreffende Satz besagt dann, *daß die algebraische Summe*

$$\Sigma \frac{Q}{T}, \qquad \qquad (7)$$

über den ganzen Kreisprozeß erstreckt, nicht positiv sein kann.

Um dies zu beweisen, wollen wir jede Wärmemenge, die M aufnehmen muß, ein und demselben Reservoir K entnehmen, welches eine gewisse Temperatur ϑ hat, und jede Wärmemenge, die M abgeben muß, diesem Reservoir zuführen. Wir können dies auf umkehrbarem Wege tun, wenn wir jedesmal von einem Hilfskörper, z. B. einer Gasmasse Gebrauch machen, die einen Carnotschen Kreisprozeß durchläuft, bei welchem der Körper M und das Reservoir K die Rolle spielen, die wir früher (§ 248) den Reservoiren R_1 und R_2 übertrugen. Um dann dem Körper M, während er die Temperatur T hat, die positive oder negative Wärmemenge Q zu geben, muß aus K die Menge

$$\vartheta \frac{Q}{T}$$

entnommen werden. Wenn also der ganze Kreisprozeß durchlaufen ist, so beträgt die aus K verschwundene Wärme

$$\vartheta \Sigma \frac{Q}{T}.$$

Nun ist schließlich weder an dem Körper M, noch an der Gasmasse, womit man jedesmal gearbeitet hat, etwas verändert; wäre also (7) positiv, so würde die ganze Operation keine andere Folge haben, als daß aus K eine gewisse Wärmemenge verschwunden und ganz in mechanische Energie umgesetzt wäre. Man hat aber allen Grund, dies für unmöglich zu halten.

In dem besonderen Fall, daß der Kreisprozeß des Körpers M umkehrbar ist, kann der Ausdruck (7) auch keinen negativen Wert haben. Kehrt man nämlich alle Veränderungen um, so ändert jede Wärmemenge das Vorzeichen und würde also die Summe $\Sigma(Q/T)$, wenn sie erst negativ war, einen positiven Wert bekommen, was aber, wie bewiesen wurde, unmöglich ist. Es bleibt also nichts anderes übrig, als daß für umkehrbare Kreisprozesse

$$\Sigma \frac{Q}{T} = 0$$

ist. Nennen wir der Kürze halber eine Wärmemenge, nachdem sie durch die absolute Temperatur des Körpers, von dem sie aufgenommen oder abgegeben wird, dividiert ist, eine *reduzierte* Wärmemenge, so lautet unser Resultat: *Bei jedem umkehrbaren Kreisprozeß ist die algebraische Summe der* [illegible] *Wärmemengen gleich Null.*

[illegible] *dagegen kann diese Summe* [illegible] *tatsächlich auch so gut* [illegible] auf die wir hier nicht näher eingehen [illegible].

§ [illegible] **Entropie.** [illegible] wenn man die Zustandsänderungen eines Körpers [illegible] Zuständen, die er annehmen kann [illegible] zu vergleichen. *Lassen wir* [illegible] *Weg in* [illegible] *die Summe der* [illegible] *Übergang* [illegible] *vorgenommen.* Man kann [illegible] Wasserdampf von [illegible] und dann [illegible] indem man erst [illegible] den Dampf [illegible] werden und [illegible] dieser Weg [illegible] und Σ [illegible]

[illegible] werden. Es sei [illegible] für den einen Weg [illegible] Summe [illegible] Körper aus dem [illegible]

ersten Weg aus dem Zustand N in A übergehen läßt und ihn auf dem anderen Weg in den Anfangszustand zurückbringt, bekommt man einen Kreisprozeß von umkehrbaren Veränderungen, für den $\Sigma(Q/T) = 0$ sein muß. Aber für den ersten Teil dieses Kreisprozesses hat $\Sigma(Q/T)$ den Wert η, für den zweiten den Wert $-\eta'$. Daher muß $\eta - \eta' = 0$ oder $\eta = \eta'$ sein.

Um die Bedeutung dieses Resultates klar zu erkennen, stellen wir uns für einen Augenblick auf den Standpunkt der früheren Theorie, nach welcher die Wärme ein Stoff sein sollte. Als man von dieser Auffassung ausging, mußte man natürlich annehmen, daß ein Körper im Zustand A eine bestimmte Menge Wärme mehr enthält als im Zustand N, daß also auch, wie man den Übergang auch stattfinden läßt, Zufuhr einer bestimmten Menge Wärme erfordert wird. Dies ist nun, da Wärme verbraucht werden oder entstehen kann, *nicht* richtig, aber wohl kann man, wenn man sich auf *umkehrbare* Übergänge beschränkt, von der Summe der *reduzierten* Wärmemengen sagen, was früher von der Summe der Wärmemengen selbst gesagt wurde.

Die Summe der reduzierten Wärmemengen, welche man dem Körper zuführen muß, um ihn in den Zustand A zu bringen, wird die *Entropie* in diesem Zustand genannt. Aus dieser Definition kann das Folgende abgeleitet werden:

a) Bei einer beliebigen umkehrbaren Veränderung (kein „Kreisprozeß") ist die Zunahme der Entropie gleich der Summe der reduzierten zugeführten Wärmemengen.

b) Die Entropie ändert sich also nicht bei einer umkehrbaren adiabatischen Ausdehnung oder Zusammendrückung.

c) Da eine isothermische Ausdehnung eines Gases Zufuhr von Wärme erfordert, so ist bei einer bestimmten Temperatur die Entropie des Gases um so größer, je größer das Volum ist.

§ 253. **Regeln für nicht umkehrbare Veränderungen.** Wir wollen annehmen, ein System gehe durch irgend eine Reihe von Veränderungen, die nicht umkehrbar sind und die wir mit P bezeichnen wollen, aus dem Zustand A in den Zustand B über, und es sei

$$\Sigma_P \frac{Q}{T}$$

die Summe der reduzierten zugeführten Wärmemengen. Wir können uns vorstellen, daß das System durch eine neue, und zwar eine umkehrbare Reihe von Veränderungen, die wir mit P' bezeichnen wollen, aus dem Zustand B in den Zustand A zurückgebracht wird; wir bekommen so einen nicht umkehrbaren Kreisprozess. Für die Veränderungen P' ist nun die Summe der reduzierten zugeführten Wärmemengen (§ 252, a)

$$\eta_a - \eta_b,$$

wenn η_a die Entropie im Zustand A und η_b die Entropie im Zustand B ist. Für den Kreisprozeß ist also die mehrmals genannte Summe

$$\Sigma_P \frac{Q}{T} + \eta_a - \eta_b .$$

Dies muß nun einen negativen Wert haben, d. h.

$$\Sigma_p \frac{Q}{T} + \eta_a - \eta_b < 0\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

ein Satz, in welchem nur noch Größen vorkommen, die sich auf die nicht umkehrbaren Veränderungen P und auf den Anfangs- und Endzustand beziehen.

Wir wenden diesen Satz auf einige besondere Fälle an.

a) Wenn die Veränderungen P adiabatisch verlaufen, so verschwindet das erste Glied in (8) und ist also

$$\eta_a < \eta_b\,.$$

Bei allen nicht umkehrbaren Veränderungen, die ohne Aufnahme oder Abgabe von Wärme stattfinden, nimmt also die Entropie zu. Man kann diesen Satz auf die ganze materielle Welt als *ein* System betrachtet, anwenden, und kommt hierdurch zu einem kurzen Ausdruck für die Grundidee dieses Kapitels, *daß in den Naturerscheinungen eine bestimmte Richtung vorherrscht.*

b) Wenn die Veränderungen P isothermisch stattfinden, kann man für das erste Glied in (8) schreiben

$$\frac{1}{T}\,\Sigma Q.$$

Es sei nun W die Arbeit, die der Körper verrichtet, ε_a die Energie im Zustand A, und ε_b die Energie im Zustand B. Dann ist nach dem Gesetz der Erhaltung der Energie, wenn wir die Wärmemengen in Arbeitseinheiten ausdrücken,

$$\Sigma Q = \varepsilon_b - \varepsilon_a + W\,,$$

so daß, wenn man mit der konstanten Zahl T multipliziert, die Ungleichung (8) übergeht in

$$(\varepsilon_b - T\eta_b) - (\varepsilon_a - T\eta_a) + W < 0\,. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Im Falle, daß die Veränderungen nicht nur isothermisch, sondern auch ohne äußere Arbeit stattfinden, ist also

$$\varepsilon_b - T\eta_b < \varepsilon_a - T\eta_a\,. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Man kann in jedem Zustand des Körpers die Energie ε, die Entropie η, und also auch die Funktion

$$\varepsilon - T\eta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

betrachten. Es zeigt sich nun, daß diese Funktion bei einer isothermischen nicht umkehrbaren Veränderung ohne äußere Arbeit abnimmt, also die Eigenschaft besitzt, die wir in § 247, d als eine Eigenschaft der freien Energie kennen lernten. In der Tat bleibt man in Übereinstimmung mit der früher gegebenen Festsetzung, wenn man (11) als die freie Energie definiert. Dies folgt daraus, daß man für eine umkehrbare Veränderung das Ungleichheitszeichen in (9) durch das Gleichheitszeichen ersetzen muß und daß also die von dem Körper verrichtete Arbeit W gleich der Verminderung der Größe $\varepsilon - T\eta$ ist.

Siebentes Kapitel.

Eigenschaften fester Körper.

§ 254. **Ausdehnung und Zusammendrückung fester Körper.** Während im dritten Kapitel von den Veränderungen, die die Größe und die Gestalt der festen Körper erleiden können, abgesehen wurde, wollen wir jetzt gerade diese Veränderungen besprechen. Dabei werden wir von den Vorstellungen der Molekulartheorie weniger Gebrauch machen als bei der Behandlung der gasförmigen Körper. Man kann sich vorstellen, daß ein fester Körper aus kleinen Teilchen zusammengesetzt ist, die unter dem Einfluß der Kräfte, die sie aufeinander ausüben, um bestimmte Gleichgewichtslagen hin- und hergehen, und zwar mit Geschwindigkeiten, die um so größer sind, je höher die Temperatur ist. Aber viel weiter als bis zu einem derartigen allgemeinen Bild der Erscheinungen hat man es noch nicht gebracht.

Die einfachste Formveränderung (*Deformation*), welche wir zu betrachten haben, ist die Längenvergrößerung (*Ausdehnung*) eines Stabes durch zwei gleiche Kräfte, die an den Enden in der Richtung der Länge wirken, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch eine Kraft, die an dem einen Ende wirkt, während das andere festgeklemmt ist. Wir wissen bereits, daß dann an jedem Querschnitt eine Spannung besteht, die gleich jeder dieser beiden Kräfte ist (§ 168, b). *Was ferner die Ausdehnung betrifft, so hat man gefunden, daß sie bei nicht zu großen Kräften diesen proportional ist;* außerdem hängt sie von der Länge und dem Querschnitt und von der Art des Stoffes ab. *Sie ist der Länge direkt und dem Querschnitt umgekehrt proportional,* wie sich durch eine einfache Schlußfolgerung beweisen läßt. Teilt

man nämlich einen Stab durch eine gedachte Ebene senkrecht zur Länge in zwei gleiche Teile, so ist wegen der Spannung an dem Querschnitt jede Hälfte ebensogroßen ausdehnenden Kräften unterworfen wie der ganze Stab, aber die Längenvermehrung jeder Hälfte ist halb so groß als die des ganzen Stabes.

Betrachtet man dagegen den Stab als aus zwei anderen zusammengesetzt, die einen halb so großen Querschnitt haben, so kann man sagen, daß jeder Teil der Hälfte der ausdehnenden Kraft ausgesetzt ist; die Dilatation wird daher halb so groß sein, als wenn eine dieser Hälften für sich allein durch die volle Kraft ausgedehnt würde.

Wenn P die ausdehnende Kraft, l die ursprüngliche Länge, s den Querschnitt und u die Längenvermehrung bedeutet, so können die mitgeteilten Gesetze in die Formel

$$u = C\frac{Pl}{s} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

zusammengefaßt werden, in welcher C für jede Substanz einen bestimmten Wert hat. Ist diese Konstante bekannt, so kann man für jeden Stab, der aus dem betreffenden Stoff besteht, die Ausdehnung durch eine gegebene Kraft berechnen.

Der reziproke Wert von C wird der *Elastizitätskoeffizient* (oder *Elastizitätsmodul*) genannt. Bezeichnet man diesen Koeffizienten mit E, so wird

$$u = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pl}{s} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

woraus folgt, daß für $s = 1$ und $u = l$, $P = E$ sein müßte. Hieraus ergibt sich die Definition: *Der Elastizitätskoeffizient ist die Zahl, welche die Kraft angibt, welche einen Stab von der Einheit des Querschnittes auf die doppelte Länge ausdehnen würde, wenn nämlich auch bei sehr großen Kräften zwischen diesen und der Ausdehnung dasselbe Verhältnis bestände, wie bei kleinen Kräften.*

Von dieser Definition aus kann man leicht wieder zu der Gleichung (2) kommen, und es ist klar, daß man E berechnen kann, wenn u, P, l und s gemessen sind.

In der Tabelle II am Ende des Buches findet man für einige Stoffe die Werte von E, in den Einheiten des C-G-S-Systems ausgedrückt.

Dieselbe Tabelle gibt auch in Dyn die Kraft an, welche

erforderlich ist, um einen Stab von 1 qcm Querschnitt zu zerreißen.

Die angegebenen Zahlen sind nur dazu bestimmt, annähernd das Verhalten der verschiedenen Stoffe anzugeben. Feste Körper können nämlich durch geeignete Bearbeitung in sehr verschiedene Zustände gebracht werden. Ein Stück Stahl z. B. wird, wenn man es glühend macht und dann plötzlich abkühlt, spröde und hart, d. h. schwer zu ritzen und zu feilen; durch langsame Abkühlung dagegen wird es biegsam und weich. Ähnliche Unterschiede bestehen bei anderen Körpern, *und man kann es als allgemeine Regel ansehen, daß die physikalischen Konstanten eines festen Stoffes mehr oder weniger von dem Zustand abhängen, in den er durch vorhergehende Bearbeitungen gebracht ist.*

Über die in diesem Paragraphen besprochene Formveränderung müssen wir übrigens noch bemerken, daß der Stab nur dann in allen seinen Teilen gleichmäßig deformiert wird, wenn die ausdehnende Kraft gleichmäßig über die Endflächen verteilt ist. Bei einem Stab, welcher im Vergleich zur Länge dünn ist, tut allerdings die Art und Weise, wie die Kräfte angebracht werden, wenig zur Sache, aber bei einem dicken und kurzen Zylinder werden Kräfte, die in den Mittelpunkten der Endflächen angreifen, eine ganz andere Wirkung haben als Kräfte, die über diese Flächen verteilt sind.

In der Voraussetzung, daß die Kräfte gleichmäßig verteilt sind, kann man P/s die *Spannung im Stabe pro Einheit des Querschnittes* nennen. Ferner ist u/l *die Ausdehnung pro Längeneinheit.* Nach Formel (2) *ist der Elastizitätskoeffizient das Verhältnis zwischen diesen beiden Größen.*

Die Formel kann auch dazu dienen, um die Zusammendrückung zu berechnen, die ein Stab durch zwei Kräfte an seinen Enden erleidet. Die Beobachtung hat nämlich gelehrt, *daß Kräfte, die einem Stab eine gewisse Verlängerung geben, eine ebensogroße Verkürzung bewirken, wenn ihre Richtung umgekehrt wird.*

§ 255. **Veränderung der Querdimensionen bei einem Stab, der in der Richtung der Länge ausgedehnt oder zusammengedrückt wird.** *Eine Ausdehnung in der Richtung der Länge ist mit einer Zusammenziehung (Kontraktion) in jeder Richtung senkrecht*

zur Länge verbunden, und umgekehrt, eine Zusammendrückung in der Richtung der Länge mit einer Ausdehnung senkrecht zu dieser. Dabei wird die Veränderung pro Längeneinheit, welche die Querdimensionen erleiden, gefunden, indem man die Änderung, ebenfalls pro Längeneinheit, der Länge des Körpers mit einem Bruch μ multipliziert, der für jeden Stoff einen bestimmten Wert hat. Bei den meisten Körpern liegt μ zwischen $^1/_4$ und $^1/_3$.

Ist also bei einem Stab die Länge durch eine ausdehnende Kraft $1 + \delta$ mal größer geworden, so werden die Querdimensionen im Verhältnis von 1 zu $1 - \mu\,\delta$ verändert. Das Volum wird $(1 + \delta)\,(1 - \mu\,\delta)^2$ mal größer, wofür man, wenn δ, wie gewöhnlich, sehr klein ist, $1 + (1 - 2\,\mu)\,\delta$ schreiben kann.

§ 256. **Gleichzeitige Zusammendrückung in verschiedenen Richtungen. Koeffizient der kubischen Zusammendrückbarkeit.** *Wenn ein Körper von beliebiger Form einem über die ganze Oberfläche gleichgroßen normalen Druck unterworfen wird, nehmen alle Dimensionen in demselben Verhältnis ab, so daß sich die Form nicht ändert.* Die Verkleinerung der Dimensionen sowie die Verkleinerung des Volums ist dem äußeren Druck proportional. *Die Zahl, welche die Veränderung der Volumeinheit bei einem äußeren Druck Eins ausdrückt, wird der Koeffizient der Zusammendrückbarkeit genannt.* Sie hängt in einfacher Weise mit der Verkleinerung der Dimensionen zusammen. Werden diese nämlich im Verhältnis von 1 zu $1 - \delta$ verändert, so ändert sich das Volum im Verhältnis von 1 zu $(1 - \delta)^3$ oder im Verhältnis von 1 zu $1 - 3\,\delta$.

Mit Hilfe theoretischer Betrachtungen kann man den **Koeffizienten** der Zusammendrückbarkeit aus den Größen E der vorhergehenden Paragraphen ableiten; der Ausdruck

$$\frac{3\,(1 - 2\,\mu)}{E}$$

mlich an, um wieviel die Volumeinheit durch einen Druck Dyn pro qcm kleiner wird.

m dies zu beweisen, betrachten wir ein rechtwinkliges Parallel- mit den Kanten a, b, c. Wir lassen auf die beiden Seitenflächen, senkrecht auf der Kante a stehen, einen äußeren Druck p_1 wirken, auf die Seitenflächen, senkrecht zu b einen Druck p_2 und auf dritte Paar Seitenflächen einen Druck p_3. Um die Form zu be-

stimmen, welche der Körper hierdurch annimmt, kann man von dem folgenden allgemeinen Satz Gebrauch machen.

Wenn auf einen Körper verschiedene Kräfte zugleich wirken, von denen jede für sich eine sehr kleine Deformation bewirkt, so ist die Verschiebung eines Punktes die Resultante (im Sinne von § 27) der Verschiebungen, die er durch jede der Kräfte einzeln bekommen würde. Die Verlängerung einer Linie in dem Körper ist die algebraische Summe der Änderungen dieser Linie, welche jede der verschiedenen Kräfte für sich allein hervorbringen würde. Nach §§ 254 und 255 würden nun durch den Druck p_1 pro Flächeneinheit die Kanten a, b und c zunehmen um

$$-\frac{p_1}{E}a, \qquad +\mu\frac{p_1}{E}b, \qquad +\mu\frac{p_1}{E}c,$$

durch den Druck p_2 um

$$+\mu\frac{p_2}{E}a, \qquad -\frac{p_2}{E}b, \qquad +\mu\frac{p_2}{E}c,$$

und durch den Druck p_3 um

$$+\mu\frac{p_3}{E}a, \qquad +\mu\frac{p_3}{E}b, \qquad -\frac{p_3}{E}c.$$

Wirken die drei Drucke zugleich, so sind die Kanten geworden

$$a - \frac{p_1 - \mu(p_2 + p_3)}{E}a, \qquad b - \frac{p_2 - \mu(p_3 + p_1)}{E}b, \text{ usw.}$$

Hieraus folgt, wenn man $p_2 = p_3 = p_1$ setzt, für den neuen Wert des Volums

$$abc\left[1 - \frac{3(1-2\mu)}{E}p_1\right],$$

woraus sich für den Koeffizienten der Zusammendrückbarkeit der oben angegebene Wert ergibt.

Auch eine Flüssigkeitsmasse kann unter dem Einfluß eines auf ihre Oberfläche wirkenden normalen Druckes im Gleichgewicht sein, und wir wissen bereits, *daß dann auch im Innern überall ein gleichgroßer Druck herrscht. Dasselbe ist nun der Fall bei einem festen Körper, der in allen Richtungen gleichmäßig zusammengedrückt wird.* Die Teile desselben, welche zu beiden Seiten einer beliebigen Ebene liegen, üben senkrecht zu dieser Ebene einen Druck aufeinander aus, dessen Größe pro Flächeneinheit gleich der des äußeren Druckes ist.

Man kann dies anwenden, um die Deformation einer Hohlkugel zu bestimmen, die an der Innenseite und an der Außenseite einem gleichgroßen Druck, z. B. vermittelst einer Gasmasse, ausgesetzt wird. Durch einen Druck, der nur an der Außenseite wirkt, wird natürlich das innere Volum verkleinert, und umgekehrt wird durch einen Druck, der nur an der

Innenseite wirkt, das Volum vergrößert. Diese Volumveränderungen können bei dünnwandigen Glaskugeln sehr bedeutend werden. Man könnte nun denken, daß sich das Volum nicht ändern würde, wenn an der Innenseite und an der Außenseite die gleichen Drucke p (pro Flächeneinheit) wirkten. Daß diese Meinung jedoch nicht richtig ist, ergibt sich in folgender Weise.

Es ist natürlich einerlei, in welcher Weise wir den Druck auf die Innenseite ausüben. In Gedanken können wir dies in der Weise ausführen, daß wir in den Hohlraum einen Kern von demselben Stoff anbringen, der so genau paßt, daß er mit der Wand ein einziges Ganzes bildet. Wird dann auf die Außenseite der Druck p ausgeübt, so entsteht derselbe auch überall im Inneren, und gegen die Wand wird wirklich an beiden Seiten gleichstark gedrückt. Alle Dimensionen nehmen nun aber in einem Verhältnis ab, welches aus dem Koeffizienten der Zusammendrückbarkeit berechnet werden kann, und man kommt zu dem Schluß:

Wenn eine Hohlkugel (oder ein Gefäß von beliebiger Form) an der Außenseite und an der Innenseite einem Druck p ausgesetzt ist, so wird das innere Volum um ebensoviel kleiner, als ein in den Hohlraum passender Kern aus demselben Stoff kleiner werden würde, wenn man auf diesen denselben Druck wirken ließe.

§ 257. **Biegung eines Stabes.** Der in § 168c besprochene und durch Fig. 124 dargestellte Stab erleidet eine Formveränderung, deren Eigentümlichkeiten wir jetzt leicht verstehen können. Teilen wir den Stab in Gedanken in eine große Anzahl von Fasern in der Richtung der Länge, so folgt ohne weiteres aus dem früher gesagten, daß die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden. Infolgedessen nimmt der Stab die in Fig. 216 dargestellte Form an. Unter der *Biegung* können wir dabei das vertikale Sinken des Mittelpunktes (Schwerpunktes) der freien Endfläche verstehen; wenn die Dimensionen des Querschnittes im Vergleich mit der Länge klein sind, so ist für alle Punkte der Endfläche das Sinken annähernd dasselbe.

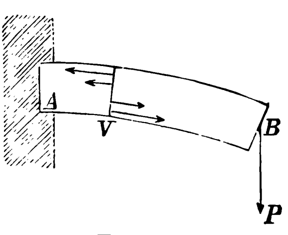


Fig. 216.

Natürlich ändert sich der Zustand in dem Stab allmählich von einem Punkt zum anderen. Werden daher die Fasern an der einen Seite ausgedehnt und an der anderen zusammengedrückt, so muß sich irgendwo in der Mitte des Stabes eine Schicht von Fasern finden, die anfangs in einer horizontalen Ebene liegen und die zwar gebogen werden, aber ihre Länge nicht ändern; außerdem werden die Ausdehnungen an der einen Seite und die Zusammendrückungen an der anderen Seite um so größer sein, je weiter die betreffenden Fasern von dieser Schicht entfernt sind. In jeder Faser wird nun eine Spannung oder ein Druck, senkrecht zum normalen Querschnitt, hervorgerufen, und auch diese Kräfte sind um so größer, je größer der Abstand von der erwähnten Schicht ist. In der Figur bedeuten die Pfeile die Kräfte, die von dem Teil AV des Stabes auf den Teil VB ausgeübt werden.

Vereinigt man alle Kräfte nach links und ebenso alle Kräfte nach rechts, so bekommt man die Resultanten, welche in Fig. 124 mit S und R bezeichnet sind. Der Abstand der Angriffspunkte dieser Kräfte ist offenbar etwas kleiner als die größte Dimension d des Stabes in vertikaler Richtung und kann also durch εd bezeichnet werden, wobei ε ein Bruch ist, dessen Wert sich durch höhere mathematische Betrachtungen ermitteln läßt. Wenn ε bekannt wäre, so wären auch die Kräfte S und R bekannt. Das Moment des aus diesen Kräften bestehenden Kräftepaares würde nämlich $\varepsilon d \times R$ sein, und da dies mit dem Kräftepaar (P, Q) in Fig. 124 im Gleichgewicht sein muß, so findet man, wenn man den Abstand des Querschnittes V vom Ende B mit x bezeichnet,

$$R = \frac{xP}{\varepsilon d}.$$

Aus diesem Resultat folgt, daß die Spannungen der Fasern um so grösser werden, je weiter man sich vom freien Ende des Stabes entfernt. Von A nach B nimmt die Ausdehnung an der Oberseite und die Zusammendrückung an der Unterseite fortwährend ab, und dasselbe gilt von der Krümmung der Fasern. Diese werden also nicht nach einem Kreisbogen gekrümmt.

Die Gestalt des Stabes und der Betrag der Biegung können durch theoretische Betrachtungen, auf die wir hier nicht eingehen können, bestimmt werden. Ist l die Länge, so wird bei

einem Stab von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius r die Biegung durch die Formel

$$s = \frac{4}{3}\frac{P}{E}\frac{l^3}{\pi r^4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

gegeben. Ist der Querschnitt ein Rechteck mit der vertikalen Seite d und der horizontalen Seite b, so wird

$$s = 4\frac{P}{E}\frac{l^3}{b d^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Der vielfach vorkommende Fall eines Stabes, der (Fig. 217) in zwei Punkten a und b unterstützt und in der Mitte mit einem Gewicht P belastet ist, kann auf den Fall von Fig. 124 und 216 zurückgeführt werden. Zunächst üben die über a und b hervorragenden Teile des Stabes, wenn sie nicht sehr lang sind, durch ihr Gewicht keinen merklichen Einfluß auf die Gestalt des Stückes ab aus. Es kommt also auf dasselbe hinaus, als ob der Stab bei a und b abgeschnitten wäre und hier auf ihn Kräfte $\frac{1}{2}P$ nach oben wirkten; die Gegenwirkung von jedem Stützpunkt muß nämlich $\frac{1}{2}P$ sein. Betrachtet man ferner einen Querschnitt V zwischen c und b, so muß der Teil links von diesem Querschnitt auf den Teil rechts zunächst mit einer Kraft $\frac{1}{2}P$ nach unten und außerdem mit einem Kräftepaar (R, S) wirken, welches mit dem Kräftepaar (R, S) in Fig. 124 übereinstimmt. Die Fasern sind hier an der Unterseite gestreckt und an der Oberseite zusammengedrückt, und die Krümmung ist am größten in der Mitte. Jede Hälfte des Stabes befindet sich in demselben Zustand, als ob sie in c befestigt wäre (wo die Hälften *aneinander* befestigt sind) und durch eine Kraft $\frac{1}{2}P$ in a oder in b nach oben gebogen würde.

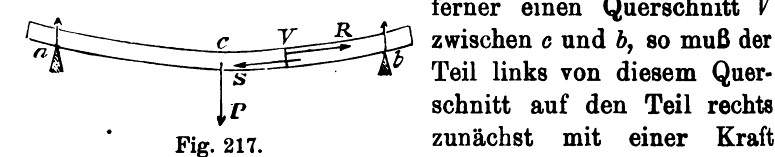


Fig. 217.

Nennt man den Abstand der beiden Stützpunkte l, so findet man also die Biegung, wenn man in den Formeln (3) und (4) l durch $\frac{1}{2}l$ und P durch $\frac{1}{2}P$ ersetzt. Man erhält hierdurch

$$s = \frac{1}{12}\frac{P}{E}\frac{l^3}{\pi r^4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

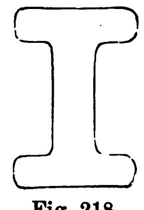
oder

$$s = \frac{1}{4}\frac{P}{E}\frac{l^3}{b d^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Wenn in einem der betrachteten Fälle s, l, P und r oder b und d emessen sind, so kann man aus der Formel E ableiten. Dies erfahren hat vor der Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten is der Verlängerung eines Drahtes den Vorzug, daß verhältnisäßig kleine Gewichte schon eine sehr merkliche Biegung berken, eine Folge der großen Werte, die (Fig. 124) R und S nehmen und der beträchtlichen Biegung, die bereits bei gengen Ausdehnungen und Zusammenziehungen der Fasern steht.

§ 258. **Einfluss der Form des Querschnittes.** Man hat genden, daß ein *sehr dünner* Stab zwar einer Ausdehnung mit einer nem Querschnitt proportionalen Kraft entgegenwirkt, aber viel geringerem Grade einer Krümmung Widerstand entgegenzt. Wir können daher sagen, daß die Fasern, deren Länge h bei der Biegung nicht ändert, da sie sich weder zusammenziehen noch auszudehnen streben, zu dem Widerstand, den r Stab der Biegung entgegensetzt, überhaupt nicht beitragen; e Fasern, welche in der Nähe der soeben erwähnten liegen, rden dies nur wenig tun. Daher kann man den Stab aushlen, ohne daß sein Widerstandsvermögen in demselben Verltnis wie sein Gewicht abnimmt. Daher ist ferner bei eichem Gewicht und gleicher Länge ein Hohlzylinder gegen ie Biegung stärker als ein massiver Zylinder. Denn obschon beiden gleichviel Fasern enthalten sind, liegen diese beim sten Körper durchschnittlich weiter über oder unter der Mitte s beim letzten und müssen sich also bei demselben Grade r Biegung in der Länge mehr ändern.

In ähnlicher Weise findet man, daß ein Stab von rechtnkligem Querschnitt sich weniger biegt, wenn e größere Seite des Rechtecks vertikal steht, s dann, wenn sich die kleinere Seite in dieser ellung befindet. Dies folgt übrigens auch aus n Formeln (4) und (6). Ebenso ist es leicht einsehen, welchen Vorteil es bietet, wenn man m Querschnitt eine Form wie die in Fig. 218 gebildete gibt.


Fig. 218.

Auch für andere Formen des Querschnitts als die im rigen Paragraphen behandelten kann man die Biegung eoretisch bestimmen. Wenn es ferner bekannt ist, welche

Spannung ein Draht von dem Stoffe, aus welchem der Stab besteht, aushält, so kann man auch berechnen, welche Belastung der Stab tragen kann, ohne zu brechen; zu diesem Zwecke muß man ermitteln, wann die Spannung in den ausgedehnten Fasern den höchsten Wert erreicht, der zugelassen werden kann.

Der Bruch tritt, wie bereits gesagt wurde, in den gestrekten Fasern ein, und zwar da, wo die Ausdehnung am größten ist, also in dem Stab von Fig. 216 am Ende links und in dem Stab von Fig. 219 in der Mitte.

§ 259. **Biegung von Körpern von anderer Form.** *Das, was bei einem ursprünglich geraden Stab die Biegung ist, ist bei einem bereits gekrümmten Stab jede Änderung der Krümmung.* Sowohl bei dem Stab, der in Fig. 219, als auch bei demjenigen,

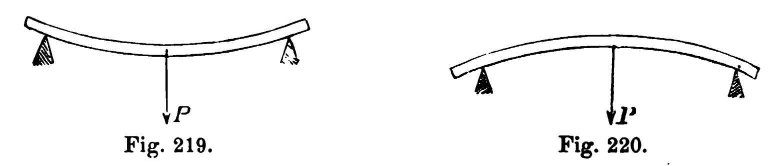


Fig. 219. Fig. 220.

welcher in Fig. 220 abgebildet ist, wird durch eine Belastung P eine Ausdehnung an der Unterseite und eine Zusammendrückung an der Oberseite entstehen; bei dem ersten Stab wird hierdurch die Krümmung vergrößert, bei dem zweiten verkleinert. Bei einem kreisförmigen Ring, der durch die Kräfte P in den Punkten a und b in die Form von Fig. 221 gebracht wird, nimmt die Krümmung in a und b ab, dagegen in c und d zu. Die Fasern sind hier in a und b an der Innenseite, in c und d an der Außenseite gestreckt.

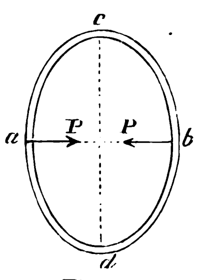


Fig. 221.

Plattenförmige Körper können ähnliche Krümmungsänderungen erleiden. Wird z. B. auf eine Kugelschale, die wie eine umgekehrte Schüssel mit dem Rand auf einer festen horizontalen Ebene liegt, in der Mitte ein Schlag ausgeübt, so kann an dieser Stelle an der Innenseite ein Bruch entstehen.

§ 260. **Abscherung.** In § 168, c wurde bereits gesagt, daß der Teil VB des Stabes von Fig. 124 den Teil AV entlang

etwas nach unten verschoben wird, wodurch die tangentiale Spannung Q entsteht, ein Umstand, den wir in § 257 außer Betracht gelassen haben, weil er von untergeordneter Bedeutung ist. In dem folgenden einfachen Fall hat man es ausschließlich mit einer Deformation dieser Art, einer sogenannten *Abscherung*, zu tun.

Ein ursprünglich rechtwinkliges Prisma $ABDC$ (Fig. 222) ist mit der Grundfläche AB unverrückbar befestigt; man kann es dann die Gestalt $ABD'C'$ annehmen lassen, indem man allen Punkten Verschiebungen nach rechts gibt, die der Höhe über AB proportional sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem man die unendlich dünnen Plättchen, in welche der Körper durch Flächen parallel zu AB geteilt wird, übereinander fortschiebt. Um den neuen Zustand hervorzubringen und zu erhalten, ist offenbar ein System von Kräften F nötig, die auf die Punkte der oberen Grundfläche in der Richtung der Pfeile wirken. Dann wird natürlich der Körper, an welchem das Parallelepiped befestigt ist, auf die Punkte von AB Kräfte wie die durch F' dargestellten ausüben. Ferner ist es klar, daß die Kräfte F noch nicht hinreichend sind, denn sie würden mit F' ein Kräftepaar bilden, so daß der Körper nicht im Gleichgewicht sein könnte; in der Tat, wenn nur diese Kräfte F beständen, so würde das Prisma *gebogen* werden und würden also die Seitenflächen rechts und links nicht eben und die obere Grundfläche nicht der unteren parallel bleiben. Will man eine reine Abscherung bewirken, so müssen auch auf AC' und BD' tangentiale Spannungen wirken, die aber für die folgenden Betrachtungen unwesentlich sind.

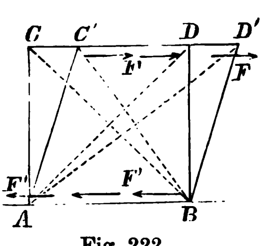


Fig. 222.

Daß die Teile des Körpers, die an beiden Seiten eines horizontalen Durchschnitts liegen, tangentiale Spannungen nach rechts und links aufeinander ausüben, ist leicht einzusehen.

Der Betrag dieser Spannungen oder der Kräfte F ist bei einem gegebenen Parallelepiped proportional der Verschiebung CC' und kann mit Hilfe eines Koeffizienten berechnet werden, der als das Maß des Widerstandes zu betrachten ist, den der Stoff einer Ab-

scherung entgegensetzt. Dieser Koeffizient kann durch die Größen E und μ von §§ 254 und 255 ausgedrückt werden.

Auf den ersten Blick kann es befremden, daß diese Koeffizienten, die sich auf Ausdehnungen und Zusammenziehungen beziehen, hier zur Anwendung kommen. Man muß aber bedenken, daß auch bei der Abscherung ein Körper sich in einigen Richtungen ausdehnt und in anderen zusammenzieht. In Fig. 222 wird die Linie AD beim Übergang in AD' länger, und die Linie BC beim Übergang in BC' kürzer.

§ 261. **Torsion.** Diese Veränderung, welche bereits in § 189 erwähnt wurde, ist nahe verwandt mit der Abscherung. Man denke sich einen Zylinder durch eine große Anzahl von Ebenen senkrecht zur Achse in unendlich dünne Scheiben geteilt und diese um die Achse gedreht, und zwar so, daß der Drehungswinkel allmählich zunimmt, wenn man von dem einen Ende zum anderen übergeht, so daß der Unterschied zwischen den Drehungswinkeln zweier Durchschnitte ihrer gegenseitigen Entfernung proportional ist. Dieser Unterschied, für die beiden Endflächen genommen, wird *der Torsionswinkel für den ganzen Zylinder* genannt; *dividiert man diesen Winkel durch die Länge, so erhält man den Torsionswinkel pro Längeneinheit.*

Da sich die Punkte des einen Scheibchens über diejenigen des anderen verschieben, so bedarf die Übereinstimmung mit der Abscherung des vorigen Paragraphen keiner Erläuterung und kann man leicht angeben, welcher Spannungszustand in dem Zylinder entsteht.

Wir nehmen an, daß die Achse senkrecht auf der Ebene der Zeichnung steht und daß der Körper durch diese Ebene nach dem Kreise C (Fig. 223) geschnitten wird, und stellen uns vor, daß das Ende des Zylinders über der Ebene der Figur in bezug auf das andere Ende in der Richtung der Pfeile gedreht wird. Was über einem Element des Durchschnittes bei a liegt, wird dann über den Stoff, welcher darunter liegt, in einer Richtung senkrecht zu Oa verschoben und übt also auf den letzteren Stoff eine tangentiale Spannung ab aus. Ähnliche Spannungen, die zum Teil in der Figur angedeutet sind, bestehen auch in anderen Punkten des Durchschnittes.

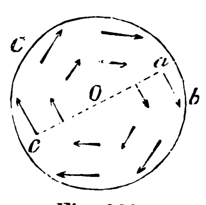


Fig. 223.

Zwei Kräfte, wie die bei a und c bilden ein Kräftepaar und *die gesamte gegenseitige Einwirkung der Teile des Stabes an beiden Seiten des Durchschnittes reduziert sich infolgedessen auf ein einziges Kräftepaar. Dies muß nun im Gleichgewichtszustand für alle Durchschnitte senkrecht zur Achse gleichgroß sein;* dann ist nämlich der Teil, welcher zwischen zwei Durchschnitten liegt, im Gleichgewicht, da die Kräftepaare, die an seinen Grenzflächen auf ihn wirken, entgegengesetzt gerichtet sind. *Ferner muß auch, wenn der Zustand der Torsion bestehen bleiben soll, auf jedes Ende des Zylinders ein Kräftepaar gleich dem soeben genannten wirken;* wenn das eine Ende befestigt ist, genügt es übrigens, wenn man auf das andere Ende ein Kräftepaar ausübt.

Das Moment des Kräftepaares hängt vom Torsionswinkel, von den Dimensionen des Zylinders und von der Beschaffenheit des Materials ab. Dem Winkel ist es direkt, der Länge umgekehrt proportional. Das letztere sieht man ein, wenn man den Zylinder in Gedanken durch eine Ebene senkrecht zur Achse halbiert; auf jeden Teil wirken dann an den Enden ebensogroße Kräftepaare wie auf den ganzen Zylinder, aber für jeden Teil ist der Torsionswinkel die Hälfte desjenigen des ganzen Zylinders. Wenn l, r, E und μ dieselbe Bedeutung haben wie in § 255 und § 257, so ist das Moment des betrachteten Kräftepaares gegeben durch die Formel

$$M = \frac{\pi E r^4 \vartheta}{4(1+\mu) l}.$$

Dabei ist ϑ der in Bogenmaß ausgedrückte Torsionswinkel.

Wie man sieht, hängt M in hohem Grade von r ab. Die tangentialen Spannungen nehmen nämlich in Fig. 223 von der Mitte nach dem Umfang hin zu; wird der Durchschnitt vergrößert, so kommen nicht nur neue Spannungen zu den bereits vorhandenen hinzu, sondern diese Spannungen sind auch größer; außerdem haben die Kräftepaare, welche man erhält, wenn man sie zu je zweien zusammenfaßt, größere Arme als die bereits vorhandenen Kräftepaare.

Mit Rücksicht auf diesen Umstand hängt man zuweilen einen Körper, der sich leicht in einer horizontalen Ebene drehen soll, der aber zu schwer ist, um von *einem* dünnen Draht getragen zu werden, an einem Bündel dünner Drähte

anstatt an *einem* dickeren Draht auf. Jeder Draht wird dann für sich selbst tordiert und das Kräftepaar, welches erforderlich ist, um 4 Drähte um denselben Winkel zu tordieren, ist kleiner als das Kräftepaar, welches bei *einem* Draht vom vierfachen Querschnitt erforderlich sein würde.

Aus der Messung von M, die z. B. in der in § 189 angegebenen Weise ausgeführt werden kann, kann man $E/(1+\mu)$ ableiten. Wird durch Versuche über die Ausdehnung oder die Biegung eines Stabes auch E bestimmt, so kennt man also auch μ und damit zugleich (§ 256) den Koeffizienten der Zusammendrückbarkeit.

Ebenso wie durch eine Ausdehnung kann durch eine zu weit gehende Abscherung oder Torsion der Zusammenhang der Teilchen vernichtet werden. Soll dies nicht geschehen, so muß z. B. eine Treibachse in einer Fabrik eine bestimmte Dicke haben; eine derartige Achse wird nämlich an der einen Stelle durch eine Dampfmaschine gedreht und setzt an einer anderen Stelle irgendeine Maschine in Bewegung, die der Drehung der Achse einen Widerstand entgegensetzt; infolgedessen wird die Achse zwischen diesen beiden Stellen tordiert.

§ 262. **Freie Energie eines deformierten Körpers.** *Die freie Energie, welche ein elastischer Körper nach einer Formveränderung hat, ist gleich der Arbeit, die wir verrichten müssen, um die Deformation bei konstanter Temperatur hervorzubringen, in solcher Weise, daß der Körper, ohne in seinem Ganzen eine merkliche kinetische Energie zu bekommen, eine Reihe von Gleichgewichtszuständen durchläuft* (§ 246). Wollen wir z. B. einen Stab, der an dem einen Ende befestigt ist, die Ausdehnung u geben, die durch die Gleichung (2) von § 254 ausgedrückt wird, so müssen wir nicht sofort die Kraft P ausüben, die für diese Ausdehnung erfordert wird, sondern wir müssen in folgender Weise verfahren. Wir ziehen zuerst am freien Ende des Stabes mit einer sehr kleinen Kraft und lassen diese langsam auf den Betrag P steigen. Die gesuchte freie Energie ψ ist gleich der Arbeit, welche die von 0 bis P zunehmende Kraft verrichtet, während ihr Angriffspunkt den Weg u durchläuft; indem man diesen Weg in unendlich kleine Stücke teilt und eine Berechnung ausführt, die der in § 92 mitgeteilten ähnlich ist, beweist man,

aß die Arbeit gefunden wird, wenn man den mittleren Wert er Kraft, d. h. $\frac{1}{2}P$, mit u multipliziert. Man hat daher

$$\psi = \tfrac{1}{2} P u = \tfrac{1}{2} \frac{E s u^2}{l}.$$

's ist leicht einzusehen, daß derselbe Ausdruck gilt, wenn die änge um den Betrag *u vermindert* wird, und daß auch bei ıderen Volumveränderungen die freie Energie in entsprechen- ›r Weise berechnet werden kann. Für den Stab von Fig. 216 . 406) muß man das halbe Produkt aus der Biegung und der əlastung nehmen, für einen tordierten Draht das halbe Produkt ıs dem tordierenden Kräftepaar und dem Torsionswinkel 165).

§ 263. **Isotrope und anisotrope Körper.** Bis jetzt wurde ıgenommen, daß der Stoff, aus welchem die Körper bestehen, allen Richtungen dieselben Eigenschaften hat. Diese Be- haffenheit, die bei allen Flüssigkeiten und Gasen und mehr er weniger auch bei vielen festen Körpern vorkommt, heißt *›tropie. Anisotrop* wird dagegen ein Körper genannt, wenn e Eigenschaften in der einen Richtung von denen in der deren verschieden sind. Dies ist in erster Linie bei den :istallen der Fall. So werden z. B. in einem Kristall von ıarz (Bergkristall) von der bekannten Form sechsseitiger ıulen, die durch sechsseitige Pyramiden zugespitzt sind, die əleküle in einer den Säulenkanten parallelen Richtung in zug aufeinander anders angeordnet sein als in einer Linie, e auf dieser Richtung senkrecht steht. Diese Verschieden- it offenbart sich bei mancher physikalischen Erscheinung. enn z. B. aus einem Stück Quarz eine Platte geschnitten rd, deren Seitenflächen den Säulenkanten parallel laufen, zeigt diese Platte in verschiedenen Richtungen eine un- əiche Wärmeleitung. Wird eine der Seitenflächen mit einer hicht Wachs bedeckt und dann in *einem* Punkt mit einem hitzten Stift erwärmt, so schmilzt das Wachs über eine äche, die durch eine Ellipse begrenzt wird, deren Mittelpunkt r erwärmte Punkt ist. Bei einem isotropen Körper würde ı kreisförmiger Fleck beobachtet werden.

Was die Erscheinungen der Elastizität betrifft, so macht :h die Anisotropie eines Quarzkristalls dadurch bemerklich, ıß Stäbchen von gleichen Dimensionen, die in verschiedenen

Richtungen aus dem Kristall geschnitten sind, in der Regel verschiedene Formveränderungen erleiden, wenn sie denselben ausdehnenden, biegenden oder tordierenden Kräften ausgesetzt werden. Anisotrop sind auch Stoffe, die, wie Holz, aus mehr oder weniger parallelen Fasern zusammengesetzt sind. Endlich zeigt ein Körper auch dann in verschiedenen Richtungen verschiedene Eigenschaften, wenn er ursprünglich isotrop ist, aber in *einer* Richtung ausgedehnt oder zusammengedrückt wird.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß „isotrop" nicht mit „homogen" (§ 83) verwechselt werden darf. Die Kristalle, welche niemals isotrop sind, sind gerade die homogensten festen Körper.

§ 264. **Ausdehnung durch die Wärme.** Wenn man den Einfluß einer Temperaturveränderung auf die Form und die Größe fester Körper ausführlich untersuchen wollte, so müßte man, um nur eins hervorzuheben, untersuchen, wie sich die Torsion eines Drahtes ändert, wenn er erwärmt wird, während ein konstantes Kräftepaar auf ihn wirkt. Wir werden uns aber hauptsächlich mit isotropen Körpern beschäftigen, auf die keine äußeren Kräfte wirken.

Bei einer Erwärmung nehmen alle Dimensionen eines solchen Körpers in demselben Verhältnis zu, und die Zunahme einer beliebigen Linie in dem Körper oder des Volums, kann der Temperaturerhöhung proportional gesetzt werden. Bei Abkühlung auf die ursprüngliche Temperatur kehrt der Anfangszustand zurück.

Der Bruch, welcher angibt, um welchen Teil der Länge, die sie bei 0° *hat, eine Linie in dem Körper bei jedem Grad Temperaturerhöhung zunimmt, wird der „lineare Ausdehnungskoeffizient" genannt. Ebenso wird durch den „kubischen Ausdehnungskoeffizienten" bestimmt, um welchen Teil des Wertes, den es bei* 0° *hat, das Volum für jeden Grad zunimmt.*

Bezeichnen wir diese Koeffizienten bezw. mit α und β, die Länge einer Linie in dem Körper bei 0° mit l_0 und bei t^0 mit l_t, das Volum bei diesen Temperaturen mit v_0 und v_t, so ist, wie leicht zu beweisen ist

$$l_t = l_0(1 + \alpha t), \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$v_t = v_0(1 + \beta t, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Zwischen den beiden Koeffizienten besteht ein einfacher Zusammenhang; *der kubische Ausdehnungskoeffizient ist nämlich das Dreifache des linearen Ausdehnungskoeffizienten.*

Da nämlich beim Erwärmen von 0^0 auf t^0 alle Dimensionen $1 + \alpha t$ mal größer werden, wird das Volum $(1 + \alpha t)^3$ mal größer. Weil αt sehr klein ist, kann man hierfür $1 + 3\alpha t$ schreiben, so daß $\beta = 3\alpha$ sein muß.

Es genügt also, einen der Koeffizienten zu messen. Was den linearen Ausdehnungskoeffizienten betrifft, so kann dies in der Weise geschehen, daß man auf einem Stab oder einem gespannten Draht zwei feine Marken anbringt, den Abstand derselben mißt, wenn der Körper von schmelzendem Eis umgeben ist, und dann die kleinen Verschiebungen bestimmt, welche die Marken erleiden, wenn das Eis durch Dampf von siedendem Wasser ersetzt wird. Die letztere Bestimmung kann mit Hilfe zweier Ablesungsmikroskope ausgeführt werden.

Im folgenden Kapitel findet man eine Methode, die direkt den kubischen Ausdehnungskoeffizienten liefert.

Über die Ausdehnung durch die Wärme ist noch das Folgende zu bemerken.

a) Wenn das Volum v_t eines Körpers bei t^0 gegeben ist, findet man für das Volum bei t'^0

$$v_{t'} = v_t \frac{1 + \beta t'}{1 + \beta t}.$$

Wegen des kleinen Wertes von β kann man hierfür schreiben

$$v_{t'} = v_t [1 + \beta (t' - t)],$$

d. h. man kann für die Ausdehnung für jeden Grad βv_t anstatt βv_0 nehmen.

b) *Bei jedem Körper ändert sich die Dichte umgekehrt proportional dem Volum.* Zwischen den Dichten d_0 und d_t bei 0^0 und t^0 besteht daher die Beziehung

$$d_t = \frac{d_0}{1 + \beta t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

c) *Da sich die Form eines Körpers beim Erwärmen nicht ändert, so nimmt das Volum eines inneren Hohlraumes in demselben Verhältnis wie der mit Stoff angefüllte Raum zu.* Man kann also die Veränderungen des inneren Volums eines Glasgefäßes ver-

mittelst der Formel (8) mit dem kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Glases berechnen.

d) Verschiedene Erscheinungen beruhen auf der ungleichen Ausdehnung verschiedener Körper. Wird z. B. ein Band, welches aus zwei aneinander liegenden und zusammengenieteten Streifen verschiedener Metalle besteht, erwärmt, so krümmt es sich, und zwar so, daß das Metall, welches sich am stärksten ausdehnt, an der konvexen Seite liegt. Dies ist, nach dem in § 257 betrachteten Fall, ein neues Beispiel der Krümmung, zu der Ungleichheit der Länge der verschiedenen Fasern Veranlassung gibt. Ein drittes Beispiel hat man in dem Verziehen von Holz, welches an der einen Seite mehr ausgetrocknet wird als an der anderen; beim Austrocknen zieht es sich nämlich zusammen.

e) Die Möglichkeit einen Platindraht in Glas einzuschmelzen, ohne daß beim Abkühlen eine Öffnung entsteht oder das Glas zerspringt, beruht auf der geringen Verschiedenheit der Ausdehnungskoeffizienten der beiden Stoffe.

f) *Setzt sich während einer Temperaturveränderung der Ausdehnung oder Zusammenziehung eines Körpers ein Hindernis entgegen, so erleidet dieses von dem Körper eine Kraft, die zuweilen sehr groß ist.*

Wir wollen z. B. einen Stab betrachten, der bei 0^0 die Länge l und den Querschnitt s hat, und die Kräfte ermitteln, mit denen wir gegen die Enden drücken müssen, um bei einer Erwärmung auf t^0 die Ausdehnung zu verhindern. Wir können uns zu diesem Zwecke vorstellen (vgl. § 219), daß wir zuerst die Ausdehnung ungehindert stattfinden lassen und dann bei der konstanten Temperatur t den Stab wieder auf die ursprüngliche Länge zusammendrücken.

Durch die Formel (2) findet man für die dazu erforderliche Kraft

$$K = \alpha t (1 - \alpha t) s E;$$

es handelt sich nämlich darum, einem Stabe von der Länge $l(1 + \alpha t)$ und dem Querschnitt $s(1 + \alpha t)^2$ die Zusammendrückung $\alpha l t$ zu geben.

Da αt klein ist, kann man für den gefundenen Ausdruck schreiben

$$K = \alpha t s E;$$

für E muß in diesem Ausdruck eigentlich der Elastizitätskoeffizient bei t^0 genommen werden.

Hätte man die Kräfte K sofort bei der Erwärmung angebracht, so würde sich der Körper überhaupt nicht ausgedehnt haben, und wäre der Stab zwischen zwei unverrückbare Hindernisse eingeschlossen, so würde er gegen diese einen Druck $= K$ ausüben.

g) Nicht alle festen Körper dehnen sich beim Erwärmen aus; ein Kautschukschlauch z. B., der durch eine hinreichende Belastung gespannt ist, zieht sich beim Erwärmen stark zusammen.

§ 265. **Veränderung der Temperatur bei adiabatischer Ausdehnung oder Zusammenziehung eines Drahtes.** Wenn ein Draht, den man erst mit einer gewissen Kraft gespannt hat, durch Zunahme dieser Kraft noch mehr ausgedehnt wird oder sich infolge einer Abnahme der Kraft zusammenzieht, und zwar ohne daß ihm Wärme zugeführt oder entzogen wird, so erleidet die Temperatur eine kleine Veränderung, die in dem einen Fall die entgegengesetzte Richtung als im anderen hat. Wie es sich hiermit verhält, ob z. B. die Ausdehnung mit Steigen oder Sinken der Temperatur verbunden ist, kann man durch eine thermodynamische Betrachtung voraussagen. Man kann nämlich mit dem Draht einen Carnotschen Kreisprozeß vornehmen, bei dem eine isothermische Ausdehnung bei der Temperatur T und eine isothermische Zusammenziehung bei der Temperatur T' vorkommt, während adiabatische Veränderungen eingeschaltet werden, um von der Temperatur T zu T' und später wieder von T' zu T überzugehen. Wir wollen nun annehmen, daß sich der Draht, während die spannende Kraft konstant gehalten wird, beim Erwärmen ausdehnt; dann wird bei einer bestimmten Länge die Spannung um so kleiner sein, je höher die Temperatur ist. Soll nun der Draht bei dem Kreisprozeß eine positive Arbeit verrichten, so muß er sich zusammenziehen, wenn die Spannung groß, also die Temperatur niedrig, und ausdehnen, wenn diese hoch ist, d. h. T muß höher als T' sein. Da aber bei jedem Carnotschen Kreisprozeß, wenn dabei eine positive Arbeit verrichtet wird, der arbeitende Körper bei der *höchsten* der beiden Temperaturen Wärme aufnimmt, muß die isothermische Ausdehnung, denn dies ist die Veränderung, welche bei der höchsten Temperatur stattfindet, unter Wärmeaufnahme erfolgen. Findet keine Wärmezufuhr statt, so muß also die Ausdehnung die Temperatur erniedrigen.

Ebenso kann man beweisen, daß bei einem Körper, der sich beim Erwärmen zusammenzieht, die Temperatur durch eine adiabatische Ausdehnung erhöht wird.

Die Beobachtung lehrt, daß sich ein Metalldraht bei plötzlicher Ausdehnung wirklich etwas abkühlt, während ein gespanntes Kautschukband (§ 264, g) sich dabei erwärmt.

Wir haben hier nur die ***Richtung*** der Veränderung besprochen. Aus der Regel für den Wirkungsgrad bei einem Carnotschen Kreisprozeß kann man eine Formel ableiten, durch welche der Betrag der Temperaturveränderung bei einer bestimmten Änderung der Spannung abgeleitet werden kann. Diese Formel, in welcher der Ausdehnungskoeffizient, die spezifische Wärme und das mechanische Wärmeäquivalent vorkommen, ist durch Messung der Erscheinung bestätigt worden.

§ 266. **Dauernde Zustandsänderungen. Elastische Nachwirkung.** Wenn die äußeren Kräfte, welche die Form eines festen Körpers verändern, eine gewisse Grenze (die Elastizitätsgrenze) überschreiten, kehrt der Körper nach Aufhebung dieser Kräfte nicht mehr ganz in die ursprüngliche Form zurück; die Teilchen haben sich dann in neue Gleichgewichtslagen verschoben. Auf der Möglichkeit einer solchen Verschiebung beruht das Schmieden, Walzen und Drahtziehen.

Auch durch Temperaturänderungen kann der Zustand eines Körpers dauernd modifiziert werden, und dabei ist die Geschwindigkeit der Temperaturveränderung zuweilen von Einfluß (§ 254).

Eine andere Erscheinung, die zuweilen auf den ersten Blick mit der soeben genannten verwechselt werden kann, ist die *elastische Nachwirkung*. Diese besteht darin, daß ein Körper, nachdem einige Zeit äußere Kräfte, die jetzt gar nicht groß zu sein brauchen, auf ihn gewirkt haben, nach Aufhebung derselben zwar in den Gleichgewichtszustand zurückkehrt, aber dies nicht augenblicklich tut. Obgleich der größte Teil der Formveränderung in kurzer Zeit verschwindet, tritt eine vollständige Rückkehr in den Gleichgewichtszustand erst nach Verlauf einer längeren Zeit, zuweilen nach vielen Stunden ein. Bei Instrumenten, in denen ein Körper an einem dünnen Draht aufgehängt ist, bemerkt man oft die Nachwirkung der Torsion.

Man kann sich die Erscheinung einigermaßen durch die Annahme erklären, daß sich den Bewegungen, welche die Moleküle bei der Rückkehr in den Gleichgewichtszustand ausführen müssen, ein innerer Widerstand entgegensetzt. Mit dieser Auffassung steht es auch in Einklang, daß eine äußere Kraft nicht sofort, wenn sie auf den Körper zu wirken beginnt, diesem die volle Formveränderung erteilt. Nach der ersten augenblicklichen Deformation entsteht noch eine weitere Formveränderung, die eine längere Zeit erfordert.

Bei Thermometern beobachtet man eine Erscheinung, die mit der elastischen Nachwirkung in engem Zusammenhang steht. Bestimmt man nämlich unmittelbar nach der Anfertigung des Thermometers die beiden festen Punkte und wiederholt dies nach längerer Zeit, so zeigt es sich, daß diese Punkte auf der Skala etwas höher — z. B. einige zehntel Grad oder selbst mehr als ein Grad — gekommen sind. Dies ist eine Folge davon, daß die Thermometerkugel, die beim Blasen eine hohe Temperatur gehabt hat, nach der ersten Zusammenziehung beim Abkühlen noch eine langsam fortschreitende Kontraktion erleidet. Man kann sogar beobachten, daß unmittelbar nachdem sich das Thermometer in Dampf von siedendem Wasser befunden hat, der Gefrierpunkt nicht ganz dieselbe Lage hat als vor der Erwärmung. Dies ist einer der Umstände, die es schwierig machen, eine Temperatur bis auf 0,1° genau zu messen. Natürlich kann man kleine *Temperaturunterschiede*, z. B. die, welche bei kalorimetrischen Versuchen vorkommen, viel leichter, selbst mit größerer Genauigkeit bestimmen.

Die „thermische" Nachwirkung, wie man die zuletzt besprochene Erscheinung nennen kann, ist nicht bei allen Glassorten dieselbe. Besonders klein ist sie bei dem sogenannten Jenaer Normalglas, welches in letzter Zeit viel zur Anfertigung von Thermometern gebraucht wird.

Achtes Kapitel.

Eigenschaften von Flüssigkeiten und Dämpfen.

§ 267. **Zusammendrückbarkeit von Flüssigkeiten.** Um die kleine Volumveränderung zu messen, die man einer Flüssigkeit durch einen äußeren Druck geben kann, macht man von einem Glasgefäß Gebrauch, welches aus einem, z. B. kugelförmigen Reservoir mit einer angeschmolzenen engen Röhre besteht. Die letztere ist mit einer Teilung versehen und, bevor die Kugel angeschmolzen wurde, *„kalibriert"* worden, d. h. man hat untersucht, ob das innere Volum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilstrichen überall gleichgroß ist. Man hat zu diesem Zwecke eine Quecksilbersäule in die Röhre gebracht und ermittelt, wieviel Skalenteile die Länge derselben einnimmt, wenn sie sich nacheinander an verschiedenen Stellen in der Röhre befindet. Ist die betreffende Anzahl immer dieselbe, so entsprechen den verschiedenen Skalenteilen gleiche Volume; im entgegengesetzten Falle kann man aus der Beobachtung der Länge des Quecksilberfadens an verschiedenen Stellen die nötigen Daten ableiten, um später bei den definitiven Versuchen die erforderliche Korrektion anbringen zu können. Wir wollen jedoch annehmen, daß das Volum zwischen zwei Teilstrichen überall denselben Wert hat. Diesen kann man dadurch ermitteln, daß man in die Röhre eine Quecksilbersäule bringt, die eine ziemlich große Anzahl von Skalenteilen einnimmt, und das Gewicht derselben bestimmt. In derselben Weise wird auch, nachdem die Kugel angebracht ist, das innere Volum dieser letzteren einschließlich des Teils der Röhre bis an den untersten Teilstrich gemessen.

Nachdem der Apparat mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist, kann man die Zusammendrückbarkeit der letzteren dadurch bestimmen, daß man das ganze Gefäß unter die Glocke einer Luftpumpe bringt und den Stand der Spitze der Flüssigkeitssäule abliest, wenn die Glocke luftleer gemacht und wenn die Luft wieder zugelassen ist. Natürlich muß dafür gesorgt werden, daß sich dabei die Temperatur nicht ändert. Die Beobachtungen lehren, daß die Verschiebungen der Spitze der Flüssigkeitssäule den Änderungen des Druckes proportional sind.

Wir wollen annehmen, die Flüssigkeitssäule reiche bis zum Teilstrich a beim kleinsten Druck und bis zum Teilstrich b, nachdem der Druck um 1 Atmosphäre erhöht worden ist; μ sei der Koeffizient der Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, ν der des Glases, aus dem das Gefäß besteht, beide Koeffizienten im Sinne von § 256 und für 1 Atmosphäre als Einheit des Druckes genommen. Versteht man im Falle, daß der Druck den kleinsten Wert hat, welcher bei den Versuchen vorkam, unter v das Volum zwischen zwei Teilstrichen und unter Nv das Volum des Gefäßes bis zum Teilstrich 0, so war beim kleinsten Druck das Volum der Flüssigkeit $(N+a)v$. Nachher war es $(N+b)v(1-\nu)$; das Gefäß ist nämlich an der Innenseite und an der Außenseite demselben Druck unterworfen (§ 256). Man findet nun

$$\mu = \frac{(N+a)-(N+b)(l-\nu)}{N+a} = \nu + \frac{a-b}{N+a}(1-\nu)\,.$$

Da $(a-b)/(N+a)$ ebenso wie ν eine sehr kleine Größe ist, kann man hierfür schreiben

$$\mu = \nu + \frac{a-b}{N+a}\,.$$

Wenn man die Volumänderung des Gefäßes nicht berücksichtigt hätte, so würde man

$$\mu = \frac{a-b}{N+a}$$

gefunden haben. Man kann dies *den Koeffizienten der scheinbaren Zusammendrückbarkeit* nennen; *man muß diesen also um ν vermehren, um den wahren Koeffizienten zu bekommen.*

Die Größe ν kann aus Versuchen über die Formveränderungen eines Glasstabes abgeleitet werden, allerdings nicht

mit großer Genauigkeit, denn sogar wenn der Glasstab aus derselben Glassorte wie das benutzte Gefäß besteht, können doch die Eigenschaften der beiden Gegenstände wegen der verschiedenen Bearbeitungen, die sie erfahren haben, merklich verschieden sein. Ist jedoch μ erheblich größer als ν, so ist eine große Genauigkeit in der Bestimmung dieser letzteren Größe nicht nötig.

§ 268. **Ausdehnung der Flüssigkeiten durch die Wärme.** *Was wir in § 264 über die Änderung des Volums der festen Körper gesagt haben, gilt mit einer einzigen Ausnahme auch von Flüssigkeiten*, so dass auch für diese Körper die Gleichung (8) des genannten Paragraphen anwendbar ist. *Wird vom Ausdehnungskoeffizienten einer Flüssigkeit gesprochen, so meint man immer den kubischen Ausdehnungskoeffizienten.*

Die erwähnte Ausnahme findet sich beim Wasser. Nach dem in §§ 1 und 4 Gesagten ist es nicht nötig, hierauf näher einzugehen, wir bemerken nur, *daß beim Wasser von einem* [illegible] *ohne nähere Angabe, was gemeint ist, nicht* [illegible]

Um die Ausdehnung einer Flüssigkeit beim Erwärmen zu untersuchen, kann man den im vorigen Paragraphen beschriebenen Apparat benutzen. Beobachtet man den Stand der Flüssigkeit in der Röhre bei zwei Temperaturen, so würde man, wenn von der Ausdehnung des Glases abgesehen werden könnte, durch eine sehr einfache Berechnung den Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeit finden. Der so gefundene Wert [illegible] Ausdehnungskoeffizient; da sich das Volum [illegible] ist der wahre [illegible] indem [illegible] diese Regel zu beweisen.

[illegible]

[illegible] der Flüssigkeiten kennen [illegible] bestimmt haben. Man [illegible] Ausdehnungskoeffizienten [illegible] bestimmt [illegible] das [illegible] des Stabes [illegible] das [illegible] des benutzten [illegible] auch zu

einem Versuch mit Quecksilber zu benutzen. *Von dieser Flüssigkeit ist nämlich der wahre Ausdehnungskoeffizient bekannt* und sobald man auch den scheinbaren Koeffizienten gemessen hat, erhält man durch eine Subtraktion den kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Glases.

Das Verfahren, welches zuerst von Dulong und Petit angewandt wurde, um den wahren Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers zu bestimmen, beruht auf der *Veränderung, welche die Dichte einer Flüssigkeit beim Erwärmen erleidet,* eine Veränderung die durch die Formel (9) von § 264 bestimmt wird. Die Dichte von kaltem und warmem Quecksilber kann man nämlich dadurch vergleichen, daß man zwei vertikale Röhren, die oben offen und unten durch eine enge horizontale Röhre verbunden sind, mit Quecksilber füllt, die eine Röhre mit schmelzendem Eis umhüllt und die andere auf eine bekannte höhere Temperatur erwärmt. Dann mißt man die Höhe der Flüssigkeitssäulen in beiden Röhren (vgl. § 205, f).

§ 269. **Gewichtsthermometer.** Bei den beschriebenen Versuchen ergibt sich die scheinbare Ausdehnung der Flüssigkeit aus der Verschiebung eines Flüssigkeitsfadens über den Punkt hinaus, bis zu dem er bei der niedrigsten Temperatur reicht. Das Volum dieser vorausgeschobenen Flüssigkeit ist bekannt, weil man im voraus das Gewicht einer Quecksilbersäule ermittelt hat, die eine gewisse Anzahl von Skalenteilen einnimmt. Man hätte nun aber ebensogut die Flüssigkeit, die über einen festen Punkt hinausgeht, direkt wägen können. So kommt man auf die Idee eines *Gewichtsthermometers.* Dies besteht aus einem Glasgefäß, welches mit einer Röhre versehen ist, die in eine feine Spitze ausgezogen ist. Um zunächst den Ausdehnungskoeffizienten des Glases zu finden, bestimmt man das Gewicht p_0 des Quecksilbers, welches das Gefäß bei 0° faßt, und das Gewicht p_t derselben Flüssigkeit, das es bei der Temperatur t (z. B. 100°) enthält. (Das letztere kann durch Wägen des Quecksilbers geschehen, welches beim Erwärmen von 0° auf t° aus dem Gefäß ausfließt.) Ist d_0 das spezifische Gewicht des Quecksilbers bei 0° und α der Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers, so ist das Volum des Gefäßes bei den beiden Temperaturen

$$\frac{p_0}{d_0} \text{ und } \frac{p_t}{d_0}(1 + \alpha t),$$

und hieraus kann der Ausdehnungskoeffizient des Glases gefunden werden. Werden dieselben Versuche mit einem anderen Gefäß wiederholt, in welchem sich außer dem Quecksilber ein fester Körper befindet, so kann man aus den Ergebnissen den Ausdehnungskoeffizienten dieses letzteren ableiten.

Man sieht auch leicht ein, daß man aus der Menge Quecksilber, die das Gefäß bei einer gewissen Temperatur fassen kann, diese letztere berechnen kann. Daher der Name „Gewichtsthermometer".

§ 270. **Folgen der Veränderung der Dichte.** a) *Man muß auf diese Veränderung in allen Fällen achten, in denen man einen Druck durch die Höhe einer Flüssigkeitssäule messen will.* Da die Dichte von warmem Quecksilber kleiner ist als die von kaltem Quecksilber, so ist z. B. die Höhe der Quecksilbersäule in zwei Barometern, in denen die Flüssigkeit verschiedene Temperatur hat, ungleich. Aus dem früher Gesagten folgt, daß, wenn die betreffenden Temperaturen 0^0 und t^0 und die Höhen h_0 und h_t sind, die Beziehung

$$h_0 = \frac{h_t}{1+\alpha t}$$

besteht. Mit Hilfe dieser Formel, in welcher α der Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers ist, kann man jeden bei t^0 beobachteten Barometerstand „auf 0^0 reduzieren", d. h. berechnen, wie hoch das Quecksilber bei demselben Luftdruck stehen würde, wenn es eine Temperatur von 0^0 hätte.

b) *Auch bei jeder genauen Bestimmung des spezifischen Gewichtes oder der Dichte eines Stoffes muß man den Einfluß der Temperatur berücksichtigen.* Wenn z. B. ein Stück Kupfer in der Luft p Gramm und unter Wasser q Gramm wiegt und wenn die Temperatur bei der letzteren Wägung t^0 ist, so hat bei dieser Temperatur das Kupfer dasselbe Volum wie eine Menge Wasser von $p - q$ Gramm (vom Gewichtsverlust in der Luft wollen wir hier absehen), ein Volum, welches man mit Hilfe einer Tabelle (am Ende des Buches) ermitteln kann. Wir können also auch finden, wieviel Gramm ein Kubikzentimeter Kupfer bei t^0 wiegt; wollen wir hieraus das Gewicht eines Kubikzentimeters bei 0^0 ableiten, so müssen wir den Ausdehnungskoeffizienten des Kupfers kennen und die Gleichung (9) von § 264 anwenden.

§ 271. **Nähere Betrachtung der Ausdehnung von festen Körpern und Flüssigkeiten. Vergleichung verschiedener Thermometer.** Wenn man (§ 219) die Temperaturen mit einem Luftthermometer mißt und dann die Ausdehnung von festen Körpern und Flüssigkeiten einer genauen Untersuchung unterwirft, so zeigt sich, daß für keinen dieser Körper das in §§ 264 und 268 Gesagte vollkommen richtig ist; die Ausdehnungen für aufeinanderfolgende gleiche Temperaturerhöhungen sind etwas voneinander verschieden. In den meisten Fällen kann man von diesen kleinen Abweichungen absehen, aber wenn es auf große Genauigkeit ankommt, ist eine Formel von der Form

$$v_t = v_0(1 + \alpha t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

nicht mehr zu gebrauchen. Man kann aber (vgl. § 4) die Volumvermehrung eines jeden festen oder flüssigen Körpers durch eine empirische Formel von der Gestalt

$$v_t = v_0(1 + \alpha t + \beta t^2 + \alpha t^3) \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ausdrücken. *Während also die Gase bei ihrer Ausdehnung alle nahezu dasselbe Gesetz befolgen, nämlich in dem Sinne, daß bei derselben Temperaturerhöhung sich das Volum bei allen in demselben Verhältnis ändert, hält die Ausdehnung einer Flüssigkeit oder eines festen Körpers nicht gleichen Schritt mit der Ausdehnung eines Gases.*

Eine Folge hiervon ist eine merkwürdige Erscheinung, welche man beobachtet, wenn man ein gewöhnliches Quecksilberthermometer mit einem Luftthermometer, z. B. dem in § 218 erwähnten, vergleicht. Da von beiden die festen Punkte in der bekannten Weise bestimmt worden sind, zeigen sie natürlich sowohl in schmelzendem Eis als auch in Dampf von siedendem Wasser dieselbe Anzahl von Graden an. Bei zwischenliegenden Temperaturen ist dies jedoch nicht der Fall. Um dies einzusehen, wollen wir für einen Augenblick die Ausdehnung des Glases außer Betracht lassen. Wenn nun das Luftthermometer bei einer gewissen Temperatur 50° anzeigt, d. h. wenn die Luft, von 0° an gerechnet, gerade die Hälfte der gesamten Ausdehnung, die sie bis zu 100° erleidet, vollendet hat, so hat das Quecksilber noch nicht die Hälfte seiner gesamten Volumvermehrung vollendet und steht also noch nicht auf 50°.

In einem Quecksilberthermometer hat man es eigentlich mit der *scheinbaren* Ausdehnung des Quecksilbers in Glas zu tun. Hierdurch wird die Beantwortung der Frage, wie hoch ein solches Thermometer stehen wird, wenn das Luftthermometer 50° zeigt, noch etwas verwickelter. *Es zeigen sogar zwei Quecksilberthermometer, die aus verschiedenen Glassorten bestehen, nicht denselben Gang, da die Glassorten bei der Ausdehnung nicht dasselbe Gesetz befolgen.* Der Unterschied in den Angaben eines Luftthermometers und eines Quecksilberthermometers kann zwischen 0° und 100° ein bis zwei Zehntel eines Grades betragen; über 100° werden die Abweichungen noch größer.

In vielen Fällen kann man von den ungleichen Angaben verschiedener Thermometer absehen. Bei genauen Untersuchungen werden, wie bereits gesagt wurde (§ 219), die Temperaturen in Graden des Luftthermometers ausgedrückt. Dann haben für jeden festen oder flüssigen Körper die Koeffizienten β und γ in der Formel (2) bestimmte Werte. Diese Werte würden ganz anders werden, wenn man t in Graden eines Quecksilberthermometers ausdrückte.

§ 272. **Verdampfung von Flüssigkeiten. Maximum der Spannkraft eines Dampfes.** Wir sahen bereits in § 235, wie eine Flüssigkeit in einem Raum, den sie nicht ganz ausfüllen kann, ganz oder teilweise in *Dampf* übergeht, und wie bei gegebener Temperatur der Dampf eine bestimmte Spannung und auch eine bestimmte Dichte haben muß, um mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht zu sein; wir machten uns ferner eine Vorstellung von der Art und Weise, wie dies Gleichgewicht zustande kommt.

Den „Gleichgewichtsdruck“ p nannten wir den Druck des gesättigten Dampfes. Man nennt ihn auch oft das *Maximum der Spannung*, wozu man in der folgenden Weise gekommen ist. Wenn man eine gewisse Menge Dampf, die anfangs einen kleinen Druck ausübt, bei der gewählten konstanten Temperatur zusammendrückt, so verdichtet sich der Dampf von selbst zu einer Flüssigkeit, sobald der Druck einen gewissen Betrag p' erreicht hat. Wie groß dieser ist, hängt von Umständen ab, auf die wir später noch zurückkommen; in jedem Fall ist jedoch p' nur wenig vom Gleichgewichtsdruck p verschieden, so daß man annäherungsweise sagen kann, daß der letztere

der größte Druck ist, den der Dampf bei der gewählten Temperatur ausüben kann.

In demselben Sinne, in welchem man von dem Maximum der Spannkraft spricht, kann man auch sagen, daß der gesättigte Dampf ein *Maximum der Dichte* hat.

Um die Verdampfung zu beobachten und die Spannkraft des gesättigten Dampfes bei nicht zu hohen Temperaturen zu messen, kann man die Flüssigkeit über das Quecksilber eines Barometers emporsteigen lassen; der Dampf ist gesättigt, sobald noch etwas unverdampfte Flüssigkeit übrigbleibt. Die Spannkraft des Dampfes leitet man aus der Höhe ab, um welche das Quecksilber herabgedrückt wird. Wenn man nun die ganze Barometerröhre mit einem Erwärmungsmantel umgibt, so beobachtet man, *daß die Spannkraft des gesättigten Dampfes schnell mit der Temperatur zunimmt,* und wenn man auf die Menge der Flüssigkeit achtet, die man in die Röhre bringen muß, um einen bestimmten Raum „mit Dampf zu sättigen", so zeigt es sich, *daß dies auch mit der Dichte des gesättigten Dampfes der Fall ist. Ein bestimmter Raum kann um so mehr Dampf enthalten, je höher die Temperatur ist.*

Natürlich kann man mit der Barometerröhre nicht weiter gehen als bis zu derjenigen Temperatur, bei welcher das Maximum der Spannkraft gleich dem Atmosphärendruck ist. Um bei höheren Temperaturen zu arbeiten, muß man sich anderer Hilfsmittel bedienen.

Von dem Einfluß der Temperatur kann man sich leicht Rechenschaft geben. Ist zuerst die Flüssigkeit mit dem Dampf im Gleichgewicht und erhöht man dann die Temperatur, so werden mehr Moleküle eine so große Geschwindigkeit bekommen, daß sie aus der Flüssigkeit fortfliegen können. Erst nachdem der Dampf eine größere Dichte bekommen hat, wird von neuem Gleichgewicht bestehen.

Man hat auch die Verdampfung in einem Raum untersucht, der bereits Luft oder ein anderes Gas enthält, und gefunden, *daß in einem solchen Raum der Dampf schließlich dieselbe Dichte bekommt wie in einem anfangs leeren Raum.* Da nun ein Gemenge zweier Gase einen Druck ausübt gleich der Summe der Drucke, die jeder der Bestandteile in demselben Volum und bei derselben Temperatur ausüben würde, wirkt im Gleich-

gewichtszustand auf die Wände außer dem Druck, den das Gas ursprünglich ausübte, die Spannkraft des gesättigten Dampfes. Der einzige Einfluß des Gases auf die Verdampfung besteht darin, *daß es bewirkt, daß diese langsamer stattfindet.* Die aus der Flüssigkeit kommenden Moleküle können nicht mehr ungestört auf große Entfernungen fortfliegen, sondern stoßen alsbald mit Gasteilchen zusammen; die Schicht unmittelbar über der Flüssigkeit wird zwar schnell mit dem Dampf gesättigt, aber die weitere Verbreitung dieses letzteren muß durch eine langsame Diffusion stattfinden.

Aus den mitgeteilten Betrachtungen kann man ableiten, *daß das Maximum der Spannkraft über einer wässerigen Salzlösung kleiner ist als über reinem Wasser.* Die Salzteilchen ziehen nämlich die Wassermoleküle an und wirken daher der Dampfbildung entgegen, während sie das Zurückhalten von Molekülen, die wieder in die Flüssigkeit kommen, befördern. Wir werden auf diesen Gegenstand noch zurückkommen.

Auch gewisse feste Körper können unzersetzt verdampfen oder, indem sie dissoziiert werden, einen gasförmigen Bestandteil abgeben. Über Eis oder über einem kristallwasserhaltigen Salz hat der Wasserdampf ein bestimmtes Maximum der Spannkraft, und dasselbe ist der Fall mit der Kohlensäure, die bei hoher Temperatur aus Kalziumkarbonat entweicht.

§ 273. **Sieden.** *Bei dieser Erscheinung entwickeln sich,* wie man weiß, *Dampfblasen im Innern der Flüssigkeit oder an den Wänden des Gefäßes; diese Blasen steigen, während sie größer werden, an die Oberfläche empor.* Das Entstehen eines kleinen Dampfbläschens hängt vom Zusammentreffen günstiger Umstände ab, aber es ist klar, daß ein solches Bläschen nur dann bestehen und größer werden kann, wenn der Dampf einen Druck ausüben kann, welcher gleich demjenigen ist, der in der umgebenden Flüssigkeit herrscht. Wäre dies nicht der Fall, so würde das Dampfbläschen durch die Flüssigkeit zusammengedrückt werden und wieder verschwunden sein, noch ehe es sichtbar geworden wäre.

Wenn von dem Druck, den die Flüssigkeit durch ihr Gewicht ausübt, abgesehen werden kann, also in einer nicht zu tiefen Masse, *können einmal gebildete Dampfblasen bei derjenigen Temperatur bestehen bleiben, bei welcher das Maximum der Spann-*

kraft des Dampfes gleich dem äußeren Druck ist, der durch ein Gas oder bereits anwesenden Dampf auf die Flüssigkeit ausgeübt wird. Diese Temperatur wird der *Siedepunkt* der Flüssigkeit genannt. In Wirklichkeit muß oft aus einer später zu besprechenden Ursache etwas weiter erhitzt werden, ehe das Sieden anfängt. Ein in den entweichenden Dampf eingetauchtes Thermometer zeigt aber eine dem wahren Siedepunkt entsprechende Temperatur an. Das Gefäß eines solchen Thermometers wird nämlich mit einer dünnen Flüssigkeitsschicht bedeckt und bekommt die Temperatur, bei welcher diese Flüssigkeit im Gleichgewicht mit Dampf von dem Druck ist, der in dem umgebenden Raum herrscht.

Aus dem im vorigen Paragraphen Gesagten kann man schließen, *daß der Siedepunkt einer Salzlösung höher ist als der des reinen Wassers.*

§ 274. **Verdampfungswärme.** Bei jeder Verdampfung einer Flüssigkeit verschwindet eine gewisse Menge Wärme; im besonderen *wollen wir unter „Verdampfungswärme" die Wärmemenge verstehen, die wir einem Gramm Flüssigkeit zuführen müssen, um diese in gesättigten Dampf von derselben Temperatur zu verwandeln.* Man bestimmt diese Größe dadurch, daß man die Wärme mißt, welche umgekehrt entwickelt wird, wenn der gesättigte Dampf zu Flüssigkeit verdichtet wird.

Die Verdampfungswärme dient zum Teil dazu, um die innere Energie des Stoffes zu erhöhen; in der Tat ist im Dampf die potentielle Energie, welche die Moleküle in bezug aufeinander haben, größer als in der Flüssigkeit und hat vielleicht auch die kinetische Energie nicht denselben Wert.

Aber außerdem findet beim Übergang in Dampf eine bedeutende Volumvermehrung statt; die Verdampfung ist also nur möglich, wenn ein Kolben, unter dem sich die Flüssigkeit befindet, oder eine Gas- oder Dampfmasse, die auf sie drückt, verschoben wird. *Bei dieser Verschiebung verrichtet der Dampf eine gewisse äußere Arbeit und auch hierfür muß eine gewisse Menge Wärme verbraucht werden, die in der gesamten Verdampfungswärme einbegriffen ist.*

Um die betreffende äußere Arbeit zu berechnen, muß man den Druck des Dampfes in Dyn pro qcm mit der Volum-

vermehrung in cbcm multiplizieren; das Volum pro Gramm ist für eine Anzahl von Dämpfen bekannt, da man ein bestimmtes Volum des gesättigten Dampfes direkt gewogen hat.

Betrachten wir als Beispiel 1 g Wasser von 100°. Das Volum des gesättigten Dampfes ist bei dieser Temperatur 1640 cbcm, das der Flüssigkeit etwas mehr als 1 cbcm, und der Druck des Dampfes 1 Atm. oder $1{,}014 \times 10^6$ Dyn pro qcm. Die äußere Arbeit beträgt daher 1660×10^6 Erg, entsprechend 40 Kalorien. Die gesamte Verdampfungswärme beträgt 537 Kalorien; daher haben 497 Wärmeeinheiten dazu gedient, um die innere Energie zu vergrößern.

Bei 121° ist die Spannkraft des gesättigten Dampfes 154 cm Quecksilber oder $2{,}05 \times 10^6$ Dyn pro qcm, etwas mehr als zwei Atmosphären. Das Volum von 1 g Wasser ist dann noch immer wenig mehr als 1 cbcm, das eines Grammes gesättigten Dampfes beträgt 830 cbcm, die Verdampfungswärme 522 Kalorien. Man findet für den Unterschied zwischen der inneren Energie eines Grammes Wasser und eines Grammes gesättigten Dampfes bei dieser Temperatur 481 Kalorien; er ist etwas kleiner als bei 100°.

Auf die Analogie, hinsichtlich der äußeren Arbeit, zwischen den jetzt und den in §§ 230 und 231 besprochenen Erscheinungen braucht wohl nicht besonders hingewiesen zu werden. Auch über den Mechanismus, durch den bei der Verdampfung Wärme verschwindet, können wir uns kurz fassen. Man muß sich vorstellen, daß es die Moleküle mit den größten Geschwindigkeiten sind, die eine Flüssigkeit beim Verdampfen verliert; wird keine Wärme zugeführt, so muß sie sich hierdurch notwendigerweise abkühlen. Was den gebildeten Dampf betrifft, so werden die Teilchen in diesem nicht mehr die große kinetische Energie haben, die sie vorher in der Flüssigkeit hatten; sie sind nämlich beim Verlassen derselben, wie wir sehen werden, anziehenden Kräften ausgesetzt gewesen, welche die Geschwindigkeit verkleinert haben. Außerdem werden, wenn der Dampf einen Kolben fortbewegt, die gegen denselben stoßenden Teilchen mit kleineren Geschwindigkeiten zurückkehren, und an diesem Verlust an kinetischer Energie wird auch die Flüssigkeit teilnehmen, da diese in fortwährender Wechselwirkung mit dem Dampf steht.

Die Abkühlung bei der Verdampfung einer Flüssigkeit ohne Wärmezufuhr findet bekanntlich manchmal Anwendung.

Bei der Verdichtung von Dampf zu Flüssigkeit wird ebensoviel Wärme entwickelt als beim umgekehrten Übergang verbraucht wird.

Es verdient beachtet zu werden, daß, da ein Gramm Wasser, wenn es bei der konstanten Temperatur von 100° in Dampf übergeht und dabei einen Kolben langsam fortbewegt, eine Arbeit von 1660×10^6 Erg (40 cal.) verrichtet, die „freie Energie" um diesen Betrag abnehmen muß (vgl. § 246). Während also die „innere Energie" des Dampfes größer ist als die der Flüssigkeit, gilt das Umgekehrte von der freien Energie.

§ 275. **Nutzeffekt einer Dampfmaschine.** Wenn man bei der durch Fig. 212 (§ 241) dargestellten Dampfmaschine die Spannkräfte (in Dyn pro qcm) im Kessel und im Kondensator mit p_1 und p_2 bezeichnet und das vom Kolben durchlaufene Volum v ccm beträgt, so ist die Arbeit bei einem Kolbenschlag $(p_1 - p_2) v$ Erg. Die Wärmemenge, welche dem Dampfkessel mitgeteilt werden muß, ist aber viel größer, als dieser Arbeit entspricht. Diese Menge ist sogar größer als $p_1 v / E$ (E das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit), denn außer dieser Anzahl von Kalorien müssen wir noch Wärme zuführen, um die innere Energie zu liefern, die der Dampf mehr hat als die Flüssigkeit. Bei der Verdichtung des Dampfes im Kondensator kommt nun die zuletzt genannte Wärmemenge wieder vollständig zum Vorschein und außerdem noch die Menge $p_2 v / E$, welche der Geschwindigkeitsvermehrung der Moleküle beim Anprallen gegen den nach unten gehenden Kolben entspricht.

Sind die absoluten Temperaturen $T_1 = 273 + 144 = 417°$, $T_2 = 273 + 20 = 293°$, so ist $p_1 = 4{,}05 \times 10^6$ (4 Atm.), $p_2 = 2{,}4 \times 10^4$. Um ein Gramm Wasser aus dem Kondensator auf die Temperatur des Dampfkessels zu erhitzen und es dann in Dampf zu verwandeln, sind, da die Verdampfungswärme unter den angenommenen Umständen 505 cal. beträgt, 629 cal. erforderlich. Das Volum von 1 g gesättigtem Wasserdampf, im Dampfkessel gebildet, ist 440 ccm. Hieraus folgt, daß die verrichtete Arbeit pro Gramm Dampf

$$(405 - 2) \times 10^4 \times 440 = 18 \times 10^8 \text{ Erg}$$

bedingt, woraus man ableiten kann, daß nur [illegible] der zugeführten Wärme in Arbeit umgesetzt werden.

Der Nutzeffekt einer vollkommenen umkehrbaren kalorischen Maschine, die zwischen den oben angenommenen Temperaturen wirkt, würde $(T_1 - T_2)/T_1 = (417 - 293)/417 = 124/417$, also ungefähr 30%, betragen. Man findet hierdurch den Satz bestätigt, daß der Nutzeffekt immer kleiner ist, als er bei einer vollkommenen umkehrbaren Maschine sein würde. Es verdient jedoch bemerkt zu werden, daß die Maschine, auf welche sich Fig. 212 bezieht, eine sehr schlechte sein würde. In Wirklichkeit kann man einen viel größeren Nutzeffekt erreichen.

§ 274. **Zusammenhang zwischen der Dampfspannung und der Temperatur.** Wenn sich in einem Zylinder unter einem Kolben eine Flüssigkeit befindet, die zum Teil in Dampf übergegangen ist, so daß ein Gleichgewichtszustand besteht, so kann man dieses System einen Carnotschen Kreisprozeß (§ 248) durchmachen lassen und die Formel (1) von § 249 anwenden. Indem man annimmt, daß die Temperaturen T_1 und T_2 unendlich wenig voneinander verschieden sind, ist man zu einem wichtigen Satz gekommen. Ist nämlich T die absolute Temperatur, p die Dampfspannung, welche Größe, wie wir bereits wissen, eine Funktion von T ist, dp/dT das Verhältnis zwischen gleichzeitigen unendlich kleinen Zunahmen der beiden Größen, v_1 das Volum der Masseneinheit Flüssigkeit, v_2 das der Masseneinheit Dampf, r die Verdampfungswärme, endlich E das mechanische Wärmeäquivalent, dann ist:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{E r}{T(v_2 - v_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Beziehung ist durch zahlreiche Messungen bestätigt worden. Betrachten wir z. B. Wasser von 100°. Dann ist $v_2 = 1642$ ccm, $v_2 = 1$ ccm und $T = 373$. Um dp/dT aus den Beobachtungen zu finden, bemerken wir, daß bei 100° $p = 1{,}0139 \times 10^6$ und bei 101° $p = 1{,}0507 \times 10^6$ ist. Könnte man annehmen, daß über ein Intervall von einigen Graden die Zunahmen des Druckes den Temperaturerhöhungen proportional sind, so würde $dp/dT = (1{,}0507 - 1{,}0139) \times 10^6 = 36800$ sein. Zieht man aber den Druck bei 99° von dem bei 100° ab, so erhält man 35800, so daß obige Annahme nicht ganz richtig ist. Der wirkliche Wert von dp/dT bei 100° ist 36300.

Substituiert man dies nebst den anderen angegebenen Zahlen in der Formel, und setzt man $r = 537$, so findet man $E = 415 \times 10^6$. Dies Resultat ist eine merkwürdige Bestätigung der Gleichung (1) von § 249. Daß es von dem früher für E gegebenen Wert etwas abweicht, kann Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden.

Ein Kreisprozeß, der aus zwei unendlich kleinen isothermischen und zwei ebenfalls unendlich kleinen adiabatischen Veränderungen besteht, und bei dem wir annehmen, daß stets sowohl Flüssigkeit als Dampf anwesend bleibt, kann in derselben Weise wie der Kreisprozeß eines Gases graphisch dargestellt werden. Man bekommt dann Fig. 224, die hinsichtlich der Buchstabenbezeichnung mit Fig. 215 (S. 381) übereinstimmt. Die Linien AB und CD sind hier gerade und horizontal, da bei einer Ausdehnung oder Zusammendrückung bei konstanter Temperatur der Druck sich nicht ändert. Die adiabatische Linie BC läuft auch jetzt nach unten, denn wenn das Volum vergrößert wird, ohne daß von außen Wärme zugeführt wird, so wird die Temperatur sinken und also der Druck abnehmen. Obgleich die Linie krumm ist, können wir den unendlich kleinen Teil derselben, den wir nötig haben, als gerade betrachten. Dasselbe gilt von der Linie AD.

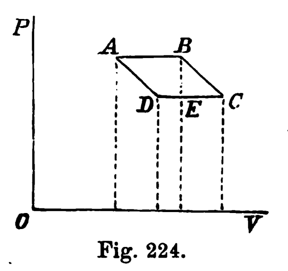


Fig. 224.

Die äußere Arbeit wird durch den Inhalt des Vierecks $ABCD$ dargestellt, welches als ein Parallelogramm aufgefaßt werden kann, also durch das Produkt von AB und BE, wenn wir BE senkrecht auf OV ziehen.

Nun ist AB die Volumvermehrung bei der isothermischen Ausdehnung, die wir, da sie unendlich klein ist, dv nennen wollen, und BE ist der Unterschied der Werte, die der Druck p bei den Temperaturen T_1 und T_2 hat. Diese sind unendlich wenig voneinander verschieden; wir wollen ihre Differenz mit dT bezeichnen und unter dp die derselben entsprechende Veränderung des Druckes verstehen. Die Arbeit wird dann

$$W = dp\,dv\,.$$

Ist also E das mechanische Wärmeäquivalent, so ist die in mechanische Energie umgesetzte Wärmemenge

$$\frac{dp\,dv}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Anderseits können wir einen Ausdruck für Q_1 aufstellen. Zu diesem Zwecke berechnen wir, wieviel Wasser bei der durch AB dargestellten Ausdehnung verdampft. Wenn 1 g gesättigter Wasserdampf bei der dann bestehenden Temperatur das Volum v_2 und 1 g Wasser das Volum v_1 einnimmt, so würde, wenn 1 g Wasser verdampft, das

Volum um $v_2 - v_1$ zunehmen. Es hat aber um dv zugenommen und es sind also

$$\frac{dv}{v_2 - v_1} \text{ Gramm}$$

Wasser verdampft. Nennen wir nun die Verdampfungswärme r, so wird

$$Q_1 = \frac{r\,dv}{v_2 - v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Das Verhältnis von (4) und (5) ist der Nutzeffekt. Anderseits kann man diesen, wenn man $T_1 - T_2$ durch dT und T_1 durch T ersetzt, ausdrücken durch

$$\frac{dT}{T}.$$

Man kommt so zu der oben mitgeteilten Beziehung (3).

§ 277. **Zusammenhang zwischen Schmelzpunkt und Druck.** Wir betrachten jetzt das Gleichgewicht zwischen einem festen Körper und der Flüssigkeit, die aus ihm durch Schmelzen entsteht, und nehmen zunächst an, daß sich das System unter einem gegebenen Druck befindet. Die beiden Phasen können dann nur bei einer bestimmten Temperatur T, die man den *Gefrierpunkt* oder *Schmelzpunkt* nennt, nebeneinander bestehen. Für Wasser und Eis ist unter dem Druck *einer* Atmosphäre diese „Gleichgewichtstemperatur" 0^0; dies ist also die Temperatur von *schmelzendem* oder *feuchtem* Eis.

Der Schmelzpunkt T ist also eine Funktion des Druckes p, ähnlich wie die Temperatur, bei welcher Wasser und Dampf miteinander im Gleichgewicht sein können, von dem Druck abhängt. Ebenso wie man nun in diesem letzteren Fall sagen kann, daß umgekehrt der Druck (Dampfspannung) von der Temperatur abhängt, kann man auch für das aus dem festen Körper und der Flüssigkeit bestehende System sagen, daß bei gegebener Temperatur das Gleichgewicht nur bei einem ganz bestimmten Druck bestehen kann. Das Gleichgewicht ist also dem zwischen Wasser und Dampf sehr ähnlich, und diese Ähnlichkeit geht so weit, daß für die Beziehung zwischen dem Druck p und dem Schmelzpunkt T (absolute Temperatur) eine Formel gilt, die genau mit der Gleichung (3) übereinstimmt.

Diese Formel können wir in der Gestalt

$$dT = \frac{T(v_2 - v_1)}{E\,r}\,dp \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

schreiben.

Hierin ist v_1 das Volum der Masseneinheit des festen toffes, v_2 das Volum der Masseneinheit der Flüssigkeit und r ie Schmelzwärme (§ 136).

Nach dieser Gleichung entspricht jeder Zunahme des 'ruckes (dp positiv) eine Erhöhung oder Erniedrigung des chmelzpunktes (dT positiv oder negativ) je nachdem $v_2 >$ ler $< v_1$ ist. Es kommt also auf die Veränderung des Volums eim Schmelzen an.

Viele Stoffe dehnen sich beim Schmelzen aus, und diese hmelzen unter erhöhtem Druck erst bei einer höheren Temperar. Wasser dagegen dehnt sich aus, wenn es gefriert; das olum nimmt dann ungefähr um $9\,^0/_0$ zu (wobei, wie sich bei elen Erscheinungen zeigt, eine große Kraft ausgeübt werden nn). Im Zusammenhang hiermit steht nun, daß der Gefriernkt von Wasser bei Erhöhung des Druckes erniedrigt wird.

Für Wasser und Eis ist $T = 273$, $v_1 = 1{,}09$, $v_2 = 1{,}00$, $= 79$; man findet also

$$dT = -7 \times 10^{-9}\, dp.$$

Nimmt man nun an, daß die Proportionalität der Gefriernktserniedrigung mit der Druckvermehrung auch noch gilt, nn diese letztere eine Atmosphäre, d. h. eine Million Dyn pro m beträgt, so findet man für die Gefrierpunktserniedrigung i einer Druckerhöhung von 1 Atmosphäre

$$7 \times 10^{-9} \times 10^{16} = 0{,}007 \text{ Grad.}$$

Dieses Resultat ist durch die Beobachtung in befriedigenr Weise bestätigt worden.

Wir können jetzt auch ohne Mühe einsehen, daß wirklich, e bereits erwähnt wurde, bei dem System Wasser, Eis zu ler Temperatur (die übrigens nur sehr wenig von 0^0 verhieden sein kann) ein bestimmter Druck gehört. Es läßt sich B. zeigen, daß der Druck in einem Gemisch von Eis und asser, das wir genau auf 0^0 halten, von selbst gleich einer mosphäre wird, wenn man das System sich selbst überläßt, 'ausgesetzt, daß die Umstände nicht so beschaffen sind, daß weder sämtliches Wasser erstarrt oder sämtliches Eis schmilzt. nken wir uns nämlich das Gemisch in ein Gefäß von unänderlichem Volum eingeschlossen, das es zwar vollständig 'üllt, aber in dem es einen kleineren Druck als eine Atmo-

sphäre ausübt, so würde die Temperatur, die wir auf 0^{0} einstellen, etwas niedriger sein als der Gefrierpunkt, der dem wirklich bestehenden Druck entspricht. Es würde also etwas Wasser gefrieren und, da sich hierbei der Stoff ausdehnt, wird die Flüssigkeit zusammengedrückt und der Druck erhöht werden.

In derselben Weise wird auch, wenn die Temperatur ein wenig von 0^{0} verschieden ist, ein solcher Druck entstehen, daß die Temperatur wieder der Schmelzpunkt unter diesem Druck ist.

Aus der besonderen Eigenschaft des Eises, die wir hier kennen lernten, können verschiedene Erscheinungen erklärt werden. Wenn man z. B. einen dünnen Kupferdraht um ein Stück Eis von 0^{0} schlägt, ähnlich wie ein Seil um eine Rolle, und an die Enden Gewichte hängt, so schneidet der Draht durch das Eis hindurch, aber über dem Draht wird neues Eis gebildet, so daß der Block zum Schluß *ein* Ganzes geblieben ist.

Hiervon kann man sich in folgender Weise Rechenschaft geben. Wir denken uns den Draht von einer äußerst dünnen Wasserschicht umgeben, die ihn von dem Eise trennt. In jedem Punkte der Fläche, in welcher diese Schicht das Eis berührt, wird nun die Temperatur entstehen, die dem vorhandenen Druck entspricht; da dieser letztere an der Unterseite des Drahtes höher ist als an der Oberseite, so wird die Temperatur unten niedriger sein als oben. Es findet daher durch den Draht eine Wärmeleitung von oben nach unten statt und dies hat zur Folge, daß fortwährend an der Unterseite Eis schmilzt und an der Oberseite Wasser gefriert, wodurch die genannte Temperaturverteilung, wenn sie einmal entstanden ist, bestehen bleibt.

§ 278. **Zusammendrückung von Wasserdampf bei konstanter Temperatur.** Wir kehren jetzt zu den Dämpfen zurück und wollen die Verdichtung derselben zu Flüssigkeit näher betrachten. Denken wir uns ein Gramm Wasserdampf, welches unter einem Kolben in einem Zylinder fortwährend auf einer Temperatur von 100^{0} gehalten wird. Wir heben zuerst den Kolben so hoch, daß der Dampf einen sehr kleinen Druck ausübt, und drücken ihn dann nach innen. Anfangs hat der Dampf alle Eigenschaften eines Gases und befolgt

ziemlich genau das Boylesche Gesetz; bei weiterer Zusammendrückung beobachtet man jedoch immer größere Abweichungen von diesem Gesetz.

Man kann den Zusammenhang zwischen dem Volum und dem Druck durch eine Kurve *A B* (Fig. 225) darstellen, wenn man die Werte des Volums durch die Abszissen und die des Druckes durch die Ordinaten angibt (vgl. § 242). Die Linie, welche man dann erhält (*isothermische Linie*), nähert sich nach rechts asymptotisch der Abszissenachse *O V* und sendet im Punkt *B*, der durch seine Lage das Volum und den Druck darstellt, wenn der Dampf gesättigt geworden ist.

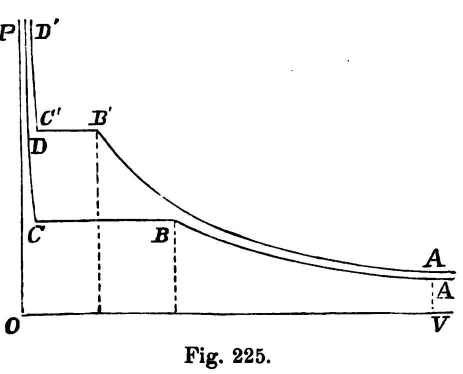


Fig. 225.

Da die Dichte des gesättigten Dampfes experimentell bestimmt ist, können wir angeben, wieviel der Körper vom Boyleschen Gesetz abweicht. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß bei kleinen Dichten die Avogadrosche Regel anwendbar ist, so daß die relative Dichte des Dampfes in bezug auf Wasserstoff durch das halbe Molekulargewicht angegeben wird, also = 9 ist. Wenn man beachtet, daß die Masse von 1 ccm Wasserstoff bei 0° und 760 mm Druck 0,0000896 g beträgt, findet man, daß z. B. bei einem Druck von 1 mm Quecksilber das Volum des betrachteten Gramms Wasserdampf

$$\frac{760 \times 1{,}366}{9 \times 0{,}0000896} = 1{,}287 \times 10^6 \text{ ccm}$$

ist. Wenn nun das Boylesche Gesetz genau befolgt würde, so müßte das Volum des gesättigten Wasserdampfes 760mal kleiner sein, d. h. gleich 1690 ccm. Es ist aber nur 1640 ccm, d. h. um 3 % kleiner.

Im Vergleich mit Wasserstoff von derselben Temperatur und Spannung ist die Dichte des gesättigten Dampfes nicht mehr 9, sondern 9,3.

In der Fig. [illegible] die Abweichung vom [illegible] Gesetz durch [illegible] der Linie [illegible] Bei demselben Punkt [illegible] kommt [illegible] wird.

Die beschriebenen [illegible] [illegible]

[illegible] wären.

[illegible] der Dampf [illegible] verschwunden ist. Während [illegible] Zusammendrückung hat der [illegible] anwesende [illegible] Dichte, da auch [illegible] kon[illegible] gerade Linie [illegible] parallel zur [illegible] Die [illegible] dieses Stückes liegt in einer [illegible] 1600 mal kleiner als [illegible] ist, zur [illegible] Entfernung stark vergrößert dargestellt [illegible] weiteren Verlauf CD der Linie sicht[illegible] letztere Teil stellt die Volumveränderung [illegible] Wasser noch erleiden kann, wegen der [illegible]barkeit läuft CD sehr steil nach oben.

[illegible] isothermische Linie auch für [illegible] konstruieren. Die Linie $ABCD$ [illegible] Temperatur von 121°. Die Ab[illegible] das Volum eines Grammes ge[illegible] diese Temperatur an und ist also [illegible] während die Ordinate von B [illegible] als die von B. Das Stück [illegible] aber so wenig, daß der Abstand [illegible] gewesen wäre, wenn [illegible] hätten.

[illegible] von Boyleschen Gesetz [illegible] daß das Volum eines Grammes

Wasserdampf unter einem Druck von 1 mm Quecksilber jetzt beträgt

$$\frac{760\,(1 + 121 \times 0{,}00366)}{9 \times 0{,}0000896} = 1{,}360 \times 10^6 \text{ ccm.}$$

Würde das Boylesche Gesetz befolgt, so müßte der gesättigte Dampf mit seiner Spannkraft von 1539 mm einen Raum von

$$\frac{1{,}360 \times 10^6}{1539} = 884 \text{ ccm}$$

einnehmen.

Das wirkliche Volum ist aber 833 ccm, d. h. ungefähr um 6% kleiner. Die Dichte des gesättigten Dampfes im Vergleich mit Wasserstoff von derselben Temperatur und Spannung ist jetzt 9,6.

Aus diesen Zahlen geht hervor, daß die Abweichung vom Boyleschen Gesetz bei 121° größer ist als bei 100°, was allerdings zu erwarten war, da bei der ersteren Temperatur die Dichte des gesättigten Dampfes am größten ist.

Umgekehrt werden bei Temperaturen unter 100° die Abweichungen kleiner und kann man von ihnen z. B. zwischen 0° und 20° absehen. Infolgedessen kann man leicht berechnen wieviel Wasserdampf in einem gewissen Volum Luft z. B. bei 15° anwesend sein kann. Man sucht in einer Tabelle das Maximum der Spannkraft bei dieser Temperatur auf, berechnet wieviel Gramm Wasserstoff der gegebene Raum enthalten würde, wenn dieses Gas bei 15° unter einen Druck gleich diesem Maximum gebracht würde, und multipliziert das Resultat mit 9, der relativen Dichte von Wasserdampf in bezug auf Wasserstoff.

§ 279. **Isothermische Zusammendrückung von Kohlensäure.** Wenn man Kohlensäuregas in eine dickwandige Glasröhre einschließt und durch Einpressen von Quecksilber zusammendrückt, so beobachtet man bei nicht zu hohen Temperaturen ähnliche Erscheinungen wie diejenigen, welche für Wasserdampf beschrieben wurden. *ABCD* (Fig. 226) ist die Isotherme der Kohlensäure für 13,1°; *A'B'C'D'* für 21,5°. Das Maximum der Spannkraft des Kohlensäuredampfes ist bei diesen Temperaturen ungefähr 47 und 65 Atmosphären.

Ein Blick auf Fig. 225 lehrt, daß bei 121° der Unterschied in den Eigenschaften von Wasser und gesättigtem Wasserdampf kleiner ist als bei 100°, was bereits hinsichtlich der inneren Energie in § 274 hervorgehoben wurde. Bei noch höheren Temperaturen würde der Unterschied noch kleiner werden.

Fig. 226 lehrt uns, daß bei der Kohlensäure von 13,1° die Eigenschaften der Flüssigkeit und des gesättigten Dampfes noch weniger voneinander verschieden sind als bei Wasser, selbst von 121°. Das Volum der flüssigen Kohlensäure ist nämlich ungefähr $^1/_5$ des Volums des Dampfes. In der Tat gleicht die flüssige Kohlensäure mehr einem Gas als das Wasser; sie ist in viel höherem Grade zusammendrückbar. Anderseits nähern sich die Eigenschaften des gesättigten Dampfes mehr als beim Wasserdampf den Eigenschaften einer Flüssigkeit, wie aus der großen Abweichung vom Boyleschen Gesetz hervorgeht. Das Produkt aus Druck und Volum sinkt während des Zusammendrückens, das durch die Linie AB dargestellt wird, auf beinahe $^3/_5$ des ursprünglichen Betrages.

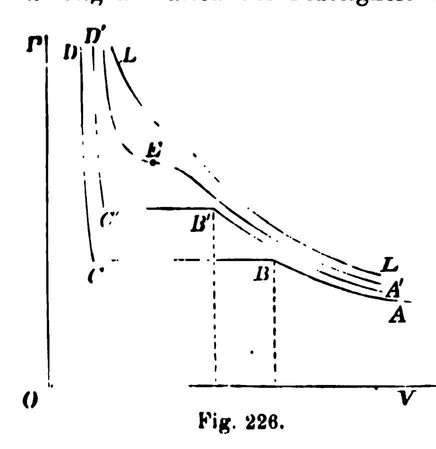


Fig. 226.

§ 280. Kritische Temperatur. Bei 21,5° sind die Dichten der flüssigen Kohlensäure und des gesättigten Kohlensäuredampfes einander noch mehr angenähert als bei 13,1°, und es liegt die Frage nahe, ob vielleicht bei noch höheren Temperaturen der Unterschied ganz verschwindet. Dies ist in der Tat der Fall. Wenn die Temperatur auf 30,9° gestiegen ist, besteht kein Unterschied mehr zwischen dem gesättigten Dampf und der Flüssigkeit; aus den Erscheinungen beim Zusammendrücken fällt dann der durch die gerade Linie BC dargestellte Teil weg; der Stoff zerfällt nicht mehr in einen dampfförmigen und einen flüssigen Teil, sondern auf die durch AB dargestellte Zusammendrückung folgt unmittelbar die

durch CD dargestellte. Die Isotherme für 30,9° läuft nur noch in einem einzigen Punkt E horizontal.

Auch bei jeder Temperatur über 30,9° bleibt die Kohlensäure beim Zusammendrücken homogen; auf eine solche Temperatur bezieht sich die Line LL.

Die Temperatur, über der ein Stoff beim Zusammendrücken immer homogen bleibt, wird die „kritische Temperatur“ genannt. Während unter derselben der Körper sich in zwei Phasen von verschiedener Dichte spalten kann, die nebeneinander bestehen können und von denen die eine „Flüssigkeit“ und die andere „Dampf“ genannt wird, besteht dieser Unterschied über der kritischen Temperatur nicht mehr; man kann dann je nach dem Gedanken, von dem man sich leiten läßt, dem Stoff den einen oder den anderen Namen geben..

Wird z. B. Kohlensäuregas bei 35° stark zusammengedrückt, so ist man geneigt zu sagen, daß es stets ein Gas bleibt, da man keine Abscheidung einer flüssigen Schicht oder von Tröpfchen beobachtet. Aber schließlich ist doch eine Dichte und infolgedessen ein Lichtbrechungsvermögen entstanden, wie sie bei Flüssigkeiten vorkommen; ein Beobachter, welcher das Glasgefäß betrachtet, in welchem die stark verdichtete Kohlensäure enthalten ist, wird also meinen, daß er es mit einer Flüssigkeit zu tun habe. Übrigens hätte die Kohlensäure auch auf einem anderen Wege in denselben Zustand gebracht werden können. Man hätte nämlich mit flüssiger Kohlensäure von etwa 21,5° anfangen und diese bei konstantem Volum auf 35° erwärmen können. Man würde dann nichts Besonderes geschehen sehen und geneigt sein, noch immer von einer Flüssigkeit zu sprechen.

Der Unterschied im Verhalten von Wasser und von Kohlensäure hängt damit zusammen, daß bei Wasser die kritische Temperatur viel höher liegt. Man hat sie auf 400° geschätzt.

§ 281. **Verdichtung von Gasen zu Flüssigkeiten.** Will man ein Gas in den flüssigen Zustand bringen, d. h. will man eine flüssige Schicht, Tröpfchen oder auch nur einen Nebel entstehen sehen, so ist es nach dem Vorhergehenden nötig, das Gas unter die kritische Temperatur abzukühlen. Bei Sauerstoff ist diese letztere —118°, bei Wasserstoff — 238°. Hierin

liegt der Grund, daß diese Körper lange Zeit allen Versuchen, sie zu Flüssigkeit zu verdichten, widerstanden haben.

In den letzten Jahren hat man im Hervorbringen niedriger Temperaturen große Fortschritte gemacht; alle Gase, zuletzt der Wasserstoff und das Helium, sind infolgedessen als deutlich vom Dampf getrennte Flüssigkeitsschichten erhalten worden.

Um die Temperatur soweit zu erniedrigen als bei diesen Untersuchungen nötig war, hat man zwei Mittel angewandt. Zunächst kann man ein stark zusammengedrücktes Gas sich plötzlich ausdehnen lassen. Wir sahen bereits in § 229, daß hierbei die Temperatur sinkt, weil eine äußere Arbeit verrichtet werden muß, und können jetzt hinzufügen, daß, wenn man mit einer großen Dichte anfängt, eine Ursache hierfür auch darin liegt, daß die anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen überwunden werden müssen. Wir bemerken hierbei, daß es nicht gut ausführbar ist, durch eine einzige Ausdehnung eine sehr niedrige Temperatur zu erreichen. Dies gelingt erst, wenn man eine erste, verhältnismäßig geringe Abkühlung benutzt, um die Anfangstemperatur bei der Entspannung einer folgenden Gasmenge zu erniedrigen. Man läßt zu diesem Zwecke das entweichende Gas die Zuleitungsröhre des zusammengedrückten Gases entlang strömen. Es ist möglich, in dieser Weise Luft so stark abzukühlen, daß sie flüssig wird. Bei den Apparaten von Linde wird dies Prinzip angewandt.

Das zweite Mittel besteht darin, daß man eine Flüssigkeit, die selbst durch die Verdichtung eines Gases entstanden ist, schnell verdampfen läßt. Da die Verdampfungswärme (§ 274) dann der Flüssigkeit entzogen werden muß, so muß die Temperatur derselben sinken, und dies wird so weit gehen, bis das Maximum der Spannkraft des Dampfes gleich dem Druck geworden ist, dem der Körper unterworfen ist. So würde man z. B. dadurch, daß man Wasser verdampfen läßt und den Dampf [illegible] weggesaugt, so daß der Druck nicht über 6 mm Queck[illegible], bewirken können, daß sich das Wasser auf [illegible] [illegible]ige Luft, dem Atmosphärendruck ausgesetzt, [illegible] [illegible]er Weise die Temperatur -192° an. Dadurch, [illegible] [illegible] schnell absaugt kann man bewirken, daß [illegible] bis unter die kritische Temperatur des Wasser-

Wir bemerken hierbei, daß flüssige Kohlensäure, unter den Atmosphärendruck gebracht, fest wird, bevor die Gleichgewichtstemperatur erreicht ist.

Auf dem zweiten der genannten Hilfsmittel beruht die Kaskadenmethode zur Erzielung niedriger Temperaturen, die u. a. im Laboratorium von Kamerlingh Onnes zu Leiden angewandt wird. Man benutzt hier Methylchlorid, Äthylen und Sauerstoff, mit welchen Stoffen stufenweise die niedrigen Temperaturen hervorgebracht werden. Methylchlorid kann bei gewöhnlicher Temperatur durch Zusammendrücken flüssig gemacht werden. Mit Hilfe einer Saug- und Druckpumpe läßt man die entstandene Flüssigkeit unter niedrigem Druck verdampfen und verdichtet den Dampf wieder zu Flüssigkeit, die nach dem Gefäß, in dem die Verdampfung stattfindet, zurückströmt. In der verdampfenden Flüssigkeit, die sich auf -70^0 abkühlt, liegt nun eine Röhre, in welcher sich Äthylen unter einem Druck von 8 Atmosphären befindet. Dieses Gas, dessen kritische Temperatur 10^0 ist, wird dann flüssig und kann durch Verdampfen unter niedrigem Druck wieder eine viel niedrigere Temperatur (-130^0) liefern. Eine Pumpe sorgt wieder für das Absaugen und Zusammendrücken dieses Gases. Schließlich liegt in dem Gefäß, in welchem das Ätylen verdampft, eine Röhre mit Sauerstoff (krit. Temp. -118^0) unter hohem Druck. Der Sauerstoff wird in dieser Röhre flüssig, und durch Verdampfen der Flüssigkeit unter einem Druck von 3 mm kann eine Temperatur von ungefähr -240^0 erreicht werden.

Mit flüssigem Wasserstoff, der unter niedrigem Druck verdampft, hat man eine Temperatur von -258^0 erreicht.

Die Saug- und Druckpumpen, welche bei der beschriebenen Methode gebraucht werden, können als die Umkehrung von kalorischen Maschinen betrachtet werden. Kehrte man z. B. die in Fig. 212 (§ 241) dargestellte Dampfmaschine um (§ 248), so würde die Temperatur in dem Gefäß, in welchem bereits die niedrigste Temperatur herrscht, noch weiter sinken.

§ 282. Theorie von van der Waals. Wir haben bei der Besprechung der kinetischen Gastheorie (§ 220) angenommen, daß sich die Moleküle nicht merklich anziehen und daß sie im Vergleich mit den Zwischenräumen sehr klein sind. Es ist aber klar, daß beim Zusammendrücken eines Gases die anziehenden Kräfte immer mehr in den Vordergrund treten werden

und daß auch, wenn die Teilchen eine gewisse Ausdehnung haben, ihr Gesamtvolum endlich nicht mehr dem vom Gas eingenommenen Volum gegenüber vernachlässigt werden kann. Durch Berücksichtigung dieser beiden Umstände ist es van der Waals gelungen, von verschiedenen in den letzten Paragraphen erwähnten Tatsachen eine Erklärung zu geben und außerdem zu vielen anderen wichtigen Schlüssen zu kommen. Wir können diese Theorie hier nicht vollständig behandeln, sondern nur auf einige wichtige Punkte hinweisen.

Wie bereits erwähnt wurde (§ 278), werden die bei Wasserdampf und Kohlensäure beobachteten Abweichungen vom Boyleschen Gesetz durch die molekulare Anziehung erklärt; diese hat zur Folge, daß die Zusammendrückbarkeit größer ist, als es das Gesetz verlangt. Auch die Verdichtung zu einer Flüssigkeit muß als eine Folge der Anziehung betrachtet werden. Dagegen ist es der Ausdehnung der Moleküle zuzuschreiben, daß das Volum des Wassers, wenn der Druck um 1 Atmosphäre erhöht wird, um nicht mehr als 1/20000 des ursprünglichen Betrages abnimmt, und daß dieser Koeffizient bei Erhöhung des Druckes fortwährend kleiner wird, so daß, wie Amagat nachgewiesen hat, eine Erhöhung um 1 Atm., wenn der Druck bereits 3000 Atm. beträgt, nur noch eine Volumverminderung von 1/40000 zur Folge hat (das Volum ist dann $^9/_{10}$ des Volums bei einem Druck von 1 Atm.). Es ist klar, daß, wenn die Moleküle selbst ein merkliches Volum einnehmen und nicht oder wenig zusammendrückbar sind, auch der höchste erreichbare Druck das Gesamtvolum nicht unter eine gewisse Grenze bringen kann. Diese verminderte Zusammendrückbarkeit bei hohen Drucken ist auch zu bemerken, wenn man über der kritischen Temperatur bleibt und also, wenn man es so nennen will, immer mit einem Gas zu tun hat. Bei Wasserstoff, bei dem die molekulare Anziehung sehr schwach ist, hat selbst bei gewöhnlichen Drucken die Ausdehnung der Teilchen einen überwiegenden [illegible] Gas weicht nämlich in entgegengesetzter Richtung [illegible] hlensäure vom Boyleschen Gesetz ab.

[illegible] der molekularen Anziehung kann noch [illegible] htung eine gute Vorstellung geben. Es [illegible] *die anziehenden Kräfte, welche die Moleküle* [illegible] *nur auf sehr geringe Entfernungen, weil unter*

0,001 mm bemerkbar sind. Alle Teilchen, welche auf ein bestimmtes Molekül P wirken können, liegen also innerhalb einer gewissen äußerst kleinen um P als Mittelpunkt beschriebenen Kugel. Liegt nun das Teilchen P im Innern einer Flüssigkeitsmasse (Fig. 227), so fällt diese Kugel, die *Wirkungssphäre,* ganz in die Flüssigkeit. Da sie, wie wir annehmen wollen, gleichmäßig mit Stoff gefüllt ist, *heben sich alle auf P wirkenden Anziehungen einander auf.*

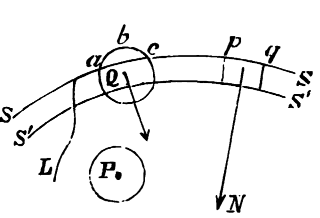


Fig. 227.

Anders verhält es sich mit einem Molekül Q, welches in einer Entfernung kleiner als der Radius ϱ der Wirkungssphäre von der Oberfläche S S liegt. Von der um ein solches Teilchen beschriebenen Wirkungssphäre liegt nämlich ein Teil a b c außerhalb S S. Wäre auch dieser Teil mit Flüssigkeit gefüllt, so würden sich alle auf Q wirkenden Kräfte einander aufheben, da aber jetzt a b c leer ist, wirkt auf Q eine resultierende Kraft, die in der Richtung der Normalen zur Oberfläche nach innen, d. h. nach der Seite der Flüssigkeit gerichtet ist. Dies gilt von allen Teilchen in einer Schicht von der Dicke ϱ (die sogenannte *Grenzschicht*) zwischen S S und der Fläche S' S'. Folglich: *während auf Teilchen im Innern der Flüssigkeit keine resultierende Kraft wirkt, werden alle Moleküle in der Grenzschicht in einer Richtung senkrecht zur Oberfläche nach innen gezogen.*

Zu demselben Schluß kommt man auch, wenn man anstatt einer Flüssigkeit ein Gas mit merkbarer molekularer Anziehung betrachtet.

Die Anwendung auf den Gegenstand, mit dem wir uns soeben beschäftigten, ist sehr naheliegend. Soll ein in Bewegung befindliches System von Molekülen in einem begrenzten Raum eingeschlossen bleiben, so müssen die Teilchen, sobald sie an die Oberfläche desselben gekommen sind, wieder nach innen getrieben werden. Die dazu erforderliche Kraft ist bei einem idealen Gas ohne molekulare Anziehung der durch eine Wand ausgeübte Druck. Ziehen sich aber die Moleküle an, so wird auch *hierdurch* die Grenzschicht nach innen getrieben und ist daher ein *kleinerer* äußerer Druck nötig, um den Körper in dem

ihm angewiesenen Volum zu halten. In dem Maße, wie nun die Dichte größer wird, nimmt auch die Kraft zu, mit der die Grenzschicht nach innen gezogen wird, und die Theorie lehrt, daß es Fälle geben muß, in denen diese Kraft sogar *mehr* als hinreichend ist, um eine Ausdehnung des Stoffes zu verhindern. Dann muß noch durch äußere Kräfte an der Oberfläche des Körpers *gezogen* werden, es muß also ein negativer Druck bestehen, wenn nicht durch die Anziehung das Volum kleiner werden soll. Diesen Fall eines negativen Druckes lernten wir bereits in § 205, f) kennen.

So gibt die Theorie von van der Waals von vielen Eigenschaften, nicht allein von Gasen und Dämpfen, sondern auch von Flüssigkeiten Rechenschaft. Sie wirft auch Licht auf die Bedingungen, unter denen ein Stoff aus dem einen Aggregatzustand in den anderen übergeht. Sie lehrt, daß unterhalb einer gewissen Temperatur zwei Zustände von verschiedener Dichte unter demselben Druck möglich sind, von denen man den einen gasförmig und den anderen flüssig nennen kann, und daß über dieser Temperatur der Stoff beim Zusammendrücken homogen bleibt; kurzum, sie erklärt das Bestehen einer *kritischen Temperatur*.

Wie hoch diese ist, hängt sowohl von der molekularen Ausdehnung als auch von der Größe der molekularen Anziehung ab, und im allgemeinen bestimmen diese beiden Faktoren viele Einzelheiten in dem Verhalten eines Körpers. Umgekehrt kann man nun auch aus experimentellen Daten einen Schluß ziehen auf das Volum der Teilchen und den Betrag der Anziehung.

So hat man gefunden, daß die Kraft, mit der die Grenzschicht von Wasser nach innen gezogen wird, gleich einem Druck auf die Oberfläche von ungefähr 10000 Atm. ist, also für 1 qcm der Oberfläche nahezu gleich einem Gewicht von 10000 kg. Man muss sich vorstellen, daß in einer Flüssigkeit wie Äther von 0° ungefähr der dritte Teil des gesamten Raumes wirklich von den Molekülen eingenommen wird, in Luft bei 0° und 760 mm Druck ist dies mit nicht mehr als 1/2000 des gesamten Volums der Fall.

Von der Größe der Gasteilchen hängt, wie bereits früher bemerkt wurde, auch die Länge des Weges ab, den ein Molekül durchlaufen kann, ohne mit einem anderen zusammenzustoßen.

Aus Messungen über Diffussion, Wärmeleitung und innere Reibung kann also auch etwas über die Ausdehnung der Moleküle gefunden werden. Eine nähere Untersuchung lehrt, daß es die gesamte Oberfläche der Moleküle eines Gases ist, die man auf diese Weise kennen lernen kann.

Ist aber von einer Anzahl gleichgroßer Kugeln das gesamte Volum und die gesamte Oberfläche bekannt, so kann man durch eine einfache Berechnung die Anzahl dieser Körper und die Größe jedes einzelnen bestimmen. Wenn man diese Berechnung auf die Gasmoleküle anwendet, kommt man zu den folgenden Schätzungen. Für die Anzahl der Moleküle in 1 cbcm Luft bei 0^0 und 76 cm eine Zahl von 20 Ziffern; für den mittleren Abstand zweier aufeinanderfolgender Moleküle 25×10^{-8} cm, für die Dicke der Moleküle ungefähr $^1/_{10}$ dieser Länge und endlich für die Masse eines Atoms Wasserstoff 10^{-24} Gramm.

§ 283. **Freie Energie einer Flüssigkeitsoberfläche.** Die anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen, die in der Theorie von van der Waals eine so wichtige Rolle spielen, haben auch in vielen Fällen einen Einfluß auf die *Form* einer Flüssigkeitsmasse. Wie es sich hiermit verhält, kann man aus der Theorie der freien Energie (§ 247) ableiten.

Auf ein Teilchen, welches sich anfangs an der Oberfläche einer Flüssigkeit befindet und sich dann auf irgendeiner Linie L (Fig. 227) nach innen bewegt, wirkt, solange es sich noch in der Grenzschicht SS' befindet, eine Kraft nach innen, die eine positive Arbeit verrichtet, aber bei der weiteren Bewegung heben sich die Anziehungen, welche auf das Teilchen wirken, einander auf und es wird daher keine Arbeit mehr verrichtet. Hieraus folgt, daß das Molekül, sobald es unter S' gekommen ist, immer dieselbe Energie der Lage in bezug auf die anderen Teilchen hat, einerlei wo es sich befindet, aber daß es in der Grenzschicht eine größere potentielle Energie hat, und zwar die größte, wenn es in der Oberfläche S liegt. Da dasselbe von jedem Molekül gilt, muß die gesamte Energie der Lage, welche die Teilchen infolge ihrer gegenseitigen Anziehung haben, um so größer sein, je mehr Teilchen in der Grenzschicht liegen, also je größer die Oberfläche der Flüssigkeitsmasse ist. Diese Oberfläche kann bei einer gegebenen Menge je nach der

grund. Wenn auf solche Häutchen auch keine anderen äußeren Kräfte wirken, so nimmt die freie Energie, von der oben die Rede war, ab; *das Häutchen zieht sich zusammen, so daß die Oberfläche so klein als möglich wird.* Bei ebenen Häutchen, die man in einem Rähmchen von Eisendraht erzeugen kann, läßt sich dies zeigen, indem man einen mit den Enden zusammengeknüpften dünnen Faden auf das Häutchen legt und dieses dann innerhalb des Fadens durchsticht. Das Häutchen außerhalb des Fadens zieht sich soviel zusammen als der Faden es zuläßt und spannt diesen zu einem Kreis.

Die hierbei wirksame Kraft nennt man die *Spannung* des Häutchens; die Größe derselben hängt in einfacher Weise mit der Kapillaritätskonstanten H zusammen. Es sei $abcd$ (Fig. 228) ein zweimal in einer Ebene umgebogener Eisendraht und ef ein verschiebbarer Draht, der mit dem ersten ein Rechteck bildet, in welchem man ein Häutchen erzeugen kann. Läßt man nun diesen Draht, den man z. B. mit der Hand festhält, sehr langsam von $e'f'$ nach ef gehen, so daß die Oberfläche (die beiden Seiten zusammengerechnet) der Flüssigkeit um $2ee' \times ef$ abnimmt, und bleibt hierbei die Temperatur konstant, so verrichtet (§ 246) das Häutchen eine Arbeit $2ee' \times ef \times H$. Anderseits ist die Arbeit, wenn K die Kraft bedeutet, mit der das Häutchen den Draht ef nach innen zieht, $ee' \times K$. So findet man $K = 2ef \times H$ und für die Kraft, mit welcher das Häutchen auf die Längeneinheit des Drahtes wirkt, die *Spannung pro Längeneinheit*

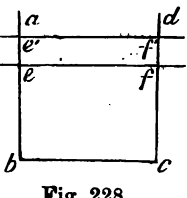


Fig. 228.

$$S = 2H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

c) Der Eisendraht oder die Drähte, zwischen denen ein Häutchen gebildet wird, können eine solche Form haben, daß das Häutchen nicht eben sein kann; *es nimmt aber stets, wenn an beiden Seiten das umgebende Gas denselben Druck ausübt, die Gestalt an, bei welcher die Oberfläche so klein als möglich ist.* Bei einer Verschiebung verrichten nämlich die betreffenden Drucke keine Arbeit; die freie Energie, die im vorigen Paragraphen betrachtet wurde, muß also wieder ein Minimum werden.

Ist z. B. das Häutchen zwischen zwei gleichgroßen hori-

zontalen kreisförmigen Ringen gebildet, deren Mittelpunkte übereinander liegen, so nimmt es nicht die Gestalt eines Zylinders an, weil durch eine Einschnürung in der Mitte die Oberfläche noch kleiner werden kann.

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Größe S nicht allein die Kraft bestimmt, mit der das Häutchen an dem Eisendraht ef (Fig. 228) zieht, sondern auch die Kraft, die es auf jeden Körper ausübt, mit dem es in Berührung ist, und ebenso diejenige, mit welcher der eine Teil des Häutchens auf den anderen wirkt. Man kann nämlich in Gedanken das Häutchen nach einer beliebigen Linie durchschneiden; was auf der einen Seite dieser Linie liegt, zieht an dem anderen Teil, und zwar in der Richtung senkrecht zu dieser Linie, und diese Wirkung ist pro Längeneinheit gleich S.

Da diese Kraft aus Wirkungen auf sehr kleine Entfernungen entspringt und man einen kleinen Teil eines gekrümmten Häutchens als eben betrachten kann, *besteht in einem gekrümmten Häutchen dieselbe Spannung wie in einem ebenen.*

d) *Bei einem kugelförmigen Häutchen, z. B. bei einer an eine Röhre angeblasenen Seifenblase zeigt sich die Spannung dadurch, daß die Blase, wenn die Röhre am Ende offen bleibt, nach und nach kleiner wird.* Schließt man die Röhre, so schreitet die Zusammenziehung fort, bis die Luft in der Blase auf einen gewissen Grad zusammengedrückt ist.

In der Theorie dieser Erscheinung muß man auf den Unterschied des Druckes auf der Innenseite und der Außenseite achten. Man kann jedoch davon zunächst noch absehen, wenn man Formveränderungen (z. B. Übergang eines Ellipsoids in eine Kugel) betrachtet, bei denen sich das Volum nicht ändert. Die Arbeit der äußeren Drucke ist nämlich dann gleich Null (§ 207). *Unter allen Formen von demselben Inhalt wird also die Seifenblase diejenige annehmen, bei welcher die Oberfläche ein Minimum ist, d. h. die Kugelform.*

Es sei nun R der Radius der Kugel und der Druck innerhalb des Häutchens sei um p größer als an der Außenseite. Nimmt dann bei einer unendlich kleinen umkehrbaren und isothermischen Zusammenziehung der Radius um δ ab, so ist die Verminderung der Oberfläche $16\pi R\delta$ und die des Volums $4\pi R^2\delta$. Für die Verminderung der freien Energie kann man also schreiben $16\pi RH\delta$ und für die durch das Häutchen verrichtete Arbeit $4\pi R^2 p\delta$. Wenn man diese Ausdrücke einander gleichsetzt, so findet man

$$p = \frac{4H}{R}, \qquad (8)$$

eine Beziehung, die man auch in folgender Weise aus der Betrachtung der Spannung ableiten kann.

Wir stellen uns vor, daß Gleichgewicht vorhanden ist; der Druck der Luft muß dann an der Innenseite p mehr betragen als an der Außenseite. Denkt man sich die Blase durch eine Ebene, die durch den Mittelpunkt geht, durchgeschnitten, so besteht auf dem Umfang zwischen den beiden Teilen eine Spannung $2\pi R S$. Diese Kraft muß gleich derjenigen sein, welche die eine Hälfte von der anderen zu trennen strebt und die nach § 203 gleich $\pi R^2 p$ ist. Mit Berücksichtigung der Formel (7) kommt man auf (8) zurück.

Man kann den Druck p mit einem Manometer bestimmen und hat dabei gefunden, daß er dem Radius R umgekehrt proportional und unabhängig von der Dicke des Häutchens ist. Daraus folgt, daß, wie auch die mitgeteilte Theorie erfordert, *die Spannung unabhängig von der Dicke ist.*

Dieses Resultat erscheint auf den ersten Blick befremdend, da bei einem dicken Häutchen auf beiden Seiten eines Durchschnittes mehr Moleküle liegen, die einander anziehen, als bei einem dünnen Häutchen. Man muß aber bedenken, daß die Spannung die *gesamte* Kraft zwischen den Teilen des Häutchens auf beiden Seiten des Durchschnittes ist. Diese Teile, ebenso wie im allgemeinen die Massen auf beiden Seiten einer durch eine Flüssigkeit gelegten Ebene, ziehen sich nicht nur einander an, sondern üben außerdem einen Druck aufeinander aus, in einer Weise, von der das in § 227 Gesagte eine Vorstellung geben kann. Daß nun die betreffende gesamte Kraft unabhängig von der Dicke des Häutchens werden kann, kann man durch die folgende Betrachtung erläutern.

In § 282 sahen wir, daß jedes Teilchen in der Grenzschicht nach innen gezogen wird; hieraus entspringt für jedes Element der Schicht, wie $p\,q$ in Fig. 227, eine gewisse Kraft N, und im Gleichgewichtszustand muß der Druck im Inneren der Flüssigkeit den äußeren Druck um einen gewissen Betrag übertreffen. Es sei nun (Fig. 229) $A\,B\,C\,D$ ein senkrechter Durchschnitt durch ein Flüssigkeitshäutchen, und die Dicke desselben betrage mehr als $2\,\varrho$, so daß die gesamte Masse in zwei Grenzschichten $A\,B\,a\,b$ und $C\,D\,c\,d$ und einen zwischen diesen beiden liegenden Teil zerfällt. $P\,Q$ stelle eine Ebene vor, die auf der Ebene der Zeichnung und auf $A\,B$ senkrecht steht, und richten wir unsere Aufmerksamkeit sowohl auf den Druck als auf die Anziehung, die die Teile des Häutchens auf beiden Seiten dieser Ebene aufeinander ausüben.

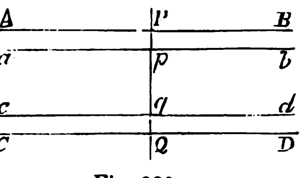


Fig. 229.

Man kann beweisen, daß für alle Elemente der Trennungsfläche, die zwischen p und q liegen, der Druck, der, wie wir sahen, im Inneren des Häutchens entsteht, gerade die Anziehung zwischen der Flüssigkeit auf beiden Seiten dieser Elemente aufhebt; aber mit einem Element von

Pp oder Qq verhält es sich anders. Sowohl der Druck als die Anziehung sind hier kleiner als zwischen p und q, aber von p nach P oder von q nach Q nimmt der Druck mehr ab als die Anziehung; für ein Element von Pp unmittelbar bei P ist der Druck gleich dem Druck der äußeren Luft, wovon wir bei dieser Betrachtung absehen, aber zwischen dem Stoff rechts und links von diesem Element besteht noch eine sehr merkliche Anziehung.

Durch dies alles kommt man zu dem Schluß, daß nur die Elemente zwischen P und p und zwischen Q und q etwas zu der erwähnten resultierenden Kraft beitragen. *Man muß die Spannung in den beiden Grenzschichten suchen und kann schließen, daß die Größe dieser Kraft unabhängig von der Dicke der zwischen diesen Schichten liegenden Flüssigkeit ist.*

Erst wenn die Dicke eines Häutchens unter 2ϱ sänke, würde die Spannung kleiner werden. Die Seifenblasen, bei denen man gefunden hat, daß p dem Radius R umgekehrt proportional ist, hatten also alle eine Dicke größer als 2ϱ.

Es wird nun auch klar sein, daß bei jeder Flüssigkeitsmasse eine Spannung in der Grenzschicht (*Oberflächenspannung*) besteht und daß diese halb so groß ist als die Spannung eines Häutchens.

Für die in diesem Paragraphen besprochenen Versuche benutzt man vorzugsweise eine Flüssigkeit (z. B. ein Gemisch von Seifenlösung und Glyzerin), die Häutchen von großer Beständigkeit gibt. Aber auch verschiedene andere Flüssigkeiten können Häutchen bilden. Bekannt sind z. B. die Blasen, welche durch die mitgeführte Luft entstehen, wenn Regentropfen in Wasser fallen.

Bei schäumenden Flüssigkeiten hat man Gelegenheit, Systeme einer großen Anzahl von Häutchen zu beobachten, wie man sie vermittelst einer Seifenlösung und geeigneter Eisendrahtfiguren auch in einfacherer Form erhalten kann.

In jedem System dieser Art stoßen immer drei Häutchen in derselben Kante zusammen, und zwar unter Winkeln von 120°. Das letztere ist eine Folge davon, daß jedes Häutchen dieselbe Spannung hat. Auf die kleine Flüssigkeitsmasse nämlich, die in unmittelbarer Nähe eines Elementes der Kante liegen, wirken drei Spannungen in der Richtung der Linien, in denen die Häutchen durch eine auf der Kante senkrecht stehende Ebene geschnitten werden. Drei gleiche Kräfte, die auf denselben Punkt wirken, können aber nur dann im Gleichgewicht sein, wenn sie miteinander Winkel von 120° bilden.

§ 285. **Freie Energie der Grenzfläche zwischen einer Flüssigkeit und einem festen Körper.** Im Vorhergehenden war nur die Rede von einer „freien“ Flüssigkeitsoberfläche oder

eigentlich von einer Oberfläche, in welcher die Flüssigkeit mit einem Gas oder mit ihrem Dampf in Berührung ist. Berührt sie über eine gewisse Ausdehnung einen festen Körper, so werden die Teilchen, welche in einer sehr geringen Entfernung von diesem Körper liegen, durch denselben nach außen gezogen, während, wie wir bereits sahen, die Flüssigkeit sie nach innen zieht. Überwiegen diese letzteren Kräfte, so ist noch immer die Energie der Lage (berechnet in bezug auf die zweierlei anziehenden Kräfte) für die Teilchen in einer dünnen Grenzschicht größer als für die Moleküle im Inneren der Flüssigkeit. Das Gegenteil ist der Fall, wenn die Anziehung der festen Körper die gegenseitige Anziehung der Flüssigkeitsmoleküle übertrifft.

Durch diese Betrachtungen ist man zu der folgenden Annahme gekommen:

Es sei O die freie Oberfläche einer Flüssigkeitsmasse und O' die Oberfläche, längs der sie einen festen Körper berührt. *Dann kann* (wenn man sich auf eine bestimmte Temperatur beschränkt) *die freie Energie ausgedrückt werden durch*

$$\psi = C + HO + KO', \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

worin C einen konstanten Wert hat und der Koeffizient K in einigen Fällen positiv und in anderen negativ ist. Überläßt man das System sich selbst, so wird die Summe der beiden letzten Glieder ein Minimum. Es ist klar, daß, wenn K negativ ist und das dritte Glied überwiegt, ψ abnehmen kann, wenn O' größer wird, selbst wenn gleichzeitig auch O etwas größer würde. Dann wird die Flüssigkeit sich über den festen Körper ausbreiten, mit anderen Worten, sie wird ihn „benetzen". Daß z. B. Wasser sich über eine gut gereinigte Glasplatte ausbreitet, ist der starken Anziehung, die das Glas ausübt, zuzuschreiben; ist die Platte fettig, so wird sie nicht benetzt, weil das Fett das Wasser dazu nicht genug anzieht.

Durch Quecksilber wird bekanntlich eine Glasplatte nicht benetzt; sogar nimmt diese Flüssigkeit auf einer gut gereinigten Platte die Form eines Tropfens an. Die mehr oder weniger kugelförmige Gestalt ist dann die Folge der gegenseitigen Anziehung der Quecksilbermoleküle, während die Schwerkraft eine Abplattung des Tropfens und eine Vergrößerung der Berührungs-

fläche mit dem Glas bewirkt. Übrigens, auch wenn die Schwerkraft nicht bestände, würde die Berührung über eine gewisse Ausdehnung bestehen bleiben und das Quecksilber sich nicht *ganz* von dem Glas zurückziehen. Auf die Schlußfolgerung, durch welche sich dies aus der Formel (9) ableiten läßt, können wir hier nicht eingehen, und wir bemerken nur noch, daß in allen Fällen, in denen sich ein fester Körper und eine Flüssigkeit berühren und in denen nicht eine vollständige Ausbreitung stattfindet, das Gleichgewicht dadurch gekennzeichnet wird, daß die freien Oberflächen unter einem bestimmten, von der Beschaffenheit der Körper abhängenden Winkel (*Randwinkel*) zusammenstoßen.

Will man die Gleichgewichtslagen in denjenigen Fällen untersuchen, in denen auch die Schwerkraft einen merklichen Einfluß hat, so muß man bedenken, daß außer den von der Größe der Oberflächen abhängigen Teilen auch noch die potentielle Energie gegenüber der Schwerkraft zur gesamten freien Energie — die ein Minimum werden muß — gehört.

§ 286. **Steigen und Sinken in Kapillarröhren.** *Wenn eine enge Glasröhre (Haarröhrchen oder Kapillarröhre) in vertikaler Stellung mit dem unteren Ende in Wasser eingetaucht wird, so steigt dieses bis auf eine gewisse Höhe in derselben empor,* wie es in Fig. 230 dargestellt ist, in welcher S und ab die Oberflächen der Flüssigkeit sind. Wir wollen annehmen, daß das Wasser die Innenwand gut benetzt, so daß diese mit einer dünnen Flüssigkeitsschicht bedeckt ist, die sich weit über die Oberfläche ab erstreckt. Diese letztere, der sogenannte Meniskus, geht allmählich in die freie Oberfläche der Flüssigkeitsschicht über; sie ist nämlich



...ite nach oben gebogen und steht am Ran[d] ...r engen Röhren hat sie die Gestalt ein[er] ...

...eit steigt ... der Röhre so hoch, daß ...

gesamte freie Energie ein Minimum ist, und dabei verdient bemerkt zu werden, daß, wenn bereits vorher die ganze Innenwand benetzt ist, sich an der Berührungsfläche des Wassers und der Röhrenwand nichts ändern kann, und also ebensowenig an der dieser Berührungsfläche entsprechenden freien Energie. Anders verhält es sich mit der freien Oberfläche der Flüssigkeit. Diese besteht nämlich aus dem Meniskus und der Oberfläche der darüber liegenden Wasserschicht; da nun die letztere beim Steigen des Meniskus verkleinert wird, so werden die Molekularkräfte der Flüssigkeit fortwährend bestrebt sein, ein weiteres Steigen derselben zu bewirken. Die Schwerkraft ist die Ursache, daß eine bestimmte Höhe nicht überschritten wird.

Denken wir uns für einen Augenblick, die Mitte des Meniskus liege gleichhoch mit der äußeren Oberfläche der Flüssigkeit S, und bezeichnen wir für diesen Fall die gesamte freie Energie mit A. Ist dann die Flüssigkeit auf eine Höhe h emporgestiegen, so hat die Oberfläche der Flüssigkeit um $2\pi r h$ abgenommen, wenn wir nämlich den inneren Radius der Röhre mit r bezeichnen und uns die Oberfläche der äußeren Flüssigkeit so ausgedehnt vorstellen, daß sich die Höhe derselben nicht merklich ändert. Abgesehen von der Schwerkraft hat sich also die freie Energie der Flüssigkeit um $2\pi r h H$ vermindert. Anderseits hat die potentielle Energie gegenüber der Schwerkraft um einen Betrag zugenommen, für den man $\frac{1}{2}\pi r^2 h^2 s$ findet (vgl. § 206), wenn man das spezifische Gewicht der Flüssigkeit mit s bezeichnet und, womit man bei engen Röhren keinen nennenswerten Fehler begeht, das Gewicht der Säule und die Lage des Schwerpunktes so berechnet, als ob sie oben durch die Ebene mn begrenzt wäre.

Da nun die gesamte freie Energie

$$A - 2\pi r h H + \tfrac{1}{2}\pi r^2 h^2 s$$

ist, fragt es sich nur, für welchen Wert von h dieser Ausdruck ein Minimum ist. Dieser Wert, die wirkliche *Steighöhe*, ist §§ 11 und 41)

$$h = \frac{2H}{rs} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Daß wirklich *die Steighöhe dem Radius der Röhre umgekehrt proportional ist*, ist durch die Beobachtung bestätigt worden. Man ersieht zugleich aus der Formel, wie man, wenn r und s

bekannt sind, aus der Steighöhe die Kapillaritätskonstante ableiten kann. Soll man auf diese Weise gute Resultate bekommen, so ist es nötig, die Flüssigkeit erst auf eine größere Höhe in der Röhre emporzusaugen, um die Innenwand gut zu benetzen.

Aus der Beobachtung der Steighöhe ergibt sich, daß die Konstante H für Wasser größer ist als für Alkohol. Hieraus kann man die folgende Erscheinung erklären. Läßt man auf die Mitte einer dünnen Wasserschicht in einer Schale einen Tropfen Alkohol fallen, so bewegt sich die Flüssigkeit sofort von der Mitte nach außen. Dabei wird die Oberfläche der alkoholhaltigen Flüssigkeit in der Mitte größer, aber die daraus entstehende Vergrößerung der freien Energie wird übertroffen von der Verminderung, welche die Folge der Zusammenziehung der ringförmigen Wasseroberfläche ist. Unter günstigen Umständen wird der Boden der Schale in der Mitte vollständig trockengelegt.

Man kann die Schlußfolgerung, welche zu der Formel (10) geführt hat, noch etwas anders einkleiden. Ist nämlich die freie Energie ein Minimum geworden, so wird sie sich bei einer weiteren unendlich kleinen Verschiebung nicht ändern (§§ 41 und 156). Wir wollen annehmen, die Verschiebung bestehe in einem Steigen des Meniskus um den Abstand δ. Dann nimmt dabei die eigene freie Energie der Flüssigkeit um $2\pi r \delta H$ ab. Die Energie der Lage gegenüber der Schwerkraft nimmt dagegen um $\pi r^2 h' \delta s$ zu, wenn man mit h' die *mittlere* Höhe der Punkte des Meniskus bezeichnet. Man kann sich nämlich vorstellen, daß das keine Gewicht $\pi r^2 \delta s$, welches über den ursprünglichen Stand des Meniskus gekommen ist, von der Oberfläche der Flüssigkeit S an emporgehoben worden ist. Indem man die beiden gefundenen Ausdrücke einander gleichsetzt, findet man wieder die Formel (10), wenn man, was bei sehr engen Röhren gestattet ist, h' durch die Höhe des tiefsten Punktes des Meniskus ersetzt.

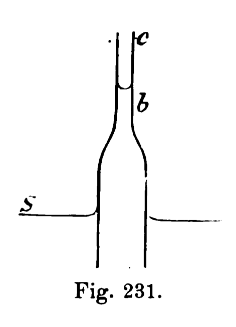


Fig. 231.

Die letztere Ableitung der Formel gilt auch, wenn die Röhre nur an der Stelle, wo sich der Meniskus befindet, den

kleinen Radius r (Fig. 231) aber weiter unten eine beliebige größere Weite hat. *Sobald die Flüssigkeit* (z. B. durch Saugen) *den engen Teil b c erreicht hat, steigt sie ebenso hoch als in einer Röhre, die überall den Durchmesser von b c hat.*

Wir wollen nicht ausführlich über Flüssigkeiten sprechen, die sich nicht über die Röhrenwand ausbreiten. Bei diesen ist in engen Röhren der Meniskus ein Kugelsegment, dessen Form durch den Randwinkel bestimmt wird. Die Theorie lehrt ferner, *daß, wenn der Meniskus die hohle Seite nach oben kehrt, die Flüssigkeit in der Kapillarröhre höher steht als außerhalb derselben. Das Gegenteil ist der Fall, wenn die hohle Seite des Meniskus nach unten gekehrt ist. So beobachtet man bei Quecksilber in einer Kapillarröhre eine Depression.*

Der Höhenunterschied zwischen dem Meniskus und der Oberfläche der äußeren Flüssigkeit ist in beiden Fällen dem Radius der Röhre umgekehrt proportional, solange man es mit demselben festen Stoff und derselben Flüssigkeit zu tun hat und man sich auf sehr enge Röhren beschränkt.

Die Erklärung des niedrigen Standes des Quecksilbers in einer Kapillarröhre liegt auf der Hand. Bei dieser Flüssigkeit überwiegen die eignen anziehenden Kräfte gegenüber denjenigen, welche von einer Glaswand ausgehen; sie streben die Oberfläche der Flüssigkeit so klein als möglich zu machen und also den dünnen Quecksilberfaden in einer Kapillarröhre *aus dieser zurückzuziehen.*

Schließlich bemerken wir noch, daß ähnliche Höhendifferenzen wie zwischen der Flüssigkeit in der Röhre von Fig. 230 und der Oberfläche S auch bei U-förmigen Röhren bestehen, deren Schenkel verschiedene Durchmesser haben. Quecksilber steht im engen Schenkel am tiefsten und Wasser im weiten.

Auch wenn bereits andere Ursachen eine Höhendifferenz hervorbringen haben, üben die Molekularkräfte immer noch einen Einfluß aus. Infolgedessen steht das Quecksilber in einem Gefäßbarometer etwas tiefer als es sonst der Fall sein würde, und zwar um so mehr, je enger die Röhre ist. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, muß man beim Ablesen die Höhe *der Spitze* des Meniskus bestimmen und bei genauen Messungen eine Korrektion anbringen.

Um einigermaßen eine Vorstellung von dem Mechanismus der besprochenen Erscheinungen zu geben, betrachten wir noch einmal den Fall, auf den sich Fig. 230 bezicht, jedoch mit der Annahme, daß sich die Flüssigkeit nicht über die Röhrenwand ausbreitet. Wir nehmen an, die Röhre sei am unteren Ende durch eine horizontale Ebene U abgeschnitten. Wir verlängern den in der Röhre anwesenden Flüssigkeitszylinder bis an die horizontale Ebene V und vergleichen die Flüssigkeitsmasse $a\,b\,c\,d$ mit der gleichbreiten Säule $a'\,b'\,c'\,d'$, die bis zu derselben Tiefe reicht. Es ist klar, daß auf die letztere Säule die umgebende Flüssigkeit zwischen den Ebenen S und V keine Kraft in vertikaler Richtung ausübt; sie wird also ganz durch die Flüssigkeit unterhalb V getragen.

An der Fläche $c\,d$ sind die Umstände dieselben wie an $c'\,d'$. Auf die Säule $a\,b\,c\,d$ wird also durch die Flüssigkeit unterhalb V eine Kraft gleich dem Gewicht von $a'\,b'\,c'\,d'$ nach oben ausgeübt. Mit dem Gewichtsüberschuß von $a\;b\;c\;d$ müssen die Kräfte im Gleichgewicht sein, mit denen die Röhrenwand und die umgebende Flüssigkeit zwischen U und V auf die Säule wirken. Sind diese Kräfte, positiv gerechnet, wenn sie nach oben gerichtet sind, K_1 und K_2, ist ferner h die mittlere Steighöhe, σ die Fläche des Querschnitts der Röhre, und s das spezifische Gewicht, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$h\,\sigma\,s = K_1 + K_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die Kraft K_1 ist aus den vertikalen Komponenten aller Kräfte zusammengesetzt, mit denen die Röhrenwand auf die in $a\,b\,c\,d$ liegenden Flüssigkeitsteilchen wirkten. Da jedoch Moleküle wie f und g durch die Wand in horizontaler Richtung angezogen werden, braucht man nur auf Teilchen wie h zu achten, die in der unmittelbaren Nähe des inneren Umfanges des unteren Endes liegen. Es ist nicht schwer einzusehen, daß die Kraft K_1 wirklich nach oben gerichtet ist, und daß ihr Wert proportional der Länge L des soeben genannten Umfanges ist, so daß man

$$K_1 = \alpha\,L$$

setzen kann.

Was K_2 betrifft, so bemerken wir, daß der Teil $k\,e\,c\,d$ der betrachteten Säule durch die gleich hoch liegende Flüssigkeit zwischen U und V weder nach oben noch nach unten gezogen werden kann; wir haben es also nur mit den Kräften zu tun, mit denen die um den Zylinder und unterhalb U liegende Flüssigkeit auf die untersten Teilchen von $a\,b\,k\,e$ wirkt. Die Kraft K_2 ist also nach unten gerichtet und kann durch

$$K_2 = -\beta\,L$$

ausgedrückt werden, so daß aus (11) folgt

$$h = \frac{(\alpha-\beta)\,L}{\sigma\,s}$$

Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Radius r, so wird dies

$$h = \frac{2\,(\alpha-\beta)}{r\,s}$$

§ 287. **Kräfte, die auf feste Körper wirken.** a) Werden zwei gut gereinigte Glasplatten in vertikaler Stellung in geringer Entfernung voneinander in Wasser eingetaucht, so daß sie daraus hervorragen und die Flüssigkeit in dem Zwischenraum wie in einer Kapillarröhre emporsteigt, so wird die eine Platte nach der anderen hingezogen. Dies hängt damit zusammen, daß bei einer Annäherung die gesamte Oberfläche der Flüssigkeit kleiner werden kann, so daß die freie Energie des Systems abnimmt.

b) Ein dünnes Metallplättchen kann, wenn die Oberfläche fettig ist und also nicht durch Wasser benetzt wird, auf dieser Flüssigkeit schwimmen. Man kann dabei bemerken, daß es etwas einsinkt, aber die Flüssigkeit schließt sich nicht über dem Plättchen; die Oberfläche läuft von dem unteren Rand des Plättchens schief nach außen und nach oben. Die Oberfläche der Flüssigkeit ist jetzt größer als wenn sie eine durchlaufende horizontale Ebene geblieben wäre und sie würde kleiner werden, wenn sich das Plättchen etwas nach oben bewegte. Aus den molekularen Wirkungen muß also eine Kraft entspringen, die das Plättchen nach oben treibt und die zusammen mit dem gewöhnlichen hydrostatischen Druck gegen die Grundfläche den Körper trägt.

Wir konstruieren (in Gedanken) einen geraden Zylinder, dessen obere Grundfläche gleichhoch mit der Oberfläche der Flüssigkeit außerhalb der Einsenkung liegt, während die untere Grundfläche vollständig in der Flüssigkeit liegt und der Mantel den schwimmenden Körper in ziemlich großem Abstand umringt. Wendet man den Satz an, daß das gesamte Gewicht von allem, was in diesem Raum liegt, durch die Kräfte im Gleichgewicht gehalten werden muß, mit denen die umgebende Flüssigkeit auf diese Stoffmasse wirkt, so kann man beweisen, daß der Raum, der infolge der Anwesenheit des festen Plättchens nicht mit Flüssigkeit gefüllt ist, eine Menge derselben enthalten könnte, die ebensoviel wiegt wie der schwimmende Körper.

Durch eine ähnliche Schlußfolgerung kann man die scheinbare Gewichtsverminderung eines teilweise untergetauchten Körpers finden, wenn man dabei die Hebung oder Senkung der Flüssigkeit berücksichtigt, die an der Oberfläche derselben beobachtet wird.

§ 288. **Zwei einander berührende Flüssigkeiten.** Auch die Moleküle zweier verschiedener Flüssigkeiten üben eine Anziehung aufeinander aus, und wenn diese groß genug ist, so bilden sie, miteinander in Berührung gebracht, *ein homogenes*

Gemisch. In vielen anderen Fällen ist die Anziehung hierzu zu klein und auch nicht groß genug, um, wie bei Wasser und Äther, zu bewirken, daß sich die eine Flüssigkeit in der anderen etwas löst, aber doch hinreichend, um zu bewirken, daß sich die eine auf der anderen zu einer dünnen Schicht ausbreitet (Öl und Wasser), ebenso wie sich Wasser auf einer reinen Glasoberfläche ausbreitet.

§ 289. **Einfluß der Krümmung einer Flüssigkeitsoberfläche auf die Dampfspannung.** Aus dem in § 286 Besprochenen kann durch Anwendung des Prinzips, daß ein sich selbst überlassenes System einen Gleichgewichtszustand annimmt (§ 235) ein interessanter Schluß gezogen werden. Wir wollen annehmen, ein Gefäß mit Wasser A (Fig. 232), in welches eine enge Glasröhre B mit dem unteren Ende eingetaucht ist, sei mit einer Glocke bedeckt, die im übrigen nur Wasserdampf enthält, und das ganze System werde auf konstanter Temperatur gehalten. In der Röhre hat dann die Flüssigkeit eine gekrümmte, nach oben konkave Oberfläche C und einen höheren Stand als in dem Gefäß. In den Punkten E und C, der Mitte des Meniskus, wird dann der Dampf Spannungen annehmen, die ungleich sind; wenn nämlich die Spannung p in E die Spannung p' in C nicht um einen Betrag überträfe, der dem Gewicht der Dampfsäule $D\,E$ entspricht, so würde der Dampf im ganzen nicht im Gleichgewicht sein (§ 204), was doch der Fall sein muß.

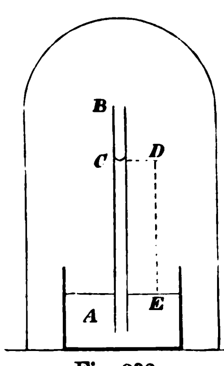


Fig. 232.

Es muß aber auch, sowohl in E als auch in C, Gleichgewicht sein zwischen dem Dampf und der Flüssigkeit. Da nun die Wand von der Mitte des Meniskus zu weit entfernt ist, um hier direkt einen Einfluß auf den Austausch von Molekülen auszuüben, liegt es nahe, sich vorzustellen, daß der kleinere Wert der Gleichgewichtsspannung in C *der Form der Oberfläche* zuzuschreiben ist. So kommen wir zu dem Schluß:

Die Gleichgewichtsspannung oder das Maximum der Spannung ist bei einer konkaven Oberfläche kleiner als bei einer ebenen Oberfläche.

Wenn man eine Röhre betrachtet, die nicht von der Flüssigkeit benetzt wird, so findet man in derselben Weise, *daß die Gleichgewichtsspannung bei einer konvexen Oberfläche größer ist als bei einer ebenen.*

Es ist leicht, den Wert von $p-p'$ zu berechnen. Ist der Radius der Röhre r cm, so ist die Steigröhre des Wassers ungefähr $\frac{0{,}145}{r}$ cm. Werden nun p und p' in Zentimetern Quecksilber ausgedrückt, und sind S und s die spezifischen Gewichte von Quecksilber und Wasserdampf, so hat man

$$(p-p') : \frac{0{,}145}{r} = s : S.$$

Setzt man die Dichte des Wasserdampfes in bezug auf Luft gleich 0,62, so findet man

$$s = \frac{0{,}00129 \times 0{,}62\, p}{76\,(1+\alpha\, t)},$$

also, da $S = 13{,}6$ ist,

$$p' = p\left(1 - \frac{11 \times 10^{-8}}{1+\alpha\, t} \cdot \frac{1}{r}\right).$$

Für 100^0 ist $p = 76$, also:

$$p' = 76 - \frac{6 \times 10^{-6}}{r}.$$

Die Formel gilt nun für jede kugelförmige Oberfläche, wenn man für r den Radius derselben nimmt, der im Fall von Fig. 232 gleich dem Radius der Röhre ist. Die entsprechende Formel für eine konvexe Oberfläche erhält man dadurch, daß man dem letzten Glied das entgegengesetzte Vorzeichen gibt.

§ 290. **Übersättigte Dämpfe.** Als wir in § 235 eine Definition der Spannkraft des gesättigten Dampfes oder des Maximums der Spannkraft (§ 272) gaben, nahmen wir stillschweigend an, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eben oder wenig gekrümmt sei. In diesem Fall beträgt bei 100^0 C. das Maximum der Spannkraft des Wasserdampfes 76 cm Quecksilber. Wir wollen uns jetzt vorstellen, daß man Wasserdampf von 100^0 noch etwas weiter als bis zu dieser Spannung zusammengedrückt habe, daß z. B. der Druck 76,1 cm betrage,

und wir wollen annehmen, daß durch irgendeine Ursache in diesem Dampf ein Wasserkügelchen von 0,00001 cm Radius entstanden sei. Nach dem Gesagten würde die Gleichgewichtsspannung an der Oberfläche dieses Kügelchens 76,6 cm betragen, und da dies mehr ist als die Spannung, die der Dampf wirklich hat, so wird das Kügelchen verdampfen. Noch kleinere Kügelchen würden dies ebenfalls tun. Es ist aber klar, daß solche kleine Tröpfchen, wenn sie sofort wieder verdampfen würden, gar nicht entstehen. *Daher wird die Bildung von Tröpfchen, d. h. die Bildung eines Nebels, nicht stattfinden, wenn auch der Druck des Wasserdampfes über dem gewöhnlichen Maximum der Spannkraft liegt.*

Allerdings wird der Dampf unter diesen Umständen kondensiert, wenn er mit einer ebenen oder wenig gebogenen Wasserfläche, also z. B. mit einer feuchten Glasplatte in Berührung ist. Auch auf einer trockenen Platte kann er sich verdichten, wobei die von dem Glas ausgehenden Anziehungskräfte wirksam sind. Auch kleine im Dampf schwebende Stäubchen und andere Teilchen, über die wir später sprechen werden, können die Kerne einer Kondensation werden. Man hat nachgewiesen, daß sich der Dampf nicht zu einem Nebel verdichtet, wenn die Luft frei von solchen Kernen ist. Wir bemerken hierbei, daß der Staub zurückgehalten wird, wenn man die Luft durch einen Pfropf Watte strömen läßt.

Ein Dampf, der eine größere Spannung hat als das gewöhnliche Maximum, wird oft *übersättigt* genannt, so daß man dann von ungesättigtem, gesättigtem und übersättigtem Dampf spricht. Man denke aber nicht, daß in dem Wesen des übersättigten Dampfes etwas Besonderes ist, wodurch er sich von dem gesättigten oder noch mehr verdünnten unterscheidet. Ein Unterschied zwischen diesen Fällen wird erst beobachtet, wenn der Dampf mit Flüssigkeit in Berührung kommt.

§ 291. **Siedeverzug.** *Aus dem Einfluß der Krümmung auf die Dampfspannung kann man ferner ableiten, daß ebenso wie Tröpfchen in einer Dampfmasse auch Dampfblasen in einer Flüssigkeit nicht leicht entstehen.* Wir wollen z. B. annehmen, Wasser, welches einem Druck von 76 cm ausgesetzt ist, sei auf 101° erwärmt. Die Gleichgewichtsspannung im Falle einer ebenen

Oberfläche würde dann 78,8 cm sein. Aber im Inneren eines Dampfbläschens, dessen Radius kleiner als 2×10^{-6} cm ist, würde die Gleichgewichtsspannung kleiner als 76 cm sein. Da nun der Dampf durch den äußeren Druck auf die Spannung 76 cm zusammengedrückt wird, würde er sich an der Wand des Bläschens verdichten. Auch kleinere Bläschen würden, wenn sie vorhanden wären, verschwinden und werden daher offenbar gar nicht entstehen.

Es können sich allerdings Dampfblasen an den Wänden des Gefäßes bilden, ebenso an einem in das Wasser gelegten Metalldraht oder an Staubteilchen, die im Wasser schweben; auch in Luftblasen, die durch das Entweichen der gelösten Luft entstehen, kann das Wasser verdampfen. Sind aber solche günstige Umstände nicht vorhanden, so kann man die Flüssigkeit, ohne daß sie siedet, über den gewöhnlichen Siedepunkt erhitzen, bis schließlich die Dampfblasen unter heftigem Stoßen entstehen.

§ 292. **Erstes Erscheinen einer neuen Phase.** Einige andere Fälle haben mit dem soeben besprochenen große Ähnlichkeit. Wasser kann z. B. sehr gut einige Grad unter 0° abgekühlt werden, ohne daß es gefriert; es befindet sich dann, wie man zu sagen pflegt, im Zustand der *Unterkühlung* (*Überschmelzung*). Es kann aber bei diesen niedrigen Temperaturen nicht in Gegenwart von Eis bestehen; das kleinste Stückchen Eis, welches man hineinwirft, bewirkt, daß ein Teil der Flüssigkeit gefriert, wobei durch die freiwerdende Wärme die Temperatur genau auf 0° steigt, die einzige Temperatur, bei welcher (unter dem gewöhnlichen Atmosphärendruck) Eis und Wasser nebeneinander existieren können.

Aus diesem und ebenso aus den vorhergehenden Beispielen ergibt sich, *wie das erste Erscheinen einer neuen Phase ganz andere Umstände erfordert als die Zunahme einer bereits vorhandenen Menge derselben.* In Wasser von — 5° nimmt ein Stückchen Eis sicher zu, aber deshalb entsteht noch kein Eiskriställchen im Wasser. Welche Bedingungen für das letztere nötig sind, ist uns nicht ganz bekannt; man hat allerdings gefunden, daß man das Wasser am besten unter 0° abkühlen kann, ohne daß es gefriert, wenn man es vor plötzlichen Bewegungen bewahrt. Bei einer Bewegung kann nämlich die Flüssigkeit leicht

mit Eis, welches sich über der Oberfläche des Wassers an der Gefäßwand gebildet hat, in Berührung kommen.

Mit dem Wasser unter 0° *kann man eine sogenannte übersättigte Lösung eines festen Stoffes vergleichen,* d. h. eine Lösung, welche stärker ist als diejenige, welche mit dem festen Stoff im Gleichgewicht sein kann. Zwischen diesen beiden Lösungen und einer noch mehr verdünnten, einer *ungesättigten*, besteht, was die Lösung an sich betrifft, kein wesentlicher Unterschied; sie verhalten sich nur verschieden, wenn sie mit dem festen Körper in Berührung kommen. Die kleinste Menge desselben hat eine Abscheidung des festen Körpers aus einer übersättigten Lösung zur Folge.

§ 293. **Imbibition und Osmose.** Wir wollen nun zum Schluß einige Eigenschaften von Lösungen und namentlich von verdünnten Lösungen besprechen. Um die in vieler Hinsicht wichtigen Resultate, die man hierüber erhalten hat, zu verstehen, ist es nötig, mit einer merkwürdigen Eigenschaft gewisser fester Körper bekannt zu sein. Viele derselben sind porös, d. h. mit feinen Kanälchen versehen, in denen sie eine Flüssigkeit aufsaugen können. Diese Erscheinung ist eine Folge der Ausbreitung der Flüssigkeit über die Wände der Poren und mit dem Aufsteigen in Kapillarröhren vergleichbar. Aber auch Körper wie Leim, die gar keine Poren zeigen, können Wasser aufnehmen, wobei sie oft merklich anschwellen; die Wassermoleküle finden hier Platz zwischen denen des festen Körpers und bilden mit diesen einen neuen homogenen Körper. Bei dieser *Imbibition* können auch feste Stoffe, die im Wasser gelöst sind, aufgenommen werden.

Wenn nun eine feste Wand, die das Imbibitionsvermögen besitzt, zwei Flüssigkeiten voneinander trennt, so können sich diese durch die Wand hindurch miteinander vermengen (*Osmose*). Dabei werden oft die verschiedenen Bestandteile in sehr ungleichem Maße durchgelassen. Ein Stück Pergamentpapier z. B., welches an der einen Seite mit reinem Wasser und an der anderen mit einer Lösung in Berührung ist, läßt einige gelöste Stoffe (*Kristalloide*), z. B. Salze, durch, versperrt dagegen anderen (*Kolloiden*), z. B. Eiweiß, den Durchgang mehr oder weniger. Man kann hiervon Gebrauch machen, um die ersteren Sub-

ınzen von den letzteren zu trennen, eine Operation, die man
s *Dialyse* bezeichnet.

Auch zwischen den Geschwindigkeiten, mit denen ein ge-
ıter Stoff und das Lösungsmittel selbst durch eine Wand
hen, besteht oft ein großer Unterschied.

§ 294. **Osmotischer Druck.** Wenn dieser Unterschied so
ıit geht, daß der gelöste Stoff überhaupt nicht durchgelassen
rd, wollen wir von einer *halbdurchlässigen* Wand sprechen.
ın hat diese u. a. dadurch hergestellt, daß man eine poröse
ınzelle, die durch Entfernung der Luft aus den Poren gut
t Wasser getränkt war, in eine Lösung von gelbem Blut-
ıgensalz stellte, während sie mit einer Lösung von Kupfer-
lfat gefüllt war. Jedes Kanälchen wird dann durch eine
ıine Zwischenwand von Ferrocyankupfer abgeschlossen, und
ıse Wand besitzt die genannte Eigenschaft.

In die Öffnung der so zubereiteten Tonzelle wird nun
ıe vertikale und am oberen Ende offene Glasröhre wasser-
ıht befestigt, so daß ein hohes Gefäß entsteht, von dem die
ınzelle den unteren Teil bildet. Umgibt man dann die Ton-
lle mit reinem Wasser und füllt man sie mit irgendeiner
ısung, z. B. einer Rohrzuckerlösung, so zeigt sich, daß Wasser
die Tonzelle eindringt, während der Zucker nicht austreten
ınn. Die Flüssigkeit steigt nämlich in der Röhre, aber da-
rch entsteht eine Druckerhöhung in dem Gefäß, die nach
ıiger Zeit mit den Kräften, welche das Wasser nach innen
ıiben, im Gleichgewicht ist.

*Die Druckdifferenz, die schließlich zwischen den Flüssigkeiten
f beiden Seiten der halbdurchlässigen Wand besteht, nennt man
n „osmotischen Druck" der Lösung.*

Wieviel Wasser nun durch die Wand hindurchgedrungen
, hängt von den Umständen ab. Hätte man die Tonzelle,
ıchdem man sie mit der Zuckerlösung gefüllt hatte, oben ge-
hlossen, so würde bereits der Durchgang von sehr wenig
asser den Druck hinreichend erhöht haben, um ein weiteres
ndringen zu verhindern.

Daß auch an beiden Seiten von halbdurchlässigen Wänden
ıderer Art unter denselben Umständen ein Druckunterschied
ıtsteht, ist zu erwarten und auch tatsächlich beobachtet
ırden. *Aus dem am Anfang von § 235 Gesagten kann man*

nun ableiten, daß der osmotische Druck unabhängig von den besonderen Eigenschaften der halbdurchlässigen Wand ist, die man benutzt.

Denkt man sich nämlich (Fig. 233) eine Röhre *B*, deren Wand ganz undurchlässig ist und die durch halbdurchlässige Platten *P* und *Q* *von verschiedener Art* abgeschlossen ist, mit einer Lösung gefüllt und in horizontaler Lage in reines Wasser eingetaucht, so sieht man leicht ein, daß, wenn der osmotische Druck für die Platte *P* nicht ebensogroß wie für die Platte *Q* wäre, kein Gleichgewicht entstehen könnte. Würde z. B. bei *P* eine größere Druckdifferenz für das Gleichgewicht erfordert als bei *Q*, so würde die Flüssigkeit fortwährend durch *P* nach innen und durch Q nach außen strömen und außerhalb der Röhre wieder nach *P* zurückkehren. Da jedoch immer einige Reibung vorhanden ist, ist dies unmöglich.

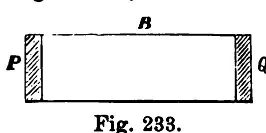


Fig. 233.

§ 295. **Gesetz von van't Hoff.** Bei sehr verdünnten Lösungen wird die Größe des osmotischen Druckes durch eine Regel bestimmt, die man van't Hoff zu verdanken hat. Um diese zu verstehen, muß man sich an das Avogadrosche Gesetz (§ 223) erinnern, nach welchem bei einer bestimmten Temperatur durch eine gegebene Anzahl von Gasmolekülen, die in einem bestimmten Raum enthalten sind, immer derselbe Druck ausgeübt wird, einerlei mit welchem Gas man es zu tun hat. *Der osmotische Druck einer Lösung ist nun gleich dem Druck, den ein Gas bei derselben Temperatur ausüben würde, wenn es in der Volumeinheit soviel Moleküle enthielte, als Moleküle des gelösten Stoffes in der Volumeinheit anwesend sind.*

Man hat z. B. gefunden, daß der osmotische Druck einer einprozentigen Rohrzuckerlösung bei 15° C. gleich 0,68 Atm. ist. In einem Liter dieser Lösung sind 10 g Rohrzucker enthalten, und da das Molekulargewicht des Rohrzuckers 342 ist, so würde eine Menge Wasserstoff, die ebensoviel Moleküle enthält, 10/171 g betragen. In einen Raum von 1 Liter gebracht, würde diese letztere Gasmasse bei 15° C. einen Druck von 0,69 Atm. ausüben.

Wir müssen hierbei bemerken, daß viele Abweichungen vom Gesetz von van't Hoff beobachtet worden sind; wir wollen

jedoch in den zunächst folgenden Paragraphen davon absehen.

§ 296. **Molekularbewegung eines gelösten Stoffes.** Wie ist die merkwürdige Gleichheit zu erklären, welche durch das Gesetz von van't Hoff ausgedrückt wird? Wir wissen, daß der Druck eines Gases durch die Stöße der Moleküle hervorgebracht wird und daß das Avogadrosche Gesetz seinen Grund darin hat, daß die Moleküle verschiedener Gase bei derselben Temperatur dieselbe mittlere kinetische Energie haben. Es würde nun alles begreiflich sein, wenn angenommen werden dürfte: 1. daß der osmotische Druck durch die Stöße der Teilchen des gelösten Stoffes gegen die halbdurchlässige Wand erzeugt wird, 2. daß die Wirkung dieser Stöße in derselben Weise wie der Druck eines Gases durch die kinetische Energie der Moleküle bestimmt wird, und 3. daß die mittlere kinetische Energie eines Moleküls des gelösten Stoffes ebensogroß ist wie die eines Gasmoleküls bei derselben Temperatur.

Es gibt vieles, was für die letztere Annahme spricht. Theoretische Betrachtungen, auf die wir hier nicht eingehen können, haben zu dem Resultat geführt, daß die mittlere kinetische Energie eines Moleküls in dem einen Aggregatzustand ebensogroß ist wie in dem anderen, wenn sie nur bei derselben Temperatur verglichen werden. Obgleich bei diesen Betrachtungen noch Schwierigkeiten bestehen bleiben, bilden sie doch eine kräftige Stütze für die dritte Hypothese, wenn es nötig ist, diese zur Erklärung der Größe des osmotischen Druckes heranzuziehen.

Daß ferner dieser Druck durch die Stöße der Teilchen des gelösten Stoffes verursacht wird, kann allerdings schwerlich im allgemeinen angenommen werden, würde aber doch für eine Wand von besonderer Struktur richtig sein. Man kann sich nämlich eine äußerst dünne, feste Scheibe denken mit so viel Öffnungen oder, besser gesagt, mit so wenig festem Stoff dazwischen, daß sie jedes Wassermolekül durchläßt, aber den Teilchen des gelösten Stoffes (sei es, daß diese zu groß sind oder daß die Wand sie abstößt) den Durchgang versperrt. Gegen eine solche Wand würde das Wasser überhaupt nicht drücken. Die Teilchen der gelösten Substanzen dagegen würden dagegen stoßen, und man kann beweisen, daß

sie dadurch einen Druck ausüben würden, der in derselben Weise wie die Spannkraft eines Gases von der kinetischen Energie der Moleküle abhängt.

In wirklich vorkommenden Fällen ist vielleicht der Mechanismus ganz anders. Es ist möglich, daß die gegenseitige Anziehung zwischen den Molekülen des Wassers und des gelösten Stoffes die Hauptrolle spielt. Diese kann einesteils die Teilchen des gelösten Stoffes aus der Grenzschicht nach dem Inneren ziehen und sie also verhindern an die feste Wand zu kommen; andererseits kann die Anziehung zur Folge haben, daß das Wasser, angezogen durch den gelösten Stoff, so lange nach der Seite getrieben wird, wo sich dieser befindet, bis eine Druckdifferenz von bestimmter Größe entstanden ist. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen kann man auch jetzt alles berechnen; man findet dann wieder, daß der osmotische Druck schließlich durch die molekulare Geschwindigkeit des gelösten Stoffes bestimmt wird, in Übereinstimmung mit dem Satze (§ 294) daß die Größe des osmotischen Druckes bei jeder halbdurchlässigen Wand derselbe ist.

Alles zusammengenommen können wir wohl in dem Gesetz von van't Hoff eine Bestätigung der Annahme sehen, *daß die mittlere kinetische Energie eines Teilchens eines gelösten Stoffes ebensogroß ist wie die eines Gasmoleküls bei derselben Temperatur.*

Auf diese Weise wird es möglich, für jeden gelösten Stoff die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle zu berechnen und Erscheinungen zu studieren, welche damit zusammenhängen. Als Beispiel derselben nennen wir hier die *Diffusion*. Ist eine Lösung an der einen Stelle mehr konzentriert als an der [illegible] en, so wird die molekulare Bewegung diese Verschieden- [illegible] verschwinden bringen; dies würde sogar sehr schnell [illegible] wenn nicht die Moleküle des gelösten Stoffes immer [illegible] ein Wassermolekül aufgehalten würden. Die [illegible] schwindigkeit hängt von den molekularen Ge- [illegible] en und der Länge des Weges ab, den ein Molekül [illegible] ann, bevor es mit einem Wasserteilchen zusammen- [illegible] 224); aus den Beobachtungen kann man eine [illegible] ser Länge ableiten, die mit dem, was wir über [illegible] nd den Abstand der Moleküle wissen (§ 282) in [illegible] em Einklang steht.

§ 297. **Isotonische Lösungen.** Zwei Lösungen von verschiedenen Stoffen, die bei gleicher Temperatur denselben osmotischen Druck haben, werden *isotonisch* genannt; nach dem Gesetz von van't Hoff enthalten sie, wenn sie hinreichend verdünnt sind, in gleichen Volumen gleichviel Moleküle der gelösten Stoffe.

Um diesen Schluß auf seine Richtigkeit zu prüfen, ist es nicht nötig, wirklich osmotische Drucke zu messen; man kann sich eines einfacheren Hilfsmittels bedienen.

Wenn eine Lösung eines Stoffes A mit reinem Wasser, von dem es durch eine halbdurchlässige Wand getrennt ist, im Gleichgewicht ist, so entsteht auf der Seite von A ein höherer Druck als im Wasser. Lösen wir nun in dem letzteren eine sehr kleine Menge eines zweiten Stoffes B auf, so kann natürlich nicht sofort die ganze Druckdifferenz verschwinden; sie muß also noch bestehen, wenn einer Lösung von A eine viel mehr verdünnte von B gegenübersteht. Eine Druckdifferenz in umgekehrter Richtung wird bestehen, wenn die Lösung von B die von A an Stärke sehr übertrifft. So wird es begreiflich, *daß Lösungen von A und B von solcher Stärke gefunden werden können, daß sie, getrennt durch eine halbdurchlässige Membran, miteinander im Gleichgewicht sein können, ohne daß eine Druckdifferenz besteht. Derartige Lösungen sind isotonisch.*

Um dies einzusehen, denken wir uns ein Gefäß (Fig. 234), welches durch die halbdurchlässigen Scheidewände P, Q und R in drei Abteilungen geteilt ist. In C befindet sich Wasser, in A eine Lösung der Substanz A und in B eine Lösung von B. Schließlich ist alles im Gleichgewicht (§ 235). Nennen wir nun die Drucke in den drei Abteilungen p_a, p_b und p_c, so sind die Differenzen $p_a - p_c$ und $p_b - p_c$ die osmotischen Drucke. Diese sind gleichgroß, wenn $p_a = p_b$ ist, womit der Satz bewiesen ist.

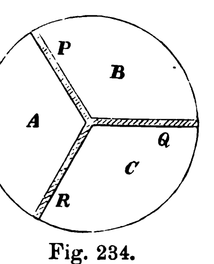


Fig. 234.

De Vries hat sich nach diesem Prinzip isotonische Lösungen verschafft, indem er von dem Umstand Gebrauch machte, daß die Protoplasmaschicht, die sich in Pflanzenzellen innerhalb der Cellulosewand findet, halbdurchlässig ist. Wird

eine solche Zelle in eine starke Lösung einer Substanz A gelegt, so geht Wasser aus dem Zellinhalt nach außen; die Protoplasmaschicht zieht sich zusammen und trennt sich von der Cellulosewand. Ist dagegen die äußere Lösung sehr verdünnt, so findet das umgekehrte statt; das Protoplasma wird gegen die Zellwand gedrückt. Dadurch, daß man nun mit Lösungen von immer geringerer Stärke operierte und diejenige aufsuchte, bei welcher sich zuerst das Protoplasma nicht mehr von der Wand trennte, fand man eine Lösung von A, die isotonisch mit dem Zellinhalt ist. Wurde sodann in derselben Weise eine Lösung eines zweiten Stoffes B gesucht, welche diese Eigenschaft hat, so mußte diese mit der soeben genannten Lösung von A isotonisch sein. Es zeigte sich nun tatsächlich, daß derartige Lösungen von A und B in der Volumeinheit gleichviel Moleküle des gelösten Stoffes enthalten.

§ 298. **Dampfspannung verdünnter Lösungen.** Das Prinzip, daß ein sich selbst überlassenes System einen Gleichgewichtszustand annimmt, ermöglicht es, verschiedene Eigenschaften verdünnter Lösungen mit dem osmotischen Druck in Zusammenhang zu bringen. Zunächst gelingt dies für die Dampfspannung.

Es sei nämlich B (Fig. 235) eine (nicht kapillare) vertikale Glasröhre, die am unteren Ende durch eine halbdurchlässige Platte W geschlossen ist und in einem Gefäß A steht, welches bis zur Höhe E mit Wasser gefüllt ist. In der Röhre befinde sich eine Lösung, und das Ganze sei mit einer Glasglocke, die sonst nur Wasserdampf enthält, bedeckt. Wir wollen nämlich annehmen, *daß der gelöste Stoff nicht mit verdampft.* Soll nun Gleichgewicht bestehen, so muß die Oberfläche der Flüssigkeit C in der Röhre höher liegen als die Oberfläche E in dem Gefäß, und die Spannung des Dampfes muß wegen der Wirkung der Schwerkraft in E größer sein als in C, wo sie denselben Wert hat wie auf der gleichen Höhe D außerhalb der Röhre. Ferner muß sowohl in E als in C der Dampf im Gleich-

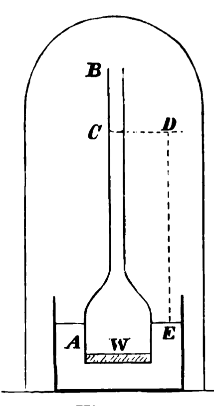


Fig. 235.

gewicht mit der Flüssigkeit sein. Man sieht also, daß, wie wir bereits in § 272 aus einer anderen Betrachtung abgeleitet haben, *die Gleichgewichtsspannung* (das Maximum der Spannkraft) *für die Lösung kleiner ist als für das Wasser.*

Wieviel der Unterschied beträgt, lehrt eine einfache Berechnung. Es sei nämlich h die Höhe DE, h' die Tiefe der Platte W unter E, s das spezifische Gewicht des Wassers, s' das mittlere spezifische Gewicht der über W stehenden Flüssigkeitssäule, und endlich σ das mittlere spezifische Gewicht der Dampfsäule DE. Dann ist die Druckdifferenz zwischen den beiden Seitenflächen von W, d. h. der osmotische Druck

$$P = (h + h')s' - h's - h\sigma$$

und der Unterschied zwischen den Dampfspannungen in E und C

$$\pi = h\sigma.$$

Man kann nun h' so klein machen als man will. Geht man zur Grenze über, wobei $h' = 0$ ist, so wird

$$P = h(s' - \sigma),$$

also

$$\pi : P = \sigma : (s' - \sigma) \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Hat man es mit *sehr verdünnten* Lösungen zu tun, so kann man die Dichte s' der Lösung durch die des reinen Wassers ersetzen und unter σ die Dichte verstehen, die der Wasserdampf in E hat, also die Dichte des gesättigten Dampfes von reinem Wasser. Außerdem kann man im letzten Glied σ gegenüber der viel größeren Dichte s' weglassen. Man findet also

$$\pi = \frac{\sigma}{s} P \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Da nun für jede Lösung der osmotische Druck P mit Hilfe des Gesetzes von van't Hoff berechnet werden kann, so kann man auch die *Dampfspannungsverminderung* π theoretisch bestimmen. Die in dieser Weise gefundenen Resultate sind in vielen Fällen in befriedigender Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

Die Formel (13) kann noch in einer anderen einfachen Gestalt geschrieben werden. Ist nämlich ν die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit gesättigten Dampfes, N die Anzahl dieser Moleküle, welche zusammen eine Volumeinheit

Wasser bilden können, und endlich n die Anzahl der Moleküle des gelösten Stoffes in der Volumeinheit der Lösung, so ist

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{\nu}{N},$$

während, wenn man von den Abweichungen des Wasserdampfes vom Boyleschen Gesetz absieht und das Gesetz von van't Hoff anwendet, die Dampfspannung p der Proportion

$$P : p = n : \nu$$

genügt.

Die Gleichung (13) geht jetzt über in

$$\pi = \frac{n}{N} p . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Wieviel die Dampfspannung durch die Anwesenheit des gelösten Stoffes abnimmt, hängt also nur von der Anzahl der Moleküle ab. Isotonische Lösungen haben auch gleiche Dampfspannung.

Es verdient bemerkt zu werden, daß das gefundene Resultat auch gilt, wenn bei der Verdichtung von Wasserdampf Moleküle sich zu größeren Gruppen vereinigen und folglich in der Flüssigkeit größere Moleküle vorkommen als im Dampf. Unter der Zahl N wird nämlich in der Ableitung nicht die Anzahl der Flüssigkeitsmoleküle verstanden, sondern die Anzahl der Dampfmoleküle, die, einerlei wie sie miteinander verbunden sind, eine Volumeinheit Wasser liefern.

§ 299. **Gefrierpunkt verdünnter Lösungen.** *Man hat gefunden, daß eine Lösung einen niedrigeren Gefrierpunkt hat als das reine Lösungsmittel*, und auch für diese Erscheinung kann man aus der Theorie des osmotischen Druckes ein Gesetz ableiten, wenn man annimmt, daß, was oft der Fall ist, der feste Stoff, welcher aus der Lösung entsteht, vollkommen frei von dem gelösten Stoff ist.

Angenommen, die Lösung enthalte pro Kubikzentimeter soviel Gramm des gelösten Stoffes, als durch das c-fache des [illegible]largewichtes ausgedrückt wird, oder, wie man zu sagen [illegible] Gramm-Moleküle. Für diesen Fall hat man für die [illegible]ung des Gefrierpunktes gefunden

$$\vartheta = 1{,}97 \frac{T^2 v}{r} c . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

[illegible] Formel bedeutet T den Gefrierpunkt des reinen [illegible]mittels (absolute Temperatur), v das Volum von 1 g [illegible]ungsmittels in Kubikzentimetern, und r die Schmelz[illegible] für 1 g in Kalorien ausgedrückt.

Für Wasser ist $v = 1$, $r = 79$. Hat man es ferner mit einer verdünnten Lösung zu tun, die auf 100 g Wasser, also in 100 cbcm, c' Gramm-Moleküle des gelösten Stoffes enthält, so ist $c = 0{,}01\,c'$, und also nach (15)

$$\vartheta = 18{,}5\,c'.$$

Den Koeffizienten 18,5 nennt man die *molekulare Gefrierpunktserniedrigung.*

Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, daß nach der mitgeteilten Formel *die Gefrierpunktserniedrigung nur von der Anzahl der Moleküle des gelösten Stoffes abhängt, und daß also isotonische Lösungen denselben Gefrierpunkt haben.* Wie man durch Messung der Gefrierpunktserniedrigung mit Hilfe von (15) c ermitteln und also, wenn man die Konzentration kennt, *das Molekulargewicht des gelösten Stoffes bestimmen kann,* bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Auch für andere Lösungsmittel als Wasser gilt die Formel (15). Durch einen gelösten Stoff wird der Schmelzpunkt immer erniedrigt, einerlei ob sich das Lösungsmittel beim Erstarren zusammenzieht oder ausdehnt.

Es sei (Fig. 236) R eine ringförmige Röhre von überall gleichem Querschnitt, die mit ihrer Ebene vertikal steht und in der sich bei A eine halbdurchlässige Scheidewand und von B bis C ein Stück Eis befindet. Der Raum zwischen A und B sei mit einer Lösung, der zwischen A und C mit reinem Wasser gefüllt. Wir nehmen an, daß die Scheidewand an der Röhrenwand befestigt ist, daß sich dagegen das Stück Eis bewegen kann. Dies wird durch die Anwesenheit der Flüssigkeit in dem übrigen Teil der Röhre nicht verhindert, da die Wand A das Wasser durchlassen kann. Wir halten nun dieses System auf der konstanten Temperatur T (natürlich in der Nähe des gewöhnlichen Gefrierpunktes) und beweisen zunächst, daß bei einer bestimmten Lage des Stückes Eis mechanisches Gleichgewicht möglich ist.

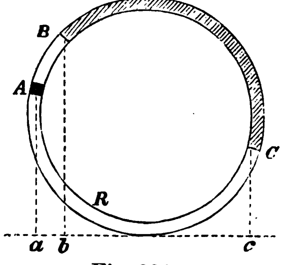


Fig. 236.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit s das spezifische Gewicht des Wassers, mit s' das mittlere spezifische Gewicht der Lösung zwischen A und B, mit σ das spezifische Gewicht des Eises und endlich mit h_a, h_b und h_c die vertikalen Höhen der Mittelpunkte der sehr kleinen Ebene A, B und C über dem tiefsten Punkt der Röhre. Ist nun noch p der

Druck in der Lösung bei B, P der osmotische Druck, so ist — wenn Gleichgewicht besteht — der Druck an der oberen Seite von A

$$p + (h_b - h_a)\, s',$$

der an der unteren Seite von A

$$p + (h_b - h_a)\, s' - P,$$

und der im Punkt C

$$p + (h_a - h_c)\, s + (h_b - h_a)\, s' - P.$$

Der Druck in C übertrifft den in B also um den Betrag

$$(h_a - h_c)\, s + (h_b - h_a)\, s' - P,$$

und wir müssen untersuchen, wann diese Druckdifferenz mit dem Gewicht des Eises im Gleichgewicht ist.

Am einfachsten ist es, zu bedenken, daß das Stück Eis in jeder Lage im Gleichgewicht sein würde, wenn die Scheidewand A nicht da wäre und der ganze Raum unter dem Eis mit einer Flüssigkeit gefüllt wäre, die ebenso schwer ist wie Eis, deren spezifisches Gewicht also σ ist. Dann würde die Druckdifferenz zwischen C und B sein

$$(h_b - h_c)\, \sigma.$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist daher

$$(h_a - h_c)\, s + (h_b - h_a)\, s' - P = (h_b - h_c)\, \sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Das zweite Glied kann man sehr klein machen, wenn man A dicht bei B anbringt. Dann kann man in diesem Glied s' durch s ersetzen, so daß

$$(h_b - h_c)\, (s - \sigma) = P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

wird. Da nun $s - \sigma$ positiv ist, ist wirklich ein Gleichgewicht möglich, wobei der Punkt B, wie es die Figur angibt, höher als C liegt.

Wir wollen nun annehmen, daß der in B bestehende Druck p gerade der ist, welcher bei der gewählten Temperatur T für das molekulare Gleichgewicht zwischen der Lösung und dem Eis nötig ist. Wird dann der Druck in C, der den Wert

$$p + (h_b - h_c)\, \sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

hat, auch hinreichend sein, um hier bei derselben Temperatur Gleichgewicht herzustellen, mit anderen Worten, wird die Temperatur T der Gefrierpunkt des Wassers unter dem Druck (18) sein?

Wäre T höher als dieser Gefrierpunkt, so würde in C etwas Eis schmelzen; da dies von einer Volumverminderung begleitet ist, würde der Druck kleiner werden und diese Druckverminderung würde sich überall in dem Teil CAB der Röhre bemerklich machen. Dann würde also in B der Schmelzpunkt höher werden, als die wirklich bestehende Temperatur; hier würde also etwas Wasser gefrieren. Aber auch das Gleichgewicht des Stückes Eis würde gestört werden. Der Punkt C würde nämlich höher kommen und der Punkt B tiefer; die Differenz $h_b - h_c$ würde also kleiner werden. Daher würde

$$(h_b - h_c)\, (s - \sigma) < P.$$

und das erste Glied der Gleichung (16) kleiner als das zweite werden. Die Druckdifferenz zwischen C und B würde kleiner werden als für das

Gleichgewicht des Eises nötig ist; dieses würde also nach rechts gehen. Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß, wenn nicht gleichzeitig in jeder Hinsicht Gleichgewicht bestehen kann, die angedeuteten Veränderungen niemals aufhören würden. Fortwährend würde sich das Eis nach rechts verschieben, während es in C abschmelzen und in B neues Eis aus Wasser entstehen würde, welches durch A hin zuströmte. Diese anhaltende Bewegung ist nun (§ 236) unmöglich, und da das entgegengesetzte ebenfalls unmöglich ist, so schließen wir, daß unter dem Druck (18) auch in C Gleichgewicht besteht.

Für diesen Druck können wir nach (17) schreiben

$$p + \frac{\sigma}{s-\sigma} P$$

und wir können also schließen:

Wenn T der Gefrierpunkt einer Lösung unter dem Druck p ist, so ist diese Temperatur auch der Gefrierpunkt von reinem Wasser unter dem größeren Druck $p + P\sigma/(s-\sigma)$. Der Gefrierpunkt des Wassers unter dem Druck p würde höher sein, etwa $T + \vartheta$, und zwar ist nach der Formel (6) von § 276

$$\vartheta = \frac{T(v_1 - v_2)}{Er} \cdot \frac{\sigma}{s-\sigma} P.$$

Um soviel ist bei demselben Druck p der Gefrierpunkt einer Lösung niedriger als der des Wassers. Ist die Lösung sehr verdünnt, so ist ϑ viel kleiner als T und kann man im zweiten Glied unter T den Gefrierpunkt von reinem Wasser verstehen (der eigentlich $T + \vartheta$ ist). Ferner ist

$$s : \sigma = v_1 : v_2;$$

man kann also für die Gleichung schreiben.

$$\vartheta = \frac{T v_2}{Er} P.$$

Wird nun die Stärke der Lösung in der am Anfang dieses Paragraphen angegebenen Weise durch die Zahl c bestimmt, so ist P gleich dem Druck, ausgeübt durch $2c$ Gramm Wasserstoff in 1 cbcm, also $= 8{,}29 \times 10^7 c\, T$ Dyn pro qcm, wodurch man zur Formel (15) kommt.

§ 300. **Abweichungen vom Gesetz von van't Hoff.** Ebenso wie wir im Vorhergehenden erst die Dampfspannungsverminderung und dann die Gefrierpunktserniedrigung mit dem osmotischen Druck in Zusammenhang gebracht haben, kann man auch direkt aus thermodynamischen Betrachtungen eine Beziehung zwischen der Dampfspannung und dem Gefrierpunkt einer Lösung ableiten. *Die Beobachtungen haben niemals zur Kenntnis eines Falles geführt, in welchem sich diese Schlußfolgerungen nicht bestätigt finden.* Man hat allerdings gefunden, daß viele gelöste Stoffe eine größere Dampfspannungsverminderung bewirken als der Formel (14) (§ 298) entspricht,

aber diese Stoffe geben dann auch zu einer Gefrierpunktserniedrigung Veranlassung, die größer ist als die durch (15) bestimmte, und es besteht auch wohl kein Zweifel, daß sie einen osmotischen Druck verursachen, der größer ist als er nach dem Gesetz von van't Hoff sein muß.

Es sind die Salze und Körper, die mit ihnen in den chemischen Eigenschaften mehr oder weniger übereinstimmen, bei denen diese Abweichungen vorkommen, und zwar um so mehr, je mehr die Lösungen verdünnt sind. Um dies zu erklären, hat man angenommen, *daß die Moleküle dieser Körper unter dem Einfluß des Wassers dissoziiert werden.* Man hat in der Tat allen Grund zu der Annahme, daß das Gesetz von van't Hoff immer gelten muß, wenn man nur unter der Anzahl der Moleküle, von der in diesem Gesetz die Rede ist, *die gesamte Anzahl von Teilchen* versteht, aus denen der gelöste Stoff zusammengesetzt ist und die sich unabhängig voneinander im Wasser bewegen. Wenn dies so ist, so muß Spaltung der Moleküle eines Salzes eine Erhöhung des osmotischen Druckes zur Folge haben; dies ist dann wegen des Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Erscheinungen mit einer Vergrößerung der Dampfspannungsverminderung und der Gefrierpunktserniedrigung verbunden.

Bei der Besprechung der Zerlegung durch den elektrischen Strom werden wir auf diese Dissoziation zurückkommen.

Sach- und Namenregister.

